

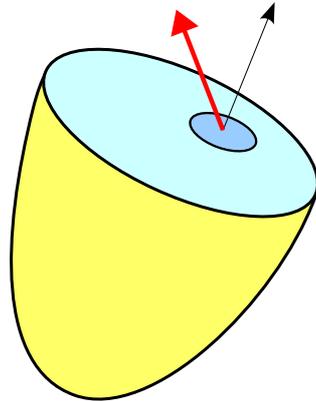
# Élasticité

Yves Debard

Institut Universitaire de Technologie du Mans  
Département Génie Mécanique et Productique

e-mail : [yves.debard@univ-lemans.fr](mailto:yves.debard@univ-lemans.fr)  
<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

*24 mars 2006 – 21 novembre 2006*





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Contraintes autour d'un point</b>	<b>1</b>
1.1	Coupure, facette et vecteur contrainte . . . . .	1
1.2	Formule de Cauchy : tenseur des contraintes . . . . .	2
1.3	Équations d'équilibre . . . . .	4
1.4	Directions et contraintes principales . . . . .	6
1.5	Cercles de Mohr des contraintes . . . . .	7
1.5.1	Cercle de Mohr des contraintes . . . . .	7
1.5.2	Cercles de Mohr des contraintes . . . . .	8
1.6	États de contraintes particuliers . . . . .	9
1.6.1	État de contrainte uniaxial : traction ou compression simple . . . . .	9
1.6.2	État de cisaillement simple . . . . .	10
1.6.3	État de contrainte isotrope . . . . .	10
1.6.4	État de contrainte plan . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Déformations</b>	<b>13</b>
2.1	Configuration, vecteur déplacement . . . . .	14
2.2	Transformation des vecteurs : tenseur gradient de la transformation . . . . .	14
2.3	Tenseur des dilatations . . . . .	15
2.4	Tenseur des déformations de Green-Lagrange . . . . .	16
2.5	Transformation des longueurs et des angles . . . . .	17
2.5.1	Dilatation . . . . .	17
2.5.2	Déformation de Green-Lagrange . . . . .	17
2.5.3	Allongement unitaire (déformation de l'ingénieur) . . . . .	17
2.5.4	Transformation des angles : glissement de deux directions orthogonales . . . . .	17
2.5.5	Transformation des volumes et des surfaces . . . . .	18
2.6	Repère principal – dilatations et déformations principales . . . . .	19
2.7	Décomposition polaire . . . . .	20
2.8	Petits déplacements et petites déformations : élasticité linéaire . . . . .	22
2.8.1	Tenseur des déformations linéarisé . . . . .	23
2.8.2	Transformation des longueurs et des angles . . . . .	23
2.8.3	Directions et valeurs principales . . . . .	24
2.8.4	Décomposition polaire . . . . .	24
2.8.5	Cercle de Mohr des déformations . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Loi de comportement ou loi constitutive</b>	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>Critères de limite élastique</b>	<b>27</b>
4.1	Problème . . . . .	27
4.2	Critère de Rankine ou de la contrainte normale maximale . . . . .	27
4.2.1	Énoncé . . . . .	27
4.2.2	Validité . . . . .	27
4.2.3	État plan de contraintes ( $\sigma_3 = 0$ ) . . . . .	28
4.3	Critère de Tresca ou du cisaillement maximal . . . . .	28
4.3.1	Énoncé . . . . .	28
4.3.2	Validité . . . . .	28
4.3.3	État plan de contraintes ( $\sigma_3 = 0$ ) . . . . .	28
4.4	Critère de Von Mises . . . . .	29
4.4.1	Énoncé . . . . .	29
4.4.2	Validité . . . . .	29
4.4.3	État plan de contraintes ( $\sigma_3 = 0$ ) . . . . .	29

<b>5</b>	<b>Problèmes particuliers d'élasticité</b>	<b>29</b>
5.1	Contraintes planes . . . . .	29
5.2	Déformations planes . . . . .	30
5.3	Problème axisymétrique . . . . .	31
5.4	Flexion des plaques . . . . .	32
5.4.1	Définitions . . . . .	32
5.4.2	Champ de déplacements : modèle de Reissner/Mindlin . . . . .	33
5.4.3	Déformations et contraintes . . . . .	33
5.4.4	Forces et moments résultants . . . . .	35
5.4.5	Énergie de déformation et énergie cinétique . . . . .	36
5.4.6	Équations d'équilibre . . . . .	36
5.4.7	Modèle de Kirchhoff . . . . .	37
5.5	Torsion d'une poutre cylindrique : théorie de Saint-Venant . . . . .	37
5.6	Contraintes dans une poutre . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Dépouillement des rosettes d'extensométrie</b>	<b>40</b>
<b>A</b>	<b>Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice symétrique à coefficients réels</b>	<b>43</b>
A.1	Définition . . . . .	43
A.2	Propriétés . . . . .	43
A.3	Décomposition spectrale . . . . .	43
A.4	Valeurs et vecteurs propres d'une matrice symétrique de dimension deux . . . . .	44
<b>B</b>	<b>Dépouillement des rosettes d'extensométrie : programme Maple</b>	<b>45</b>
	<b>Références</b>	<b>48</b>

Nous rappelons dans ce texte, les principaux résultats de la théorie de l'élasticité. Le matériau est homogène et isotrope. Son comportement est linéaire et élastique.

Le repère  $\{O; x, y, z\}$  est un repère orthonormé.  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont les vecteurs unitaires des axes.

## 1 Contraintes autour d'un point

### 1.1 Coupure, facette et vecteur contrainte

En chaque point  $M$  d'un solide, il existe des forces intérieures que l'on met en évidence en effectuant une **coupure** du solide, par une surface  $S$ , en deux parties  $A$  et  $B$  (figure 1).

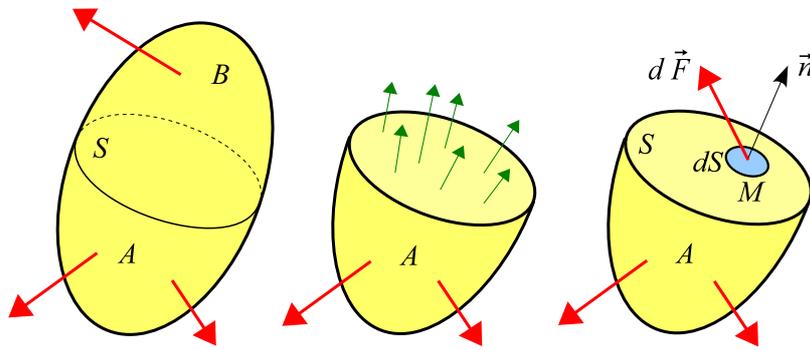


Figure 1 – Coupure et facette  $\vec{n}$  en  $M$

La partie  $A$ , par exemple, est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures réparties sur la coupure.

Considérons un point  $M$  de  $S$ . Soit  $dS$  un élément infinitésimal de la surface  $S$  entourant  $M$  et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire, perpendiculaire en  $M$  à  $S$  et dirigé vers l'extérieur de la partie  $A$ . Nous appellerons cet ensemble **facette**  $\vec{n}$  en  $M$ .

