2ème ST

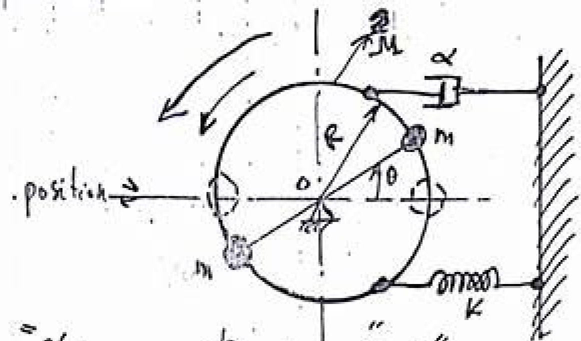
25.00

Université. Batna-2- Département LMD/ST. 2017/2018

2ème Année. LMD/S.T. MOD: "ONDES et VIBRATIONS." décembre/2017.

* "CORRECTION": "T.D N°: 03."

* Exercice N°01 :



I : 1- Trouver "L'Energie Cinétique" "T" :

$$T = T_M + T_m + T_m = \frac{1}{2} J/_0 \omega^2 + 2\times\left(\frac{1}{2} m.V_m^2\right)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}M.R^2\right].\dot{\theta}^2 + m\dot{x}^2 = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + m\dot{x}^2.$$

$x = R\theta$; $\dot{x} = R.\dot{\theta}$; d'où $\dot{x}^2 = R^2\dot{\theta}^2$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{4}M.R^2\dot{\theta}^2 + m.R^2\dot{\theta}^2 = R^2\dot{\theta}^2\left[\frac{1}{4}M + m\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{4}(M+4m)R^2\dot{\theta}^2}$$

2. "L'Énergie. Potentielle" : "U".

$$U = U_K + U_{m_1} + U_{m_2} = \frac{1}{2}kx^2 \cancel{-mgh + mgh}^{\,0}.$$

$$\boxed{U = U_K = \frac{1}{2}K.R^2\theta^2}$$

3. La Fonction de "Dissipation" :

$$\boxed{D = \frac{1}{2}\alpha.\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\alpha.R^2\dot{\theta}^2}$$

II.1. La Fonction de "LAGRANGE": $L = T - V$

$$\boxed{L = \frac{1}{4}(M+4m)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}KR^2\theta^2}$$

Le Formalisme de "Lagrange":

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dfrac{1}{2}(M+4m)R^2\dot{\theta} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\dfrac{M}{2}+2m\right)R^2\ddot{\theta} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = K.R^2.\theta \quad ; \quad \dfrac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha . R^2\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(M/2 + 2m\right)R^2\ddot{\theta} + KR^2\theta = -\alpha.R^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \left(M/2 + 2m\right)R^2\ddot{\theta} + \alpha.R^2\dot{\theta} + KR^2\theta = 0$$

$2\left(\frac{M}{2} - 2m\right) = (M+4m)$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{(M+4m)}\dot{\theta} + \frac{2K}{(M+4m)}\theta = 0.}$$

$\Leftarrow$ La fonction de Lagrange

2. "L'équation différentielle" du Mouvement est de La Forme:

$$\ddot{\theta} + 2\lambda.\dot{\theta} + w_0^2.\theta = 0$$

Avec $\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{(M+4m)}}$ et; $\boxed{w_0^2 = \frac{2K}{(M+4m)}}$

$\begin{cases} \lambda : \text{Coefficient d'Amortissement.} \\ w_0 : \text{Pulsation propre.} \end{cases}$

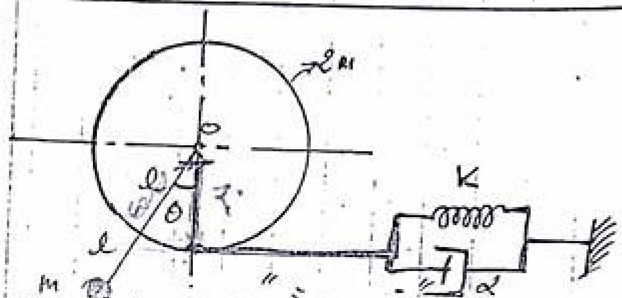
"A.N": $\lambda = \frac{5}{1+4} = 1 \; N.s.m^{-1}.$

$$w_0^2 = \frac{2(5)}{(1+4)} = \frac{10}{5} = 2.$$

$\lambda^2 - \omega_0^2 = 1-2 = \boxed{-1<0}$

III. ⇒ Le Mouvement est Donc $\boxed{\text{Pseudo-Périodique}}$

Exercice N° 2 :



