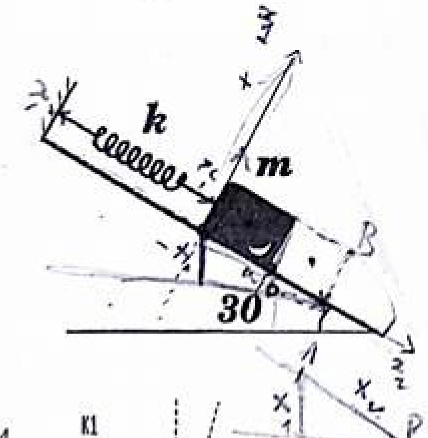
Université Batna 2 –Departement LMD/ST   P3   2017/2018

$\frac{x_1}{x_2} = \sin\alpha$

$x_1 = -\frac{1}{2}x_2$

TD N° 2

Exercice 1 :



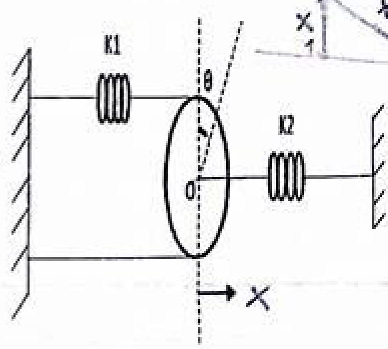
Soit le système ci-contre, La masse peut glisser sans frottement sur le plan. On abandonne le système après l'avoir écarté de la position d'équilibre.

1-Exprimer l'énergie potentielle du système U.

2- Déduire la condition d'équilibre, trouver la déformation du ressort à l'équilibre et simplifier l'expression de U.

3- Exprimer l'énergie totale du système et déduire l'équation du mouvement avec le principe de conservation de l'énergie totale.

Exercice 2 :



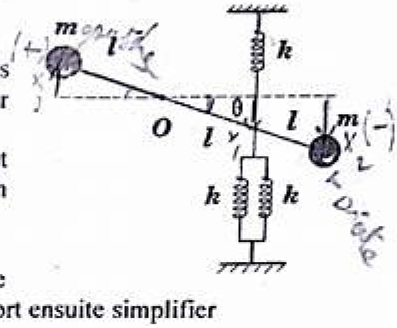
On considère le système oscillatoire mécanique. Au repos les ressorts ne sont pas déformés.

Le cylindre (de masse M de rayon R et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2} MR^2$) roule sans glisser, c'est-à-dire que lorsqu'il tourne de θ, son centre de gravité se déplace de x ($x = R\theta$).

1-Déterminer le Lagrangien du système.

2-En déduire l'équation différentielle du mouvement pour les petites oscillations et la période propre des oscillations pour ; $k1 = k2/2 = k$

Exercice 3 :



Dans le système suivant, La tige et les ressorts sont de masse négligeable.
La tige peut tourner sans frottement autour de l'axe passant par O.
On considère que les masses sont ponctuelles.
A l'équilibre la tige est horizontale. On abandonne le système après l'avoir écarté de l'horizontale d'un angle θ suffisamment petit pour admettre que $\sin\theta = \theta$ et $tg\,\theta = \theta$.

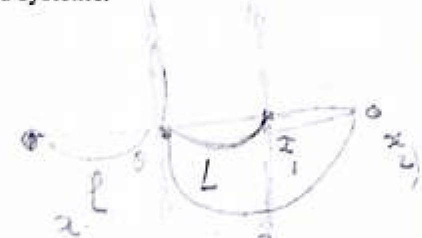
1-Trouver la constante du ressort équivalent au trois ressorts du système et les remplacer par ce ressort. Dans la suite, on suppose que la déformation du ressort équivalent à l'équilibre est x_0.

2-Exprimer l'énergie potentielle U du système en fonction de θ.

3- Trouver la condition que le système doit vérifier pour être à l'équilibre lorsque la tige est horizontale. Déduire la déformation initiale x_0 du ressort ensuite simplifier U.

4-Donner l'expression de l'énergie cinétique T du système et déduire le Lagrangien.

