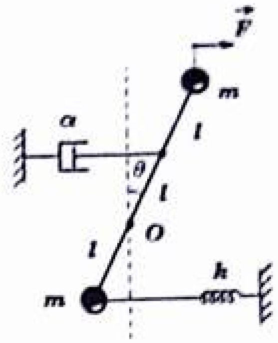
TD N° 4

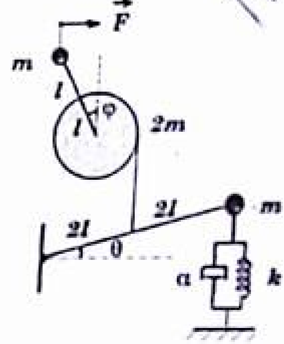
Exercice 1 :



Le système, ci-contre est forcé à osciller autour de la verticale, qui est la position d'équilibre, par une force sinusoïdale $\vec{F}$qui reste horizontale lors du mouvement. Elle est donnée par $F = F_0 \cos \omega t$ et le sens positif est choisi vers la droite. Les frottements sont modélisés par un frottement visqueux de coefficient α. On suppose que l'amplitude du mouvement reste faible pour admettre l'approximation des faibles angles.

1- Exprimer et simplifier l'expression de l'énergie potentielle U.
2- Donner l'expression de l'énergie cinétique T du système.
3- Donner l'expression du Lagrangien du système et déduire l'équation du mouvement.
4- Donner la solution permanente. Préciser son amplitude et sa phase

Exercice 2 :



Soit le système ,ci-contre. Il est forcé à osciller autour de la position d'équilibre, correspondant à $\theta = 0$, par une force sinusoïdale $\vec{F}$ qui reste horizontale. Elle est donnée par $F = F_0 \cos \omega t$ et le sens positif est choisi vers la droite. Les frottements sont modélisés par un frottement visqueux de coefficient α. On suppose que l'amplitude du mouvement reste faible pour admettre l'approximation des faibles angles. Trouver l'équation du mouvement en utilisant le formalisme Lagrangien.

Le conjuguée de ② est :

$$A\left[(\omega_0^2-\Omega^2)-j2\lambda\Omega\right]=\frac{-2F_0}{5ml}e^{j\varphi}\rightarrow ③$$

$$②\times③\Rightarrow A^2\left[(\omega_0^2-\Omega^2)+j2\lambda\Omega\right]^2=\left(\frac{-2F_0}{5ml}\right)^2+j\,0$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{(2F_0/5ml)}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\lambda\Omega)^2}}}$$ l'amplitude

$$tg\,\varphi=\text{Arctg}\left(\frac{0}{\frac{2F_0}{5m}}\right)-\text{arctg}\left(\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)$$

$$\varphi=\boxed{-\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}}$$

EXercice 02 :

1) L'energie potentielle :

$$U=\frac{1}{2}K(X_3+X_0)^2+mgX_3-mgX_c$$

Avec :

$$X_c=2l(1-\cos\varphi)=l\varphi^2$$

$$X_2=2l\sin\varphi=2l\varphi$$

$$X_3=4l\sin\theta=4l\theta$$

On a $2l\theta=l\varphi\Rightarrow\boxed{2\theta=\varphi}$

Donc :

$$\boxed{U=\frac{1}{2}K(4l\theta+X_0)^2+4lmg\,\theta-4lmg\,\theta^2}$$

à l'équilibre $\theta=0\Rightarrow 4lK(4l\theta+X_0)+4mgl-8mgl\theta=0$

$$\Rightarrow 4KlX_0+4mgl=0\Rightarrow\boxed{X_0=\frac{-mg}{K}}$$

2) L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}\left(m(4l)^2\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\left(m(2l)^2\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2m)l^2\right)\dot\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\left(m\,16l^2\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\left(m\,4l^2\right)4\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\left(m\,l^2\right)4\dot\theta^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 18m\,l^2\dot\theta^2}$$

Lagrangien : $L = T - U = 18m\,l^2\dot\theta^2 - \frac{K}{2}(4l\theta + x_0)^2 - 4mgl\theta$
$- 4mgl\theta^2$

→ Formalisme de lagrange : $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{-\partial D}{\partial\dot\theta} + \vec{\Pi}$