Soit  $d\vec{F}$  la force qui s'exerce sur cette facette. On appelle **vecteur contrainte sur la facette  $\vec{n}$  en  $M$** , la quantité :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS} \quad (1.1)$$

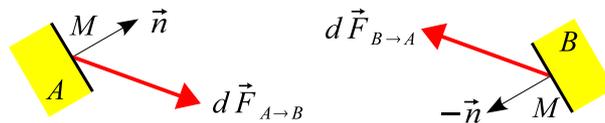


Figure 2 – Égalité de l'action et de la réaction

L'égalité de l'action et de la réaction (figure 2) s'écrit :

$$d\vec{F}_{A \rightarrow B} = -d\vec{F}_{B \rightarrow A} \quad \text{soit} \quad \vec{T}(M, -\vec{n}) dS = -\vec{T}(M, \vec{n}) dS \quad (1.2)$$

d'où

$$\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n}) \quad (1.3)$$

Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant  $\vec{n}$  et sa projection sur la facette (figure 3) :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n \quad (1.4)$$

avec

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) \quad (1.5)$$

$\sigma_n$  est la **contrainte normale** et  $\vec{\tau}_n$  est le **vecteur cisaillement** ou **contrainte tangentielle**.  $\sigma_n$  est une valeur algébrique positive (traction) ou négative (compression).

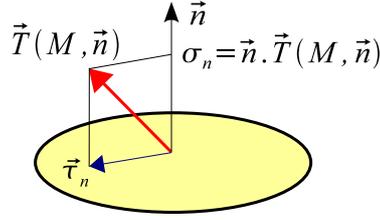


Figure 3 – Vecteur contrainte sur la facette  $\vec{n}$  en  $M$

Remarque : on a la relation (théorème de Pythagore) :

$$\|\vec{T}\|^2 = \sigma_n^2 + \|\vec{\tau}_n\|^2 \quad (1.6)$$

## 1.2 Formule de Cauchy : tenseur des contraintes

Considérons le tétraèdre infiniment petit  $MABC$  construit sur les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  (figure 4). Soient  $\vec{n}$  la normale au plan  $ABC$  dirigée vers l'extérieur du tétraèdre et  $dS$  l'aire du triangle  $ABC$ .

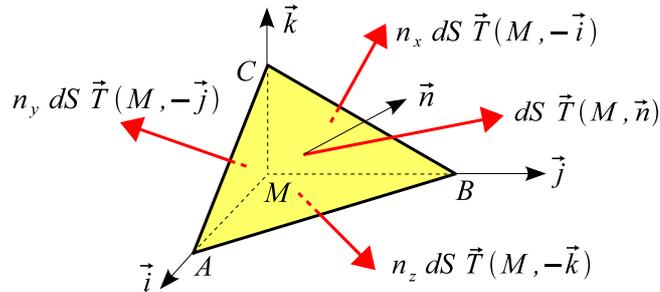


Figure 4 – Équilibre du tétraèdre (Cauchy)

On a :

$$\begin{aligned} 2 dS \vec{n} &= 2 dS n_x \vec{i} + 2 dS n_y \vec{j} + 2 dS n_z \vec{k} \\ &= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \\ &= (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) \wedge (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) = \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} \\ &= 2 \text{aire}(MBC) \vec{i} + 2 \text{aire}(MAC) \vec{j} + 2 \text{aire}(MAB) \vec{k} \end{aligned} \quad (1.7)$$

On en déduit par identification :

$$\text{aire}(MBC) = n_x dS \quad , \quad \text{aire}(MAC) = n_y dS \quad , \quad \text{aire}(MAB) = n_z dS \quad (1.8)$$

Le tétraèdre est en équilibre sous l'action des forces appliquées sur ses faces (les forces de volume sont des infiniment petits d'ordre supérieur) :

$$dS \vec{T}(M, \vec{n}) + n_x dS \vec{T}(M, -\vec{i}) + n_y dS \vec{T}(M, -\vec{j}) + n_z dS \vec{T}(M, -\vec{k}) = \vec{0} \quad (1.9)$$

Il vient après simplification :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = n_x \vec{T}(M, \vec{i}) + n_y \vec{T}(M, \vec{j}) + n_z \vec{T}(M, \vec{k}) \quad (1.10)$$

Cette équation s'écrit sous forme matricielle :

$$\{T(M, \vec{n})\} = \left[ \{T(M, \vec{i})\} \quad \{T(M, \vec{j})\} \quad \{T(M, \vec{k})\} \right] \{n\} \quad (1.11)$$

soit :

$$\{T\} = [\sigma(M)] \{n\} \quad (\text{formule de Cauchy}) \quad (1.12)$$

où  $[\sigma(M)]$  est le **tenseur des contraintes** en  $M$ .

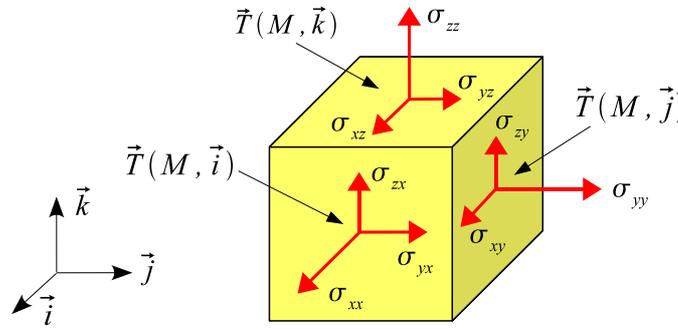


Figure 5 – Vecteur contrainte sur les facettes  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  en  $M$

Les composantes du tenseur des contraintes (figure 5) dans le repère  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  sont :

$$\text{composantes sur } \begin{cases} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} \begin{bmatrix} \vec{T}(M, \vec{i}) & \vec{T}(M, \vec{j}) & \vec{T}(M, \vec{k}) \\ \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

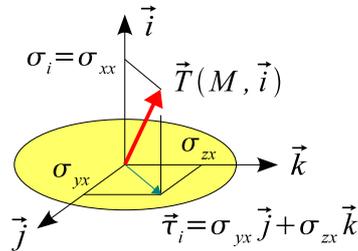


Figure 6 – Vecteur contrainte sur la facette  $\vec{i}$  en  $M$

*Remarques :*

- En fait,  $[\sigma(M)]$  est la **représentation matricielle** dans le repère  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  du tenseur des contraintes en  $M$ .

- Sur la facette  $\vec{i}$  (figure 6), la contrainte normale et le vecteur cisaillement sont :

$$\sigma_x = \vec{i} \cdot \vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx} \quad , \quad \vec{\tau}_x = \sigma_{yx} \vec{j} + \sigma_{zx} \vec{k} \quad (1.14)$$

- La contrainte normale sur la facette  $\vec{n}$  en  $M$  est égale à :

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\sigma(M)] \{n\} \quad (1.15)$$

**Changement de repère** : considérons le repère orthonormé  $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$  avec :

$$[\vec{i}' \ \vec{j}' \ \vec{k}'] = [\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}] \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{i}' \cdot \vec{i} & \vec{j}' \cdot \vec{i} & \vec{k}' \cdot \vec{i} \\ \vec{i}' \cdot \vec{j} & \vec{j}' \cdot \vec{j} & \vec{k}' \cdot \vec{j} \\ \vec{i}' \cdot \vec{k} & \vec{j}' \cdot \vec{k} & \vec{k}' \cdot \vec{k} \end{bmatrix}}_{[R]} \quad (1.16)$$

et

$$[\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}] = [\vec{i}' \ \vec{j}' \ \vec{k}'] [R]^{-1} \quad \text{avec} \quad [R]^{-1} = [R]^T \quad , \quad \det[R] = 1 \quad (1.17)$$

Soit  $\vec{V}$  un vecteur de composantes :

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} \quad \text{dans le repère} \ \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \quad (1.18)$$

et :

$$\{V'\} = \begin{Bmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{Bmatrix} \quad \text{dans le repère} \ \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\} \quad (1.19)$$