5-Trouver l'équation du mouvement en utilisant l'équation de Lagrange puis en utilisant le principe de conservation de l'énergie. Déduire la pulsation naturelle du système.



TD N°: 1

Exercice :

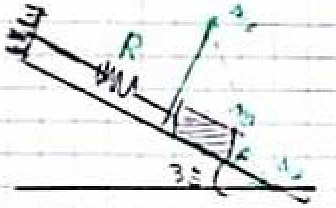
Soit le système ci-contre, la masse peut glisser sans frottement sur le plan.

On a abandonné le système après l'avoir écarté de la position d'équilibre. position

1- Exprimer l'energie potentielle du système U.

2- Deduire la condition d'equilibre, trouver la déformation du ressort à l'équilibre et simplifier l'expression de U.

3- Exprimer l'energie totale du système et déduire l'equation du mouvement avec le principe de conservation de l'energie totale.



1) L'energie potentielle $\begin{cases} \text{Ressort} \Rightarrow \text{l'axe } Ox_2 \\ \text{gravitation} \Rightarrow \text{l'axe } Ox_1 \end{cases}$

La masse en position d'équilibre est representer sur la figure lorsqu'elle est écarte de l'equilibre, sa position est "x_2" suivant l'axe "Ox_2" et "x_1" suivant "Ox_1". l'allongement du ressort est "$x_2 + x_0$" avec "x_0" l'allongement déjà present à l'equilibre. l'expression de l'energie potentielle prend alors la forme : $\boxed{U = \frac{1}{2} K (x_2 + x_0)^2 + mg \cdot x_1}$

- Les deux coordonnés "x_2" et "x_1" sont reliée par :

$$x_1 = -x_2 \sin(30°) = \frac{-x_2}{2}$$

On peut garder une seule coordonnée qu'on considère comme le degré de liberté du système.

Donc $\boxed{U = \frac{1}{2} K (X_2 + X_0)^2 - \frac{m.g}{2} . X_2}$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} K X_2^2 + \frac{K}{2} X_0^2 + \left(K X_0 - \frac{m.g}{2}\right) . X_2$$

2) A l'équilibre la dérivée de l'energie potentielle ~~A~~ s'annulle:

$$\frac{\partial U}{\partial X_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial X_2} = K . X_2 + \left(K X_0 - \frac{m.g}{2}\right) = 0$$

mais par définition $X_2 = 0 \Rightarrow K X_0 - \frac{mg}{2} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{X_0 = \frac{m.g}{2.K}}$$

Donc: $\boxed{U = \frac{1}{2} K . X_2^2 + \frac{1}{2} K X_0^2}$

3) l'energie totale E : $\boxed{E = T + U}$

T: l'energie cinetique

U: " Potentielle

E: l'energie totale

$$T = \frac{1}{2} m . V^2 = \frac{1}{2} . m . \dot{X}_2^2$$

$$E = \frac{1}{2} . m . \dot{X}_2^2 + \frac{1}{2} K X_2^2 + \frac{1}{2} K X_0^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = m \ddot{X}_2 \dot{X}_2 + K X_2 \dot{X}_2 + 0 = 0$$

$$= \dot{X}_2 (m \ddot{X}_2 + K X_2) = 0$$

$$\Rightarrow m \ddot{X}_2 + K X_2 = 0$$

$$\boxed{\ddot{X}_2 + \frac{K}{m} X_2 = 0}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

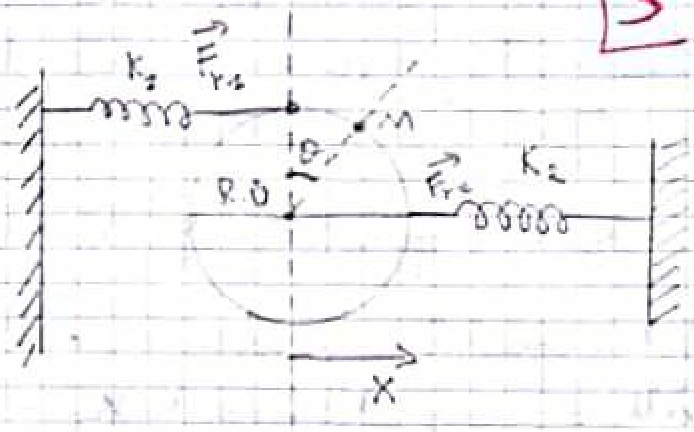
ضربنا $\dot{X}_2$ عامل مشترك

وهي السرعة وهي غير

معدومة $\boxed{V = \dot{X} \neq 0}$

FIN

Exercice 02 :