1) L'Energie potentielle : • Ressort : L'axe : $\vec{Ox_1}$
• Gravitation : L'axe : $\vec{Ox_2}$: (hauteur)

$U = U_k + U_m$

$U_k = \frac{1}{2} K (x_1 + x_0)^2$

$U_m = \pm mgh = + mgh = + mg x_2$

$x_1 = l \cdot \sin\theta \simeq l\theta$

$h = x_2 = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta) \simeq l\cdot\theta^2$ $\left(\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$

$\Rightarrow U = \frac{K}{2}\left[l\cdot\theta + x_0\right]^2 + mg\cdot l\theta^2$

$\Rightarrow U = \frac{K}{2}\left[l^2\theta^2 + x_0^2 + 2l\theta x_0\right] + mg\, l\theta^2$

$\Rightarrow U = \frac{1}{2} K l^2 \theta^2 + \frac{1}{2} K x_0^2 + K\cdot l\cdot\theta\cdot x_0 + mg\, l\theta^2$

$\Rightarrow \boxed{U = l\cdot\theta^2 \cdot \left[mg + \frac{Kl}{2}\right] + K\cdot l\cdot x_0\cdot\theta + \frac{K}{2} x_0^2}$

• à l'équilibre la Dérivée de l'Energie potentielle s'annulle ⇒ $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$

$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 2l\cdot\left[mg + \frac{Kl}{2}\right]\cdot\theta + K\cdot l\cdot x_0 = 0$

mais on a à l'équilibre $\theta = 0$

$\Rightarrow \quad K.\ell.x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

$\Rightarrow$ U simplifiée :
$$\boxed{U = \ell.\theta^2\left[\frac{k\ell}{2} + mg\right]}$$

2. "L'ENERGIE CINÉTIQUE" :

$T = T_{tig} + T_m = T_{tig} + T_m.$

$= \frac{1}{2} J/_0 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m.v^2$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(2m)\ell^2\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\dot{X}_m^2$ d'où $\begin{cases} X_m = 2\ell \sin\theta. \\ X_m \simeq 2\ell\theta. \\ \dot{X}_m \simeq 2\ell.\dot{\theta}. \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[m\ell^2\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(2\ell.\dot{\theta}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{m\ell^2}{2}.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m.4\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{m\ell^2}{2}.\dot{\theta}^2 + \boxed{2}m.\ell^2.\dot{\theta}^2$

$\Rightarrow m\ell^2.\dot{\theta}^2\left[\frac{1}{2} + 2\right] = \frac{5}{2} m.\ell^2.\dot{\theta}^2$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{5}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2}$$

3. Le LAGRANGIEN : $L = T - U$.

$$\boxed{L = \frac{5}{2} m.\ell^2.\dot{\theta}^2 - \left(\frac{k}{2}\ell + mg\right)\ell.\theta^2}$$

* L'équation de "LAGRANGE" pour un mouvement amorti s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=-\beta\dot{\theta} \quad \text{avec } \beta=\alpha\left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\right)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 5m.\ell^2.\dot{\theta} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 5m\ell^2.\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=\left(\frac{1}{2}\left[k\ell+2mg\right]\ell.\theta^2\right)'$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \theta}=\left(k\ell+2mg\right).\ell\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=-\beta\dot{\theta} \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta}=\left(k\ell^2+2mg\ell\right)\theta$$

$\Rightarrow$

$$x_1=\ell\theta \Rightarrow \frac{\partial x_1}{\partial \theta}=\ell$$

$$\Rightarrow \beta=\alpha.\ell^2 \Rightarrow -\beta\dot{\theta}=\alpha\ell^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{5m\ell^2\ddot{\theta}+\left(k\ell^2+2mg\ell\right)\theta=-\alpha\ell^2\dot{\theta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}+\frac{\alpha}{5m}\dot{\theta}+\frac{\left(k\ell+2mg\right)}{5m\ell}\theta=0}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}+2.\frac{\alpha}{(10m.\ell)}\dot{\theta}+\frac{\left(k\ell+2mg\right)}{5m\ell}\theta=0$$