On a les relations :

$$\vec{V} = V'_x \vec{i}' + V'_y \vec{j}' + V'_z \vec{k}' = [\vec{i}' \ \vec{j}' \ \vec{k}'] \{V'\} = [\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}] [R] \{V'\} = [\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}] \{V\} \quad (1.20)$$

On en déduit :

$$\{V\} = [R] \{V'\} \quad , \quad \{V'\} = [R]^{-1} \{V\} = [R]^T \{V\} \quad (1.21)$$

De la formule de Cauchy (1.12) et des relations :

$$\{T\} = [R] \{T'\} \quad , \quad \{n\} = [R] \{n'\} \quad (1.22)$$

on déduit :

$$[R] \{T'\} = [\sigma] [R] \{n'\} \quad (1.23)$$

d'où :

$$\{T'\} = [R]^T [\sigma] [R] \{n'\} \quad (1.24)$$

et la formule de transformation pour la matrice des contraintes :

$$[\sigma'] = [R]^T [\sigma] [R] \quad (1.25)$$

### 1.3 Équations d'équilibre

Soit  $\vec{f}$  la force par unité de volume appliquée au point de coordonnées  $(x, y, z)$  du solide.

Soient  $\vec{\gamma}$  l'accélération du point de coordonnées  $(x, y, z)$  et  $\rho$  la masse volumique du matériau.

Écrivons que la projection sur  $x$  de la somme des forces appliquées au parallélépipède rectangle infiniment petit, de centre  $M$  et de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ , est nulle (les contraintes qui interviennent sont représentées sur la figure (7)) :

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_{xx}(x, y, z) dy dz + \sigma_{xx}(x + dx, y, z) dy dz \\
 & -\sigma_{xy}(x, y, z) dx dz + \sigma_{xy}(x, y + dy, z) dx dz \\
 & -\sigma_{xz}(x, y, z) dx dy + \sigma_{xz}(x, y, z + dz) dx dy + f_x dx dy dz \\
 & = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dV + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dV + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dV + f_x dV = \rho dV \gamma_x
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

où  $dV = dx dy dz$ . Il vient après simplification :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = \rho \gamma_x \tag{1.27a}$$

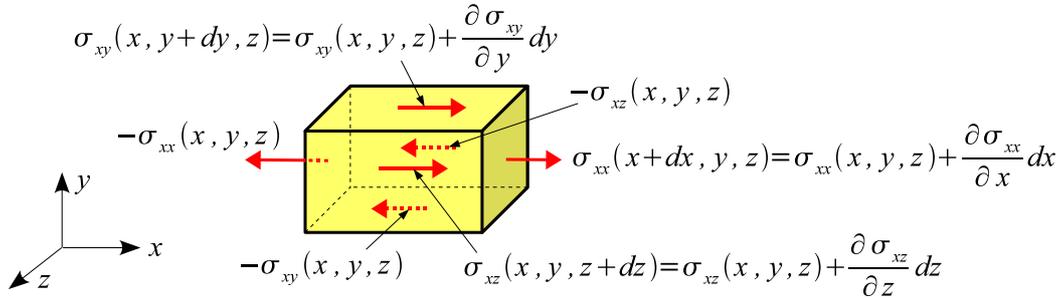


Figure 7 – Équilibre du parallélépipède suivant  $x$

De même :

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = \rho \gamma_y \tag{1.27b}$$

et

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho \gamma_z \tag{1.27c}$$

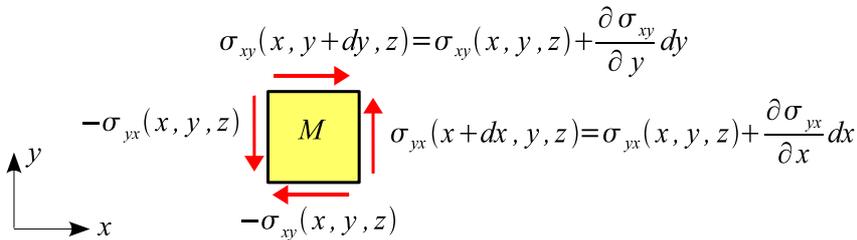


Figure 8 – Équilibre du parallélépipède en rotation suivant  $z$

Écrivons que la projection sur  $Mz$  de la somme des moments des forces appliquées au parallélépipède est nulle (les contraintes qui interviennent sont représentées sur la figure (8)). Il vient, en négligeant les infiniments petits d'ordre supérieures à 3 :

$$dx (dy dz \sigma_{yx}) - dy (dx dz \sigma_{xy}) = 0 \tag{1.28}$$

soit :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \tag{1.29}$$

De même :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad , \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad (1.30)$$

Le tenseur des contraintes est donc symétrique :

$$[\sigma] = [\sigma]^T \quad (1.31)$$

Soient  $\vec{n}_a$  et  $\vec{n}_b$  deux facettes en  $M$ . On déduit de l'équation (1.31) :

$$\vec{n}_a \cdot \vec{T}(M, \vec{n}_b) = \{n_a\}^T [\sigma(M)] \{n_b\} = \{n_b\}^T [\sigma(M)] \{n_a\} = \vec{n}_b \cdot \vec{T}(M, \vec{n}_a) \quad \forall \vec{n}_a, \vec{n}_b \quad (1.32)$$

#### 1.4 Directions et contraintes principales

Existe-t-il en  $M$  une facette  $\vec{n}$  telle que le vecteur contrainte soit colinéaire avec  $\vec{n}$  (figure 9) ? Dans ce cas, le vecteur cisaillement est nul sur cette facette et le vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  satisfait la relation :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} \quad (1.33)$$

soit :

$$[\sigma(M)]\{n\} = \sigma_n \{n\} \quad (1.34)$$

$\sigma_n$  est alors valeur propre du tenseur des contraintes et  $\vec{n}$  est le vecteur propre associé.

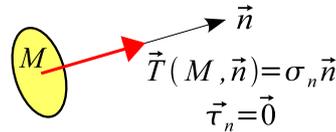


Figure 9 – Face et contrainte principale en  $M$

$[\sigma(M)]$  est une matrice symétrique à coefficients réels. Elle a trois valeurs propres réelles (distinctes ou confondues). Si les trois valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres associés sont perpendiculaires entre eux.

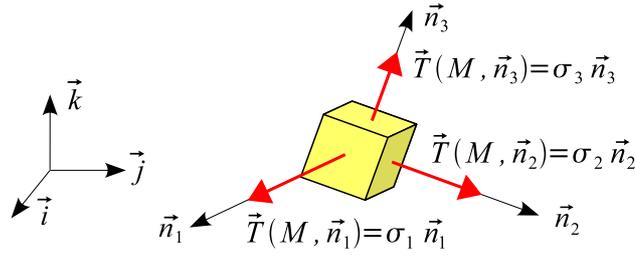
Il existe donc en  $M$  un repère orthonormé  $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$  tel que sur les facettes  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  et  $\vec{n}_3$  le vecteur cisaillement est nul (figure 10).

Les directions  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  et  $\vec{n}_3$  sont les **directions principales**.

Dans le repère principal  $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ , le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma]_{\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

où les contraintes normales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont les **contraintes principales**.