$\vec{\Pi} = \frac{\partial Q}{\partial\theta}\;\Pi = 2F2l = 4lF = 4lF_0\cos\Omega t$

$$D = \frac{1}{2}\alpha\,\dot x_3^2 = \frac{1}{2}\alpha(16l^2)\dot\theta^2 = 8\alpha l^2\dot\theta^2$$

$$\Rightarrow 36\,ml^2\ddot\theta + 8\theta l(2Kl + mg) = -16\alpha l^2\dot\theta + 4lF_0\cos\Omega t$$

$$\Rightarrow \ddot\theta + \frac{16\alpha}{36ml^2}\dot\theta + 8\frac{l(2Kl+mg)}{36ml^2} = \frac{4lF_0}{36ml^2}\cos\Omega t$$

$$\Rightarrow \ddot\theta + \frac{4}{9}\alpha\dot\theta + \theta\left(\frac{4Kl+2mg}{9ml}\right) = \frac{F_0 4}{36ml}\cos\Omega t$$

$$\Rightarrow \ddot\theta + 2\left(\frac{2}{9}\alpha\right)\dot\theta + \theta\left(\frac{4Kl+2mg}{9ml}\right) = \frac{F_0}{9ml}\cos\Omega t$$

Avec : $\lambda = \frac{2}{9}\alpha$ et $\omega_0^2 = \frac{4Kl+2mg}{9ml}$

$$\boxed{U = l\theta^2\left(\frac{Kl}{2} - \frac{mg}{2}\right) + \frac{1}{2}KX_0^2 + Kl\theta X_0}$$

- A l'équilibre $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow 2l\theta\left(\frac{Kl}{2} - \frac{mg}{2}\right) + KlX_0 = 0$

mais $\theta = 0$ à l'équilibre $\Rightarrow KlX_0 = 0 \Rightarrow \boxed{X_0 = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}l\theta^2(Kl - mg)}$$

16

2) L'énergie cinétique:

$T = T_{m_1} + T_{m_2}$

$T_{m_1} = \frac{1}{2}I_{m_1}\dot{\theta}^2 = \boxed{\frac{1}{2}(ml^2)\dot{\theta}^2}$

$T_{m_2} = \frac{1}{2}I_{m_2}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(m(2l)^2)\dot{\theta}^2$

$T_{m_2} = \boxed{2ml^2\dot{\theta}^2}$

$\Rightarrow T = \frac{1}{2}(ml^2)\dot{\theta}^2 + 2ml^2\dot{\theta}^2$

$$\boxed{T = \frac{5}{2}ml^2\dot{\theta}^2}$$

Lagrangien: $L = T - U$

$L = \frac{5}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}l\theta^2(Kl - mg)$

→ Formalisme de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + F(t)$$

$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2$

$x = l\theta \Rightarrow \dot{x} = l\dot{\theta}$

Avec: $\boxed{F(t) = F_0\cos\Omega t}$

$FX = F(-2l\cos\theta) = -2lF\cos\theta$

$\cos\theta = 1$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = 2ml^2\dot\theta \; ; \; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = 2ml^2\ddot\theta$$

15

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -(3kl - mg)l\theta$$

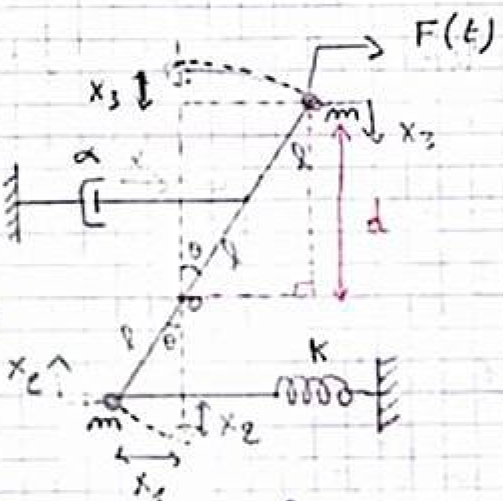
$$\frac{\partial D}{\partial \dot\theta} = \alpha l^2 \dot\theta$$

$$\Rightarrow 2ml^2\ddot\theta + (3kl - mg)l\theta = -\alpha l^2\dot\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot\theta + \frac{\alpha}{2m}\dot\theta + \frac{3kl - mg}{2ml}\theta = 0} \longrightarrow \text{l'équation du Mvt}$$

TD : 04

Exercice 01:



1) L'energie potentielle:

$$U = \frac{1}{2}k(x_1 + x_0)^2 + mgx_2 - mgx_3$$

Avec:

$$x_1 = l\sin\theta \simeq l\theta$$

$$x_2 = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta) = l(1-(1-\frac{\theta^2}{2})) = \frac{l\theta^2}{2}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