. Cette Equation est de la Forme :

$$\ddot{\theta}+2\lambda.\dot{\theta}+\omega_0^2.\theta=0$$

Avec : $\lambda=\dfrac{\alpha}{10m}$ $\qquad \omega_0^2=\dfrac{k\ell+2mg}{5m\ell}$

4/ • Pour Avoir Un Mouvement Oscillatoire il faut être dans le Régime Faiblement Amorti

$$\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$$

• $\Rightarrow \left(\frac{\alpha}{10m}\right)^2 - \frac{ke + 2mg}{5me} < 0$

$$\Rightarrow \quad \alpha < \sqrt{20m \cdot \left(k + \frac{2mg}{e}\right)}$$

$$\underline{\alpha_{max} = 4 \cdot N \cdot s/m.}$$

5/ • $\alpha = 2 < 4 \; N.s/m$. on est dans le "Régime $\alpha < \alpha_{max}$ $\Rightarrow$ pseudo-périodique"

• $$\boxed{\theta(t) = A \cdot e^{-\lambda t} \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \cdot t + \varphi\right)}$$

??? $$\Rightarrow \theta(t) = A \cdot e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{\Rightarrow \theta(t) = A \cdot e^{-2t} \cos\left(\sqrt{12} \cdot t + \varphi\right)}$$

. Les 2 Constante A et φ peuvent être déterminé par les Conditions Initiale.

$\theta(0) = 0 \Rightarrow A \cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0$ $\quad \boxed{\varphi = \begin{cases} \pi/2 \\ -\pi/2 \end{cases}}$

$$\dot{\theta}(t) = -2Ae^{-2t} \cdot \cos(\sqrt{12}t + \varphi) - A \cdot \sqrt{12} \cdot e^{-2t} \cdot (\sin(\sqrt{12}t + \varphi)$$

$$\dot{\theta}(0) = -2A\cos\varphi - A \cdot \sqrt{12} \cdot \sin\varphi.$$

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -A\sqrt{12} = \frac{\sqrt{12}}{10} \Rightarrow A = -0{,}1 \text{ rad.} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow A \cdot \sqrt{12} = \frac{\sqrt{12}}{10} \Rightarrow A = +0{,}1 \text{ rad.} \end{cases}$$

on obtient apparaument 2 possibilités

1) $\varphi(t) = -0{,}1 \cdot e^{-2t} \cdot \cos\left(\sqrt{n} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$

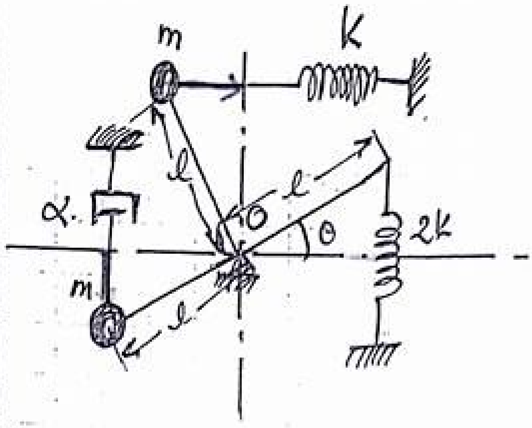
2) $\varphi(t) = +0{,}1 \cdot e^{-2t} \cdot \cos\left(\sqrt{n} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$

mais ces 2 Possibilités constituent une seule solution car $-\cos\alpha = \cos(\alpha \pm \pi)$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = 0{,}1 \cdot e^{-2t} \cdot \cos\left(\sqrt{n} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$x(t) = C e^{rt}$

Exercice N° 03 :



* On Définit les Coordonnées "xi" à Partir de "La Position D'équilibre".

On a : "Système Oscillatoire Libre Amorti" :

$\theta \ll$ faible $\Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$

D'où On a :

$$\begin{cases} x_1 = l\sin\theta \simeq l\theta \\ x_2 = l\sin\theta \simeq l\theta \\ h = x_3 = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta) = l\cdot\frac{\theta^2}{2} \quad \left(\cos\theta \simeq 1-\frac{\theta^2}{2}\right) \\ x_4 = l\sin\theta \simeq l\theta \end{cases}$$

1. "L'Énergie Potentielle" :

$$U = U_K + U_{2K} + U_m + U_m$$

$$\begin{cases} U_K = \frac{1}{2}k(x_1+a)^2 \\ U_{2K} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}k(x_2+b)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} U_m = -mg\,h_B = -mg\,x_4 \\ U_m = -mg\,h_H = -mg\,x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}k(x_1+a)^2 + k(x_2+b)^2 - mg\,x_3 - mg\,x_4} \quad \text{------ (1)}$$

* Rq : "a et b" sont "les déformations initiales" des Ressorts.