Figure 10 – Faces et contraintes principales en  $M$ 

Les trois contraintes principales sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det([\sigma(M)] - \sigma_n [I]) = 0 \quad \text{où } [I] \text{ est la matrice unité de dimension 3} \quad (1.36)$$

soit

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{bmatrix} = -\sigma_n^3 + I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n + I_3 = 0 \quad (1.37)$$

Les contraintes principales sont indépendantes du repère  $\{x, y, z\}$ .  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  sont des invariants :

$$I_1 = \text{tr}[\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (1.38a)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} ((\text{tr}[\sigma])^2 - \text{tr}[\sigma^2]) = \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{xx} \sigma_{zz} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2 \\ &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (1.38b)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \det[\sigma] = \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} + 2 \sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz} - \sigma_{xx} \sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy} \sigma_{xz}^2 - \sigma_{zz} \sigma_{xy}^2 \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (1.38c)$$

Dans le repère principal  $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ , les composantes du vecteur contrainte sur la facette  $\vec{n}$  sont :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix} \quad (1.39)$$

où  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  sont les composantes de  $\vec{n}$ . Compte-tenu de la relation :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

on en déduit :

$$\frac{T_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{T_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{T_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (1.40)$$

Quand  $\vec{n}$  varie, l'extrémité du vecteur  $\vec{T}(M, \vec{n})$  se déplace sur l'**ellipsoïde de Lamé** dont les axes sont les directions principales et les demi axes sont  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ .

## 1.5 Cercles de Mohr des contraintes

### 1.5.1 Cercle de Mohr des contraintes

En  $M$ , prenons comme repère le repère principal  $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ . Considérons la famille de facettes passant par la direction principale  $\vec{n}_3$  (figure 11). Soit  $\vec{n}(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ , une de ces facettes. Sur cette facette, les composantes du vecteur contrainte sont :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos \theta \\ \sigma_2 \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.41)$$

Le vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  est donc situé dans le plan  $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ .

Soit  $\vec{t}$  le vecteur unitaire, situé dans le plan  $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2\}$  et faisant avec  $\vec{n}$  un angle égal à  $\frac{\pi}{2}$  :

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Projetons le vecteur contrainte sur les axes  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t} \quad (1.42)$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\sigma(M)] \{n\} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \\ \tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{t\}^T [\sigma(M)] \{n\} = -\sigma_1 \cos \theta \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta \sin \theta \end{cases} \quad (1.43)$$

soit

$$\begin{cases} \sigma_n = d + r \cos(-2\theta) \\ \tau_n = r \sin(-2\theta) \end{cases} \quad \text{avec} \quad d = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad \text{et} \quad r = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1.44)$$

À chaque facette  $\vec{n}$ , nous pouvons donc associer un point dans le repère  $(\sigma_n, \tau_n)$  orthonormé. Lorsque l'angle  $\theta$  varie, ce point décrit le cercle de centre  $(d, 0)$  et de rayon  $r$  (figure 11).

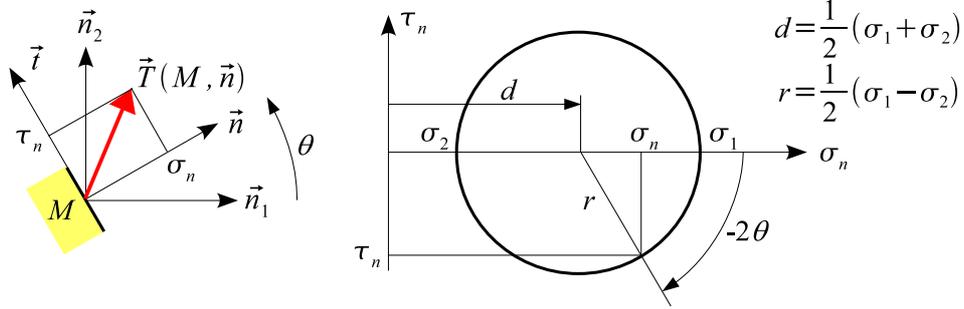


Figure 11 – Cercle de Mohr des contraintes

*Remarque* : si la facette  $\vec{n}$  fait un angle  $\theta$  avec la facette  $\vec{n}_1$ , son point représentatif sur le cercle de Mohr fait un angle  $-2\theta$  avec le point représentatif de la facette  $\vec{n}_1$ .

### 1.5.2 Cercles de Mohr des contraintes

Soit  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$  le vecteur contrainte sur la facette  $\vec{n}$  en  $M$ . Les relations :

$$\sigma_n = \{n\}^T [\sigma(M)] \{n\} \quad , \quad T^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \quad , \quad \{n\}^T \{n\} = 1 \quad (1.45)$$

où  $\tau_n = \|\vec{\tau}_n\|$  s'écrivent dans le repère principal  $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$  :

$$\begin{cases} \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \sigma_n \\ \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \quad (1.46)$$

Si les trois contraintes principales sont distinctes, on en déduit :

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ n_2^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n_3^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{cases} \quad (1.47)$$

Si on suppose  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , les inégalités :

$$n_1^2 \geq 0 \quad , \quad n_2^2 \geq 0 \quad , \quad n_3^2 \geq 0 \quad (1.48)$$

s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_n^2 + \tau_n^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)\sigma_n + \sigma_2\sigma_3 \geq 0 \\ \sigma_n^2 + \tau_n^2 - (\sigma_3 + \sigma_1)\sigma_n + \sigma_3\sigma_1 \leq 0 \\ \sigma_n^2 + \tau_n^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\sigma_n + \sigma_1\sigma_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1.49)$$

soit :

$$\begin{cases} \left( \sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_n^2 \geq \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \\ \left( \sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 + \tau_n^2 \leq \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \\ \left( \sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_n^2 \geq \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \end{cases} \quad (1.50)$$

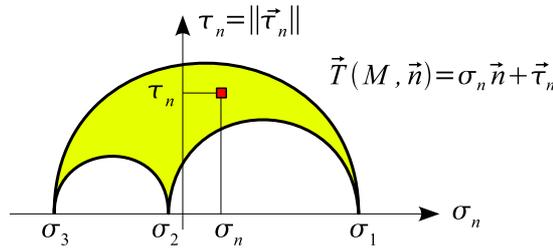


Figure 12 – Cercles de Mohr des contraintes

Le point de coordonnées  $(\sigma_n, \tau_n = \|\vec{\tau}_n\|)$  se trouve (figure 12) :

- à l'extérieur du demi-cercle de centre  $\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right)$  et de rayon  $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ .
- à l'intérieur du demi-cercle de centre  $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right)$  et de rayon  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ .
- à l'extérieur du demi-cercle de centre  $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$  et de rayon  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ .

## 1.6 États de contraintes particuliers

### 1.6.1 État de contrainte uniaxial : traction ou compression simple

L'état de contrainte en un point  $M$  est uniaxial (figure 13) s'il existe un repère  $\{M; x, y, z\}$  dans lequel le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

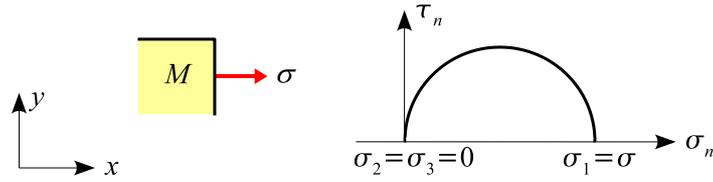


Figure 13 – État de contrainte uniaxiale

Cet état de contraintes est appelé état de traction simple si  $\sigma$  est positif et état de compression simple si  $\sigma$  est négatif.

Le repère  $\{M; x, y, z\}$  est le repère principal.

