UNIVERSITÉ BATNA 2
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT T.C. SCIENCES ET TECHNOLOGIES

22 Juin 2016

EXAMEN DE RATTRAPAGE DE MÉTHODES NUMÉRIQUES

(Durée : 1h 30 mn)

Exercice 1 : (7 pts)

Résoudre à 10^{-7} près, l'équation $f(x) = x.\ln x - 0.8 = 0$ par la méthode de ***Newton-Raphson***.

Exercice 2 : (7 pts)

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 14 \\ x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

1) Calculer sa solution ***exacte*** par la méthode de ***Cholesky***.

2) En déduire la valeur ***exacte*** du ***déterminant*** de la matrice de ce système.

Questions de cours :

1) Citer quatre (04) propriétés de la méthode de ***Gauss*** utilisée pour la résolution des systèmes d'équations linéaires. **(4 pts)**

2) Il arrive souvent que le système linéaire $Ax = b$ ne satisfait pas à la condition de convergence de la méthode de ***Jacobi***. Que faut-il faire pour y remédier ? **(2 pts)**

Bon Courage

Exercice 1 :

Résoudre une équation ***consiste à calculer toutes ses racines***. Avant cela, nous devons passer ***séparation analytique*** de ces racines.

La fonction $f(x) = x.\ln x - 0.8$ est ***définie*** et ***continue*** dans $]0, +\infty[$. .5 pt

Sa dérivée $f'(x) = \ln x + 1$. .5 pt

Cherchons d'abord les racines de $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \approx 0.3678794..$ .5 pt

Passons ensuite aux limites :

$$f(0_+) = \lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} (x.\ln x - 0.8) = \lim_{x \to 0_+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} - 0.8\right) = \lim_{x \to 0_+} \left(\frac{1/x}{-1/x^2} - 0.8\right) = \lim_{x \to 0_+} (-x - 0.8) = -0.8\,;$$ .5 p

(en vertu de la ***règle de l'Hospital***).

$$f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x.\ln x - 0.8) = +\infty.$$ .5 pt

Calculons enfin la valeur de f au point où s'annule la dérivée $f'(x)$:

$f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e} - 0.8$ .25 pt

En vertu du ***théorème des valeurs intermédiaires***, on a :

Dans $]0, \frac{1}{e}[$: $f(0_+).f(\frac{1}{e}) > 0$ et $f'(x) \neq 0$

alors l'équation donnée n'admet ***aucune racine***. .5 pt

Dans $]\frac{1}{e}, +\infty[$: $f(\frac{1}{e}).f(+\infty) < 0$ et $f'(x) \neq 0$

alors l'équation donnée admet ***une racine unique***. .5 pt

L'intervalle $]\frac{1}{e}, +\infty[$ peut être réduit à $]1, 2[$ vu que $f(1).f(2) = (-0.8).(0.5862943..) < 0$. .25 pt

En conclusion, l'équation $x.\ln x - 0.8 = 0$ possède une ***racine unique*** dans $]1, 2[$.

L'***équation récurrente*** de la méthode de ***Newton-Raphson*** est donnée par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{pour } n = 0, 1, \ldots$$ .25 pt

$$= x_n - \frac{x_n.\ln x_n - 0.8}{\ln x_n + 1} \quad \text{pour } n = 0, 1, \ldots$$ .25 pt

Après réarrangement, elle s'écrit : $x_{n+1} = \frac{x_n + 0.8}{\ln x_n + 1}$ pour $n = 0, 1, \ldots$

Voyons si les ***conditions de convergence*** de la méthode de ***Newton-Raphson*** sont ***respectées***.

D'une part :

$f'(x) = \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ (déjà vu précédemment).

D'autre part :

$f''(x) = \frac{1}{x}$ .5 pt

Pour $x \in]0, +\infty[$, $f''(x)$ est toujours ***positive*** : ***elle ne s'annule pas***. .5 pt

En résumé, $f'(x) \neq 0$ et $f''(x) \neq 0$ pour $x \in [1, 2]$: ***les dérivées ne changent pas de signe***.

Puisque $f(2).f''(2) = (0.5862943..).(0.5) > 0$, on prendra $x_0 = 2$ comme ***approximation initiale***. .5 pt

Avec l'***équation récurrente*** $x_{n+1} = \frac{x_n + 0.8}{\ln x_n + 1}$ pour $n = 0, 1 \ldots$ $x_0 = 2$ et $\varepsilon = 10^{-7}$, les calculs donnent :

$x_1 = 1.6537251$;

$x_2 = 1.6325186$;

$x_3 = 1.6324270$; 1 pt

$x_4 = 1.6324270$.

Vu que $|x_4 - x_3| < 10^{-7}$, on ***arrête les calculs***. La ***valeur approchée à 10^{-7} près*** de la ***racine*** de l'équation $x.\ln x - 0.8 = 0$ est le nombre 1.6324270.