$$K_1 = \frac{K_2}{2} = K$$

$$X = R.\theta$$

$$J/_0 = \frac{1}{2} M R^2$$

- Energie cinétique :

$$T = T_M(x) + T_M(\theta)$$

$$T_M(x) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2$$

الطاقة الحركية في الكتلة

$$\dot{x} = R\dot{\theta}$$

الطاقة الكامنة في النابض

$$T_M(\theta) = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\theta}^2$$

- Energie potentielle :

$$U = U_{K_1} + U_{K_2}$$

$$U_{K_1} = \frac{1}{2} K_1 (X + R\theta)^2 = \frac{1}{2} K_1 (2R\theta)^2 = \frac{1}{2} K_1 4 R^2 \theta^2$$

$$U_{K_2} = \frac{1}{2} K_2 X^2 = \frac{1}{2} K_2 R^2 \theta^2$$

$$\Rightarrow U = 2K_1 R^2 . \theta^2 + \underbrace{\frac{1}{2} K_2}_{K} R^2 \theta^2$$

$$\Rightarrow U = 2K R^2 \theta^2 + K R^2 \theta^2 = 3 K R^2 \theta^2$$

. Le formalisme de Lagrange :

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$L = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 - 3 K R^2 \theta^2$$

2) Déduire l'éq es diff du Mvt :

La formule de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2} M R^2 \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2} M R^2 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -6 K . R^2 \theta . \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} M R^2 \ddot{\theta} + 6 K R^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{4K}{M}\theta = 0}$$ sous forme $\ddot{\theta} + w_0^2 \theta = 0$

Don $w_0^2 = \frac{4K}{M} \Rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{4K}{M}}$ pulsation propre

$$w = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4K}{M}}} = 2\pi . \sqrt{\frac{M}{4K}}$$

FIN

TD N°2

Exercice 03 :

5

- $K_{eq} = K + K + K = 3K$

Le montage des trois ressorts est équivalent à trois ressorts parallèle $K_{eq} = 3K$

2)

L'énergie potentielle $\begin{cases} \text{Ressort} \Rightarrow "X_1" \\ \text{gravitation masse à gauche} \Rightarrow "X_3" \\ \text{gravitation masse à droite} \Rightarrow "X_2" \end{cases}$

$U = U_{ressort} + U_{m\,gauche} + U_{m\,droit}$

$U_{ressort} = \frac{1}{2} K_{eq} (X_1 + X_0)^2 = \frac{3}{2}K(X_1 + X_0)^2$

$U_{m\,gauche} = m\,g\,.X_3$

$U_{m\,droit} = -mg\,X_2$

$\begin{cases} U = \frac{3}{2}K(-l\theta + X_0)^2 + 2l\theta\,mg - l\theta mg \\ \frac{3}{2}K(l^2\theta^2 + X_0^2 - 2l\theta X_0) + l\theta mg \end{cases}$

donc : $U = \underbrace{\frac{3}{2}K(X_1 + X_0)^2}_{\text{Ressort}} \underbrace{- mg\,X_2}_{m\,droite} \underbrace{+ mg\,X_3}_{m\,gauche}$

Les trois coordonnées X_1, X_2, X_3 dépendent de θ comme suit :

$\begin{cases} X_1 = -l\sin\theta = -l\theta \\ X_2 = -2l\sin\theta = -2l\theta \\ X_3 = -l\sin\theta = -l\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{U = \frac{3}{2}Kl^2\theta^2 + \frac{3}{2}KX_0^2 + (mg - 3KX_0)l\theta}$