### 1.6.2 État de cisaillement simple

L'état de contraintes en  $M$  est un état de cisaillement simple par rapport aux deux directions  $x$  et  $y$  (figure 14), si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

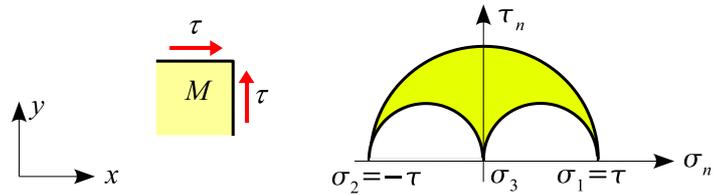


Figure 14 – État de cisaillement simple

Les contraintes principales et les directions principales sont :

$$\sigma_1 = \tau \quad , \quad \sigma_2 = -\tau \quad , \quad \sigma_3 = 0 \quad (1.53)$$

$$\{n_1\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_2\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.54)$$

### 1.6.3 État de contrainte isotrope

L'état de contraintes en un point  $M$  est isotrope si :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} \quad \forall \vec{n} \quad (1.55)$$

Les trois contraintes principales sont alors égales à  $\sigma$  et le tenseur des contraintes en  $M$  a pour expression (quelque soit le repère) :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

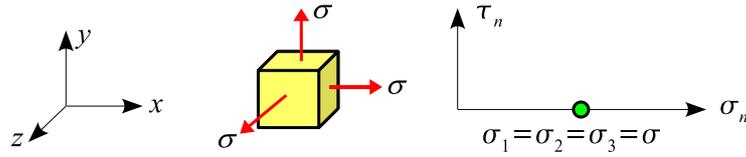


Figure 15 – État de contrainte isotrope

Toute facette  $\vec{n}$  en  $M$  est face principale : les trois cercles de Mohr des contraintes se réduisent à un point (figure 15).

#### 1.6.4 État de contrainte plan

En un point  $M$ , l'état de contrainte est dit plan s'il existe un repère orthonormé  $\{M; x, y, z\}$  tel que le tenseur des contraintes soit de la forme (figure 16) :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

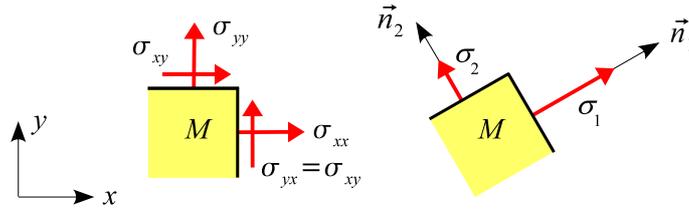


Figure 16 – État de contrainte plan : composantes du tenseur des contraintes

La direction  $\vec{k}$  est direction principale et la contrainte principale associée est nulle :

$$\sigma_3 = 0 \quad , \quad \vec{n}_3 = \vec{k} \quad (1.58)$$

Les deux autres directions principales sont les solutions de l'équation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \sigma_n \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad n_x^2 + n_y^2 = 1 \quad (1.59)$$

soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.60)$$

Cette équation n'a de solution autre que la solution triviale  $n_x = n_y = 0$  que si et seulement si :

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n \end{bmatrix} = 0 \quad (1.61)$$

d'où le polynôme caractéristique :

$$\sigma_n^2 - \underbrace{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}_{\text{tr}[\sigma] = \sigma_1 + \sigma_2} \sigma_n + \underbrace{(\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2)}_{\det[\sigma] = \sigma_1\sigma_2} = 0 \quad (1.62)$$

les contraintes principales :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (1.63)$$

et les directions principales associées :

$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{n_2\} = \begin{Bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \tan \theta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} \quad (1.64)$$

Les cercles de Mohr des contraintes sont représentés sur la figure 17.

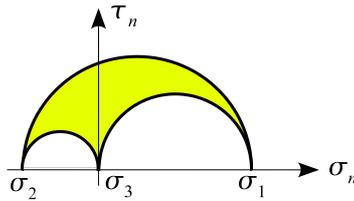


Figure 17 – État de contrainte plan : cercles de Mohr des contraintes

**Construction du cercle de Mohr de la famille de facettes passant par  $z$  :** les facettes  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont deux facettes perpendiculaires entre elles de cette famille de facettes. Les points représentatifs de ces facettes dans le plan de Mohr sont deux points diamétralement opposés du cercle. Les coordonnées de ces points sont (figure (18)) :

– facette  $\vec{i}$  :  $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx}$  ,  $\tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xy}$

– facette  $\vec{j}$  :  $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{j}) = \sigma_{yy}$  ,  $\tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{j}) = -\sigma_{xy}$

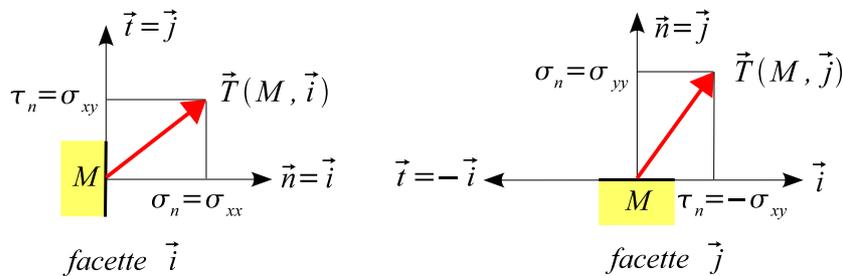


Figure 18 – État de contrainte plan : facettes  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$

On en déduit la construction géométrique du cercle de Mohr (figure (19)). On mesure à l'aide d'une règle les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , puis à l'aide d'un rapporteur l'angle  $2\theta_1$ .

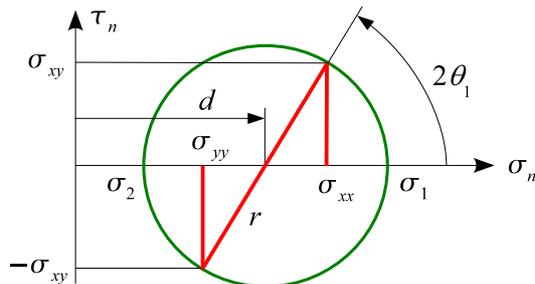


Figure 19 – Cercle de Mohr

**Changement de repère** : dans le repère orthonormé  $\{M; \vec{n}, \vec{t}, \vec{k}\}$  (figure 20) avec :

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{t\} = \begin{Bmatrix} -n_y \\ n_x \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.65)$$

le tenseur des contraintes a pour expression (équation 1.25) :

$$[\sigma]_{\{M; \vec{n}, \vec{t}, \vec{k}\}} = [R]^T [\sigma]_{\{M; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}} [R] \quad (1.66)$$

où la matrice de transformation  $[R]$  est égale à :

$$[R] = [\{n\} \quad \{t\} \quad \{0\}] = \begin{bmatrix} n_x & -n_y & 0 \\ n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

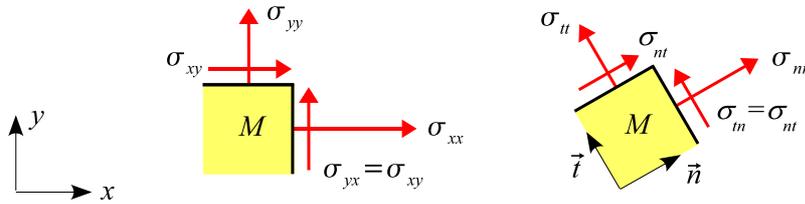


Figure 20 – Composantes du tenseur des contraintes dans le repère  $\{M; \vec{n}, \vec{t}, \vec{k}\}$