Exercice 2 :

1) L'équation matricielle $Ax = b$ est :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Avant d'utiliser la méthode de ***Cholesky***, il faut d'abord s'assurer que :

- la matrice A est ***symétrique***,
- la matrice A est ***définie positive***.

Puisque $A = A^t$, où A^t est la matrice ***transposée*** de A, alors A est ***symétrique***. .5 pt

Cherchons maintenant les ***racines*** de l'***équation caractéristique*** (ou ***valeurs propres***) de la matrice A.

La ***matrice caractéristique*** de A est :

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 6-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Le ***déterminant caractéristique*** ou ***polynôme caractéristique*** de A est :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 6-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(2-\lambda)^2 - 10(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 2)$$

L'*équation caractéristique* de A est :

$\det(A - \lambda I) = 0$ soit $(2-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 2) = 0$.

Le polynôme $\lambda^2 - 8\lambda + 2$ a pour *discriminant* $\Delta = 56$ et l'équation $\lambda^2 - 8\lambda + 2 = 0$ a pour solutions :

$\lambda_1 = 4 - \sqrt{14}$ et $\lambda_2 = 4 + \sqrt{14}$.

En résumé, les *racines* de l'*équation caractéristique* de A sont : $\lambda_1 = 4 - \sqrt{14}$, $\lambda_2 = 4 + \sqrt{14}$ et $\lambda_3 = 2$.

Toutes les valeurs propres de A sont ***positives***, donc la matrice A est ***définie positive***. 1.5 pt

La matrice A étant ***symétrique*** et ***définie positive***, nous pouvons alors utiliser la méthode de ***Cholesky*** afin de résoudre le système linéaire donné.

Posons $A = LL^t$, où $L = (l_{ij})$ est une matrice ***triangulaire inférieure*** et L^t sa ***transposée***.

Les matrices L et L^t, d'ordre n = 3, s'écrivent :

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L^t = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

Effectuons la multiplication LL^t puis égalisons le résultat avec la matrice A :

$$LL^t = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}.l_{21} & l_{11}.l_{31} \\ l_{21}.l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}.l_{31} + l_{22}.l_{32} \\ l_{31}.l_{11} & l_{31}.l_{21} + l_{32}.l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}$$ .5 pt

$$= A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Par ***identification*** des termes correspondants de ces deux matrices, avec $l_{ii} > 0\ \forall i$, on obtient :

$l_{11}^2 = 2$, d'où $l_{11} = \sqrt{2}$; .25 pt

$l_{11}.l_{21} = 3$, d'où $l_{21} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; .25 pt

$l_{11}.l_{31} = 0$, d'où $l_{31} = 0$; .25 pt

$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 6$, d'où $l_{22} = \frac{\sqrt{6}}{2}$; .25 pt

$l_{21}.l_{31} + l_{22}.l_{32} = 1$, d'où $l_{32} = \frac{\sqrt{6}}{3}$; .25 pt

$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 2$, d'où $l_{33} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. .25 pt

Il en résulte :

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L^t = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

La résolution de l'équation matricielle $Ax = b$ s'effectue comme suit :

$Ax = b \Leftrightarrow (LL^t)\,x = b \Leftrightarrow L(L^t x) = b \Leftrightarrow Ly = b$ avec $y = L^t x$. .5 pt

- Résolution du système *triangulaire* $Ly = b$:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Par substitution *directe*, on a :

$\sqrt{2}\, y_1 = 4$, d'où $y_1 = 2\sqrt{2}$; .25 pt

$\frac{3\sqrt{2}}{2} y_1 + \frac{\sqrt{6}}{2} y_2 = 14$, d'où $y_2 = \frac{8\sqrt{6}}{3}$; .25 pt

$\frac{\sqrt{6}}{3} y_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} y_3 = 12$, d'où $y_3 = \frac{10\sqrt{3}}{3}$. .25 pt

- Résolution du système *triangulaire* $L^t x = y$:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ \frac{8\sqrt{6}}{3} \\ \frac{10\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

Par substitution *inverse*, on a :

$\frac{2\sqrt{3}}{3} x_3 = \frac{10\sqrt{3}}{3}$, d'où $x_3 = 5$; .25 pt

$\frac{\sqrt{6}}{2} x_2 + \frac{\sqrt{6}}{3} x_3 = \frac{8\sqrt{6}}{3}$, d'où $x_2 = 2$; .25 pt

$\sqrt{2}\, x_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} x_2 = 2\sqrt{2}$, d'où $x_1 = -1$. .25 pt

2) Puisque $A = LL^t$, alors : $\det A = \det(LL^t) = \det L \times \det L^t = (\det L)^2 = (\det L^t)^2$. .5 pt

Par ailleurs, $\det L = \det L^t = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}$, il en résulte : $\det A = 4$. .5 pt