A l'équilibre $= \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow 3Kl^2\theta + (mg - 3KX_0)l = 0$

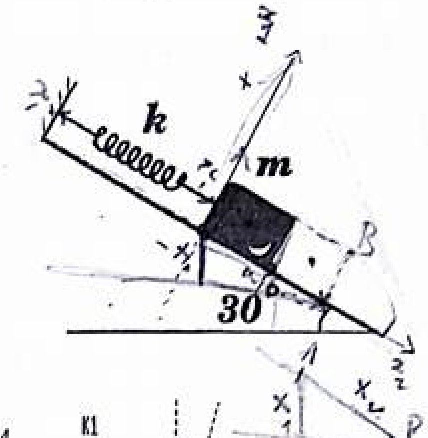
mais à l'équilibre $\theta = 0 \Rightarrow (mg - 3KX_0)l = 0 \Rightarrow X_0 = \frac{mg}{3K}$

$\frac{x_1}{x_2} = \sin \alpha$

$x_1 = -\frac{1}{2} x_2$

TD N° 2

Exercice 1 :



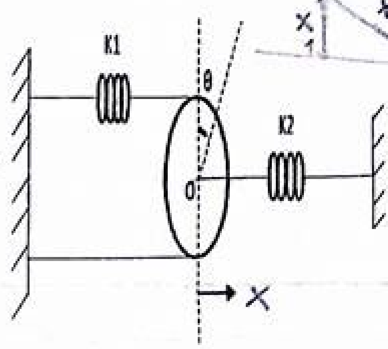
Soit le système ci-contre, La masse peut glisser sans frottement sur le plan. On abandonne le système après l'avoir écarté de la position d'équilibre.

1-Exprimer l'énergie potentielle du système U.

2- Déduire la condition d'équilibre, trouver la déformation du ressort à l'équilibre et simplifier l'expression de U.

3- Exprimer l'énergie totale du système et déduire l'équation du mouvement avec le principe de conservation de l'énergie totale.

Exercice 2 :



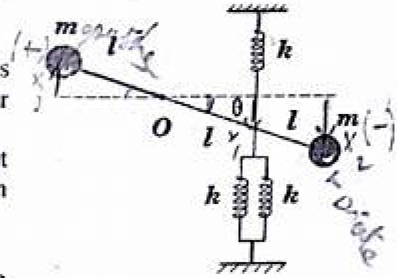
On considère le système oscillatoire mécanique. Au repos les ressorts ne sont pas déformés.

Le cylindre (de masse M de rayon R et de moment d'inertie $J = ½ MR^2$) roule sans glisser, c'est-à-dire que lorsqu'il tourne de θ, son centre de gravité se déplace de x ($x = R\theta$).

1-Déterminer le Lagrangien du système.

2-En déduire l'équation différentielle du mouvement pour les petites oscillations et la période propre des oscillations pour ; $k1 = k2/2 = k$

Exercice 3 :



Dans le système suivant, La tige et les ressorts sont de masse négligeable. La tige peut tourner sans frottement autour de l'axe passant par O.

On considère que les masses sont ponctuelles.

A l'équilibre la tige est horizontale. On abandonne le système après l'avoir écarté de l'horizontale d'un angle θ suffisamment petit pour admettre que $\sin\theta = \theta$ et $tg\, \theta = \theta$.

1-Trouver la constante du ressort équivalent au trois ressorts du système et les remplacer par ce ressort. Dans la suite, on suppose que la déformation du ressort équivalent à l'équilibre est x_0.

2-Exprimer l'énergie potentielle U du système en fonction de θ.

3- Trouver la condition que le système doit vérifier pour être à l'équilibre lorsque la tige est horizontale. Déduire la déformation initiale x_0 du ressort ensuite simplifier U.

4-Donner l'expression de l'énergie cinétique T du système et déduire le Lagrangien.

5-Trouver l'équation du mouvement en utilisant l'équation de Lagrange puis en utilisant le principe de conservation de l'énergie. Déduire la pulsation naturelle du système.