On en déduit :

$$[\sigma]_{\{M; \vec{n}, \vec{t}, \vec{k}\}} = \begin{bmatrix} \sigma_{nn} & \sigma_{nt} & 0 \\ \sigma_{nt} & \sigma_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

avec :

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= n_x^2 \sigma_{xx} + n_y^2 \sigma_{yy} + 2 n_x n_y \sigma_{xy}, & \sigma_{tt} &= n_y^2 \sigma_{xx} + n_x^2 \sigma_{yy} - 2 n_x n_y \sigma_{xy} \\ \sigma_{nt} &= n_x n_y (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) + (n_x^2 - n_y^2) \sigma_{xy} \end{aligned}$$

*Remarque* : on a les relations :

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\sigma(M)] \{n\} \\ \sigma_{nt} &= \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{t\}^T [\sigma(M)] \{n\} = \{n\}^T [\sigma(M)] \{t\} \\ \sigma_{tt} &= \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{t}) = \{t\}^T [\sigma(M)] \{t\} \end{aligned}$$

## 2 Déformations

Sous l'action des forces appliquées, les points du solide se déplacent. Il en résulte, pour des fibres infinitésimales de matière, des **variations de longueur** et des **variations d'angle** appelées **déformations**.

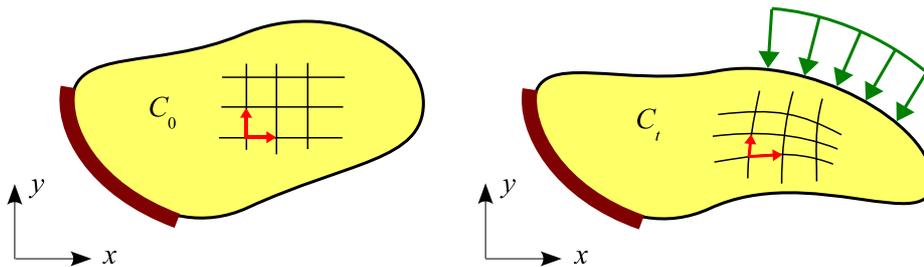


Figure 21 – Déformations dans un solide

## 2.1 Configuration, vecteur déplacement

Le volume occupé par le solide à l'instant  $t$  est noté  $C_t$  et appelé **configuration courante**. La **configuration initiale**  $C_0$  est la configuration de référence.

Le point  $M_0$  de la configuration initiale devient le point  $M$  de la configuration courante (figure 22) :

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{x}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} \quad , \quad \overrightarrow{OM} = \vec{x} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (2.1)$$

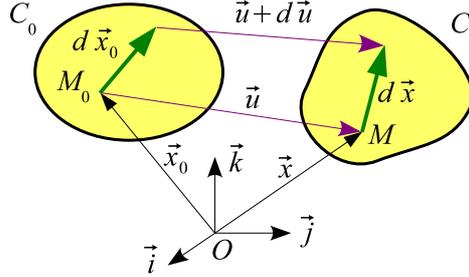


Figure 22 – Transformation d'un point et d'un vecteur

On appelle **vecteur déplacement** du point  $M_0$  le vecteur :

$$\vec{u}(M_0; t) = \overrightarrow{M_0 M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} \quad (2.2)$$

Les coordonnées du point  $M$  s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(x_0, y_0, z_0; t) \\ v(x_0, y_0, z_0; t) \\ w(x_0, y_0, z_0; t) \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

où  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont des fonctions continues et dérivables de  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$ .

$x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$  sont les **coordonnées de Lagrange** et la description est dite lagrangienne.

L'équation (2.3) définit la **transformation** qui fait passer le solide de la configuration initiale  $C_0$  à la configuration  $C_t$ .

## 2.2 Transformation des vecteurs : tenseur gradient de la transformation

Le vecteur infinitésimal  $d\vec{x}_0$  en  $M_0$  devient  $d\vec{x}$  en  $M$  dans la configuration  $C_t$  :

$$d\vec{x} = d\vec{x}_0 + d\vec{u} \quad (2.4)$$

soit sous forme matricielle :

$$\{dx\} = \{dx_0\} + \{du\} = ([I] + [L]) \{dx_0\} = [F] \{dx_0\} \quad (2.5)$$

où :

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$[F]$  est le **tenseur gradient de la transformation** (ou **tenseur gradient de la déformation**).

Nous admettrons que la transformation est biunivoque :

$$0 < \det[F] < \infty \quad , \quad \{dx_0\} = [F]^{-1} \{dx\} \quad (2.7)$$

Deux points voisins dans la configuration  $C_0$  sont voisins dans la configuration  $C_t$ .

*Remarque* : la figure (23) montre, dans le cas d'un problème plan, la signification physique des composantes du tenseur gradient de la transformation.

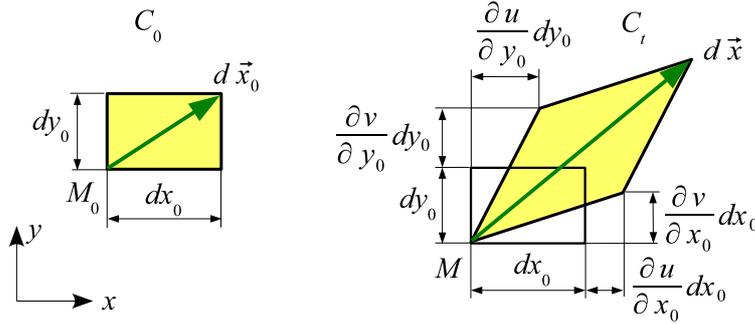


Figure 23 – Problème plan : transformation d'un vecteur

$[L]$  peut être décomposé en sa partie symétrique  $[\varepsilon]$  et sa partie antisymétrique  $[\Omega]$  :

$$[L] = [\Omega] + [\varepsilon] \quad (2.8)$$

avec :

$$[\Omega] = \frac{1}{2} ([L] - [L]^T) \quad , \quad [\Omega] = -[\Omega]^T \quad (2.9)$$

et

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} ([L] + [L]^T) \quad , \quad [\varepsilon] = [\varepsilon]^T \quad (2.10)$$

On en déduit :

$$[F] = [I] + [\varepsilon] + [\Omega] \quad (2.11)$$

### 2.3 Tenseur des dilatations

Considérons en  $M_0$  deux vecteurs infiniment petits  $d\vec{x}_0$  et  $d\vec{x}'_0$  (figure 24). Ces vecteurs deviennent  $d\vec{x}$  et  $d\vec{x}'$  dans la configuration  $C_t$  :

$$\{dx\} = [F] \{dx_0\} \quad , \quad \{dx'\} = [F] \{dx'_0\} \quad (2.12)$$

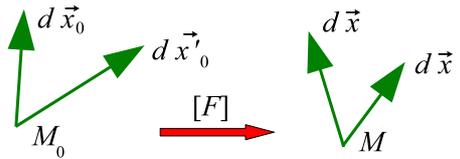


Figure 24 – Transformation des vecteurs  $d\vec{x}_0$  et  $d\vec{x}'_0$

Le produit scalaire des deux vecteurs  $d\vec{x}$  et  $d\vec{x}'$  s'écrit :

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = \{dx\}^T \{dx'\} = \{dx_0\}^T [F]^T [F] \{dx'_0\} = \{dx_0\}^T [C] \{dx'_0\} \quad (2.13)$$

où

$$[C] = [F]^T [F] = ([I] + [L]^T) ([I] + [L]) = [I] + [L]^T + [L] + [L]^T [L] \quad (2.14)$$

est le **tenseur des dilatations**.