[illegible]

condition d'équilibre

$$x_3 = 2l - 2l\cos\theta = 2l(1-\cos\theta)$$

$$= 2l(1 - (1 - \frac{\theta^2}{2})) = l\theta^2$$

$$U = \frac{1}{2}k(l\theta + x_0)^2 + mg\frac{l\theta^2}{2} - mgl\theta^2$$

$$= \frac{1}{2}k(l^2\theta^2 + x_0^2 + 2l\theta x_0) - \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

17

$$\Rightarrow F(\theta) = -2lF = -2l F_0 \cos \Omega t$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = 5ml^2 \dot\theta \;;\; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = 5ml^2\ddot\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -l\theta(Kl - mg)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot\theta} = \alpha l \dot\theta$$

$$\Rightarrow 5ml^2\ddot\theta + l\theta(Kl - mg) = -\alpha l^2\dot\theta - 2lF_0\cos\Omega t$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot\theta + \frac{\alpha}{5m}\dot\theta + \frac{Kl-mg}{5ml}\theta = \frac{-2F_0}{5ml}\cos\Omega t}$$

$$\theta(t) = \theta_{R}(t) + \theta_{P}(t)$$

R : homogène ; P : particulier

l'équation sous forme :

$$\ddot\theta + 2\lambda\dot\theta + \omega_0^2\theta = \frac{-2F_0}{5ml}\cos\Omega t$$

- solution homogène :

$$\ddot\theta + 2\lambda\dot\theta + \omega_0^2\theta = 0$$

$$\lambda^2 - \omega^2 \;(\,)\; 0 = 0$$

* $\theta_R(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t + \varphi) \rightarrow$ M.V.t faible Amortie $\rightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$

Régime pseudo-périodique

* $\theta_R(t) = e^{-\lambda t}\left(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t} + A_2 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t}\right)$ — Régime apériodique

$\rightarrow$ Mvt fort amortie $\rightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 > 0$

* $\theta_R(t) = e^{-\lambda t}(A_1 + A_2 t) \rightarrow$ Amortissement critique $\rightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 = 0$

mouvement critique

- solution permanente

$\theta_p(t) = A\cos(\Omega t + \varphi) \rightarrow$ Régime transitoire

$$\rightarrow \tilde\theta_p(t) = Ae^{j(\Omega t+\varphi)} = Ae^{j\Omega t}e^{j\varphi}$$

$$\dot{\tilde\theta}_p(t) = Aj\Omega e^{j(\Omega t+\varphi)} = j\Omega\tilde\theta_p(t)$$

$$\ddot{\tilde\theta}_p(t) = -A\Omega^2 e^{j(\Omega t+\varphi)} = -\Omega^2\tilde\theta_p(t)$$

Fin

18

Mouvement rotationnel

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot\theta} + \mathcal{M}$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha \dot x_4^2 = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\alpha l \dot\theta^2$$

$$x_4 = l\sin\theta \simeq l\theta$$

$$\mathcal{M} = F.d = -F.2l\cos\theta = -F2l$$
$$= -F_0 2l\cos\Omega t$$

$\cos\theta \simeq 1$

solution permanente

$$\theta_p(t) = A\cos(\Omega t + \varphi) \rightarrow$$
$$\tilde\theta_p(t) = A e^{j(\Omega t+\varphi)}$$

$$\ddot{\tilde\theta}_p(t) + 2\lambda\dot{\tilde\theta}_{p(t)} + \omega_0^2\tilde\theta_p = \left(\frac{2F_0}{5ml}\right)\cos\Omega t = \frac{-2F_0}{5ml}e^{j\Omega t}$$

$$\dot{\tilde\theta}_{p(t)} = jA\Omega e^{j(\Omega t+\varphi)} = j\Omega\tilde\theta_p(t)$$
$$\ddot{\tilde\theta}_p(t) = -A\Omega^2 e^{j(\Omega t+\varphi)} = -\Omega^2\tilde\theta_p(t)$$

$$-\Omega^2\tilde\theta_p(t) + 2\lambda j\Omega\tilde\theta_p(t) + \omega_0^2\tilde\theta_p(t) = \frac{-2F_0}{5ml}e^{j\Omega t}$$

$$\Rightarrow \tilde\theta_p(t)\left[(\omega_0^2-\Omega^2) + j2\lambda\Omega\right] = \frac{2F_0}{5ml}e^{j\Omega t}$$

$$\Rightarrow A e^{j\Omega t}e^{j\varphi}\left[(\omega_0^2-\Omega^2)+j2\lambda\Omega\right] = \frac{-2F_0}{5ml}e^{j\Omega t}$$

$$A e^{j\varphi}\left[(\omega_0^2-\Omega^2)+j2\lambda\Omega\right] = \frac{-2F_0}{5ml} \longrightarrow 1$$