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}k\left[x_1^2 + a^2 + 2x_1 a\right] + k\left[x_2^2 + b^2 + 2x_2 b\right] - mgx_3 - mgx_4$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{k}{2}a^2 + k.x_1.a}\ + \underbrace{kx_2^2 + kb^2 + 2kx_2 b} - mgx_3 - mgx_4$$

$$\Rightarrow U = \underbrace{\frac{1}{2}k\,\ell^2\theta^2 + \frac{k}{2}a^2 + ka.\ell\theta}\ + \underbrace{k\ell^2\theta^2 + kb^2 + 2kb\ell\theta} - mg\ell\frac{\theta^2}{2} - mg\ell\theta$$

$$\Rightarrow U = \ell^2\theta^2\left[\frac{k}{2} + k\right] + \ell\theta\left[ka + 2kb - mg\right] - \frac{mg}{2}.\ell\theta^2 + \underbrace{\frac{k}{2}a^2 + kb^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow U = \ell.\theta^2.\left[\frac{3}{2}k\ell - \frac{m}{2}g\right] + \ell\theta.\left[k(2b+a) - mg\right] + k\left[\frac{a^2}{2} + b^2\right]}$$

à l'equilibre $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \left[3k\ell - mg\right]\ell\theta + \left[k(2b+a) - mg\right].\ell = 0$$

- Comme à $t=0$ $\theta=0$ (Equilibre)

$$\Rightarrow \boxed{k(2b+a) - mg = 0} \quad \text{(3)}$$

$\Rightarrow$ on Rapporte "3" dans "2".
on simplifie l'expression de U.

$$\Rightarrow \boxed{U = \left[\frac{3}{2}k\ell - \frac{mg}{2}\right]\ell\theta^2 + k\left(\frac{a^2}{2} + b^2\right)}$$

2. "**L'Energie Cinétique**": T

$$T = T_{Tr.} = T_{rot.} = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m.(\omega.R)^2 = 2\times\frac{1}{2}m.\dot{\theta}^2.R^2 = m.\dot{\theta}^2\ell^2$$

$$\boxed{T = m.\dot{\theta}^2\ell^2 = m.\ell^2.\dot{\theta}^2}$$

ou bien: $T = \frac{1}{2}J/_0\,\omega^2 = 2\times\left(\frac{1}{2}J/_0.\omega^2\right) = J/_0\,\dot{\theta}^2$

$$\boxed{T = m.\ell^2.\dot{\theta}^2}$$

J/o : "Moment d'Inertie" / axe de Rotation "Z" passant par "O".

* "masse ponctuelle" Decrivant un Cercle :

$\Rightarrow$ $\boxed{J/o \text{ ou } I/o = m \cdot \ell^2 \text{ ou } m \cdot R^2}$.

3. <u>La Fonction de "LAGRANGE"</u> : $L = T - U$.

$$L = \underbrace{m\ell^2\dot{\theta}^2}_{T} - \underbrace{\left(\frac{3}{2}k\ell - \frac{m}{2}g\right)\ell\theta^2 + k\left(\frac{a^2}{2}+b^2\right)}_{U}$$

$\Rightarrow$ <u>L'Equation de "LAGRANGE"</u> :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\beta \cdot \dot{\theta}$$

Avec : $\beta = \alpha \cdot \left(\frac{\partial x_4}{\partial \theta}\right)^2 = \alpha \cdot \ell^2$

$$\begin{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2m\ell^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = (3k\ell - mg)\ell\theta \\ \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2m\ell^2 \cdot \ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 2m\ell^2\ddot{\theta} + (3k\ell^2 - mg\ell)\theta = -\alpha \cdot \ell^2 \cdot \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{2m} \cdot \dot{\theta} + \frac{(3k\ell - mg)}{m \cdot \ell} \cdot \theta = 0$$

Chargé : "T.D" :