Si  $d\vec{x}'_0 = d\vec{x}_0$ , il vient :

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \{dx_0\}^T [C] \{dx_0\} > 0 \quad \forall d\vec{x}_0 \neq \vec{0} \quad (2.15)$$

où  $ds$  est la longueur du vecteur  $d\vec{x}$ . La matrice  $[C]$  est définie positive.

## 2.4 Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Soit  $ds_0$  la longueur du vecteur  $d\vec{x}_0$ . La différence  $ds^2 - ds_0^2$  s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= d\vec{x} \cdot d\vec{x} - d\vec{x}_0 \cdot d\vec{x}_0 \\ &= \{dx\}^T \{dx\} - \{dx_0\}^T \{dx_0\} = \{dx_0\}^T ([C] - [I]) \{dx_0\} \\ &= 2 \{dx_0\}^T [E] \{dx_0\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

où :

$$[E] = \frac{1}{2} ([C] - [I]) = \underbrace{\frac{1}{2} ([L]^T + [L])}_{\text{termes linéaires}} + \underbrace{\frac{1}{2} [L]^T [L]}_{\text{termes non linéaires}} \quad (2.17)$$

est le **tenseur des déformations de Green-Lagrange**.

Si  $[E] = [0]$ , la longueur de tous les vecteurs  $d\vec{x}_0$  en  $M_0$  ne varie pas au cours de la transformation : le voisinage du point  $M_0$  subit un **mouvement de corps rigide** entre les configurations  $C_0$  et  $C_t$  :

$$[C] = [F]^T [F] = [I] \quad \text{d'où} \quad [F]^T = [F]^{-1} \quad (2.18)$$

Dans le repère  $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , les composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange sont :

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ & E_{yy} & E_{yz} \\ \text{sym.} & & E_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

avec (« notation de Voigt ») :

$$\begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ E_{xy} = E_{yx} \\ E_{xz} = E_{zx} \\ E_{yz} = E_{zy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} \\ \frac{\partial v}{\partial y_0} \\ \frac{\partial w}{\partial z_0} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \right) \end{bmatrix}}_{\text{termes linéaires}} + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x_0} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y_0} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial z_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z_0} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \frac{\partial v}{\partial y_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \frac{\partial w}{\partial y_0} \\ \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \frac{\partial w}{\partial z_0} \\ \frac{\partial u}{\partial y_0} \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0} \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix}}_{\text{termes non linéaires}} \quad (2.20)$$

*Remarque* : le tenseur des dilatations s'écrit en fonction du tenseur des déformations :

$$[C] = [I] + 2[E] \quad (2.21)$$

## 2.5 Transformation des longueurs et des angles

### 2.5.1 Dilatation

Considérons en  $M_0$  le vecteur infiniment petit  $d\vec{x}_0$  de longueur  $ds_0$  porté par le vecteur unitaire  $\vec{n}_0$  :

$$d\vec{x}_0 = ds_0 \vec{n}_0 \quad (2.22)$$

Ce vecteur devient  $d\vec{x}$  de longueur  $ds$  dans la configuration  $C_t$  (figure 25).

On appelle dilatation en  $M_0$  dans la direction  $\vec{n}_0$  la quantité :

$$\lambda(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds}{ds_0} = \sqrt{\{n_0\}^T [C] \{n_0\}} = \sqrt{2 \{n_0\}^T [E] \{n_0\} + 1} \quad (2.23)$$

Remarque : si  $\vec{n}_0 = \vec{i}$ , il vient :

$$\lambda(M_0, \vec{i}) = \sqrt{C_{xx}} = \sqrt{2 E_{xx} + 1} \quad (2.24)$$

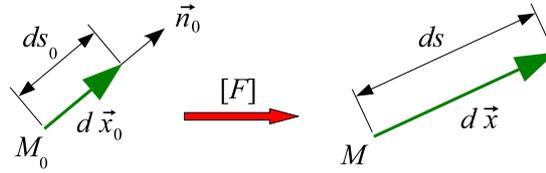


Figure 25 – Dilatation en  $M_0$  dans la direction  $\vec{n}_0$

### 2.5.2 Déformation de Green-Lagrange

On appelle déformation de Green-Lagrange en  $M_0$  dans la direction  $\vec{n}_0$  la quantité :

$$\varepsilon_{GL}(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2 ds_0^2} = \{n_0\}^T [E] \{n_0\} \quad (2.25)$$

Remarque : si  $\vec{n}_0 = \vec{i}$ , il vient :

$$\varepsilon_{GL}(M_0, \vec{i}) = E_{xx} \quad (2.26)$$

### 2.5.3 Allongement unitaire (déformation de l'ingénieur)

On appelle allongement unitaire en  $M_0$  dans la direction  $\vec{n}_0$  la quantité :

$$\varepsilon(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \lambda(M_0, \vec{n}_0) - 1 \quad (2.27)$$

Remarque : si  $\vec{n}_0 = \vec{i}$ , on obtient :

$$\varepsilon(M_0, \vec{i}) = \sqrt{C_{xx}} - 1 = \sqrt{2 E_{xx} + 1} - 1 \quad (2.28)$$

### 2.5.4 Transformation des angles : glissement de deux directions orthogonales

Considérons en  $M_0$  deux vecteurs infiniment petits  $d\vec{x}_0$  et  $d\vec{x}'_0$  portés par les deux directions orthogonales  $\vec{n}_0$  et  $\vec{n}'_0$  (figure 26) :

$$d\vec{x}_0 = ds_0 \vec{n}_0 \quad , \quad d\vec{x}'_0 = ds'_0 \vec{n}'_0 \quad , \quad \vec{n}_0 \cdot \vec{n}'_0 = 0 \quad (2.29)$$

Ces vecteurs deviennent  $d\vec{x}$  et  $d\vec{x}'$  de longueur  $ds$  et  $ds'$  dans la configuration  $C_t$ . Soit  $\varphi$  l'angle que font entre eux les vecteurs  $d\vec{x}$  et  $d\vec{x}'$ .

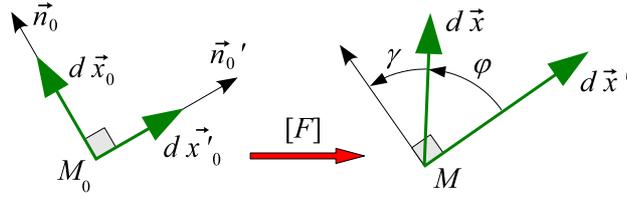


Figure 26 – Glissement en  $M_0$  dans les directions orthogonales  $\vec{n}_0$  et  $\vec{n}'_0$

On appelle glissement en  $M_0$  dans les directions orthogonales  $\vec{n}_0$  et  $\vec{n}'_0$  la quantité :

$$\gamma(M_0, \vec{n}_0, \vec{n}'_0) = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (2.30)$$

Le produit scalaire des deux vecteurs  $d\vec{x}$  et  $d\vec{x}'$  s'écrit (équation 2.13) :

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = ds_0 ds'_0 \{n_0\}^T [C] \{n'_0\} = ds ds' \cos \varphi = ds ds' \cos \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right) = ds ds' \sin \gamma \quad (2.31)$$

d'où l'expression du glissement en  $M_0$  des deux directions orthogonales  $\vec{n}_0$  et  $\vec{n}'_0$  :

$$\gamma(M_0, \vec{n}_0, \vec{n}'_0) = \arcsin \frac{\{n_0\}^T [C] \{n'_0\}}{\lambda(M_0, \vec{n}_0) \lambda(M_0, \vec{n}'_0)} = \arcsin \frac{2 \{n_0\}^T [E] \{n'_0\}}{\lambda(M_0, \vec{n}_0) \lambda(M_0, \vec{n}'_0)} \quad (2.32)$$

Remarque : si  $\vec{n}_0 = \vec{i}$  et  $\vec{n}'_0 = \vec{j}$ , il vient :

$$\gamma(M_0, \vec{i}, \vec{j}) = \arcsin \frac{2 E_{xy}}{\sqrt{2 E_{xx} + 1} \sqrt{2 E_{yy} + 1}} \quad (2.33)$$

### 2.5.5 Transformation des volumes et des surfaces

Le parallélépipède de volume infiniment petit  $dV_0$  construit en  $M_0$  sur les vecteurs  $\vec{a}_0$ ,  $\vec{b}_0$  et  $\vec{c}_0$  devient le parallélépipède de volume  $dV$  construit en  $M$  sur les vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  (figure 27).

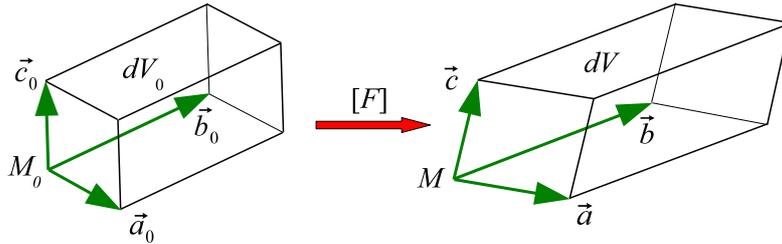


Figure 27 – Transformation d'un volume infinitésimal

On a les relations :

$$dV_0 = (\vec{a}_0 \wedge \vec{b}_0) \cdot \vec{c}_0 = \det [\{a_0\} \{b_0\} \{c_0\}] \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} dV &= (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det [\{a\} \{b\} \{c\}] \\ &= \det ([F] [\{a_0\} \{b_0\} \{c_0\}]) = \det[F] \det [\{a_0\} \{b_0\} \{c_0\}] \end{aligned} \quad (2.35)$$

d'où :

$$dV = \det[F] dV_0 \quad (2.36)$$

On appelle **déformation volumique** en  $M_0$ , la quantité :

$$\varepsilon_V(M_0) = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \det[F] - 1 \quad (2.37)$$

La surface  $dA_0$  construite sur les vecteurs  $\vec{a}_0$  et  $\vec{b}_0$  devient la surface  $dA$  construite sur les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  (figure 28). Des relations :

$$\vec{a}_0 \wedge \vec{b}_0 = \vec{n}_0 dA_0 \quad , \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{n} dA \quad (2.38)$$

où les vecteurs  $\vec{n}_0$  et  $\vec{n}$  sont unitaires, on déduit :

$$dV_0 = \vec{c}_0 \cdot \vec{n}_0 dA_0 = \{c_0\}^T \{n_0\} dA_0 \quad , \quad dV = \vec{c} \cdot \vec{n} dA = \{c\}^T \{n\} dA \quad (2.39)$$

d'où :

$$dV = \{c_0\}^T [F]^T \{n\} dA = \det[F] dV_0 = \det[F] \{c_0\}^T \{n_0\} dA_0 \quad (2.40)$$

Cette relation est vérifiée pour tout vecteur  $\vec{c}_0$ , d'où :

$$[F]^T \{n\} dA = \det[F] \{n_0\} dA_0 \quad (2.41)$$

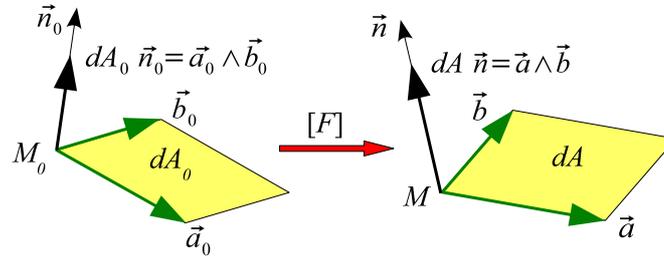


Figure 28 – Transformation d'une surface infinitésimale

On en déduit :

$$\{n\} dA = \det[F] [F]^{-T} \{n_0\} dA_0 \quad , \quad [F]^{-T} = ([F]^{-1})^T = ([F]^T)^{-1} \quad (2.42)$$

## 2.6 Repère principal – dilatations et déformations principales

La matrice  $[C]$  est symétrique, à coefficients réels et définie positive (équation 2.15). Ses valeurs propres (ou valeurs principales) sont positives. Il existe en  $M_0$  un repère orthonormé (ou repère principal)  $\{M_0; \vec{n}_{01}, \vec{n}_{02}, \vec{n}_{03}\}$  tel que :

$$[C] \{n_{0i}\} = \lambda_i^2 \{n_{0i}\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.43)$$

où  $\lambda_i$  est la dilatation en  $M_0$  dans la direction  $\vec{n}_{0i}$ .

Deux vecteurs  $d\vec{x}_0$  et  $\delta\vec{x}_0$  orthogonaux en  $M_0$  sont transformés en deux vecteurs  $d\vec{x}$  et  $\delta\vec{x}$  orthogonaux en  $M$  (équation 2.32).

Le tenseur des déformations  $[E]$  a les mêmes directions principales que  $[C]$ . En effet, des équations (2.21) et (2.43) on déduit :

$$([I] + 2[E]) \{n_{0i}\} = \lambda_i^2 \{n_{0i}\} \quad (2.44)$$

d'où :

$$[E] \{n_{0i}\} = E_i \{n_{0i}\} \quad \text{avec} \quad E_i = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1) \quad (2.45)$$

Soit  $\{dx_0\}$  un vecteur infiniment petit porté par la direction principale  $\{n_{0i}\}$  :

$$[C] \{dx_0\} = [F]^T [F] \{dx_0\} = \lambda_i^2 \{dx_0\} \quad (2.46)$$

On en déduit :

$$[F]^T \{dx\} = \lambda_i^2 \{dx_0\} \quad (2.47)$$

où  $\{dx\} = [F]\{dx_0\}$ , puis en multipliant les deux membres de cette équation par  $[F]$  :

$$[F][F]^T \{dx\} = \lambda_i^2 [F]\{dx_0\} = \lambda_i^2 \{dx\} \quad (2.48)$$

et :

$$[F][F]^T \{n_i\} = \lambda_i^2 \{n_i\} \quad (2.49)$$

où  $\{n_i\}$  est le vecteur unitaire porté par le vecteur  $\{dx\}$  :

$$\{n_i\} = \frac{1}{\lambda_i} [F] \{n_{0i}\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.50)$$

Le repère  $\{M_0; \vec{n}_{01}, \vec{n}_{02}, \vec{n}_{03}\}$  est le repère principal de la transformation en  $M_0$ . Le repère  $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$  est le repère principal de la transformation en  $M$ .

**Transformation d'une sphère** : l'extrémité du vecteur  $d\vec{x}_0$  en  $M_0$  décrit la sphère infiniment petite de rayon  $dr_0$  :

$$\{dx_0\}^T \{dx_0\} = dr_0^2 \quad (2.51)$$

$d\vec{x}_0$  devient  $d\vec{x}$  en  $M$ . L'extrémité du vecteur  $d\vec{x}$  décrit la surface d'équation :

$$\{dx\}^T [F]^{-T} [F]^{-1} \{dx\} = \{dx\}^T ([F][F]^T)^{-1} \{dx\} = dr_0^2 \quad (2.52)$$

Si on prend comme repère en  $