1 divise sur $e^{j\varphi}$

$$\Rightarrow A\left[(\omega_0^2-\Omega^2)+j2\lambda\Omega\right] = \frac{-2F_0}{5ml}e^{-j\varphi} \longrightarrow 2$$

L'équation du mouvement

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial r}{\partial \theta}\cdot \vec{F}}$$

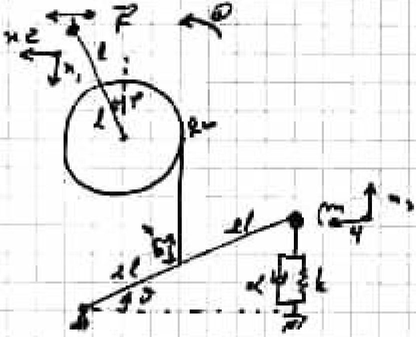
$$36 m l^2 \ddot{\theta} + 8\theta l(4kl + mg) = -16\alpha l^2 \dot{\theta} + 4 l F_0 \cos \omega t$$

$$36 m l^2 \ddot{\theta} + 8\theta l(4kl + mg) + 16\alpha l^2 \dot{\theta} = 4 l F_0 \cos \omega t \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \frac{16\alpha l^2 \dot{\theta}}{36 m l^2} + \frac{8 l(4kl + mg)}{36 m l^2} = \frac{4 l F_0}{36 m l^2} \cos \omega t$$

$$\ddot{\theta} + \frac{4}{9}\alpha \dot{\theta} + \theta\left(\frac{4kl + 2mg}{9ml}\right) = \frac{F_0 l}{9ml^2} \cos \omega t$$

$$\ddot{\theta} + 2 \underbrace{\frac{2\alpha}{9}}_{\lambda} \dot{\theta} + \theta \underbrace{\left(\frac{4kl + 2mg}{9ml}\right)}_{\omega_0^2} = \frac{F_0}{9ml} \cos \omega t$$



$x_1 = 2l(1-\cos\varphi) \approx l\varphi^2$

$x_2 = 2l\sin\varphi \approx 2l\varphi$

$x_3 = 4l\sin\theta \approx 4l\theta$

On a : $2l\theta = l\varphi \Rightarrow \boxed{2\theta = \varphi}$ car :

$x_5 = 2l\theta = l\varphi$

$$U = \frac{k}{2}(x_3 + x_{03})^2 + mg x_3 - mg x_1$$

$$U = \frac{k}{2}(4l\theta + x_{03})^2 + mg4l\theta - mg\, l\varphi^2 \qquad (2\theta = \varphi) \Rightarrow$$

$$U = \frac{k}{2}(4l\theta + x_{03})^2 + mg4l\theta - mg\, l\, 4\theta^2$$

$$\boxed{U = \frac{k}{2}(4l\theta + x_{03})^2 + mg4l\theta - mg4l\theta^2}$$

1) à l'équilibre : $\theta = 0 \Rightarrow$

$$4lk(\underbrace{4l\theta}_{0} + x_{03}) + 4mgl - \underbrace{8mgl\theta}_{0} = 0 \quad (\text{car } \theta = 0)$$

$$4kl\, x_{03} + 4mgl = 0 \Rightarrow \boxed{x_{03} = \frac{-mg}{k}}$$

2) $$T = \frac{1}{2}(m(4l)^2)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}(m(2l)^2)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2m}{2}l^2\right)\dot\varphi^2$$

$$T = \frac{1}{2}m16l^2\dot\theta^2 + \frac{m}{2}4l^2 4\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ml^2 4\dot\theta^2$$

$$T = \frac{m}{2}l^2\dot\theta^2(16 + 16 + 4) \Rightarrow \boxed{T = 18ml^2\dot\theta^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = 18ml^2\dot\theta^2 - \frac{k}{2}(4l\theta + x_{03})^2 - 4mgl\theta - 4mgl\theta^2}$$

$$\boxed{D = \frac{\alpha}{2}\dot x_1^2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}(4l\dot\theta)^2 = 8\alpha l^2\dot\theta^2 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial D}{\partial\dot\theta} = 16\alpha l^2\dot\theta}$$

pour la force : $\frac{\partial \vec r}{\partial u}\cdot\vec F = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\, r_6 = 2F2l = \boxed{4lF_0\cos\omega t}$

3) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) = 36ml^2\ddot\theta$$

4) $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -4kl(4l\theta + \cancel{x_{03}}) - \cancel{4mgl} - 8mgl\theta$$

$$= -16kl^2\theta - 8mgl\theta = \boxed{-8\theta l(2kl + mg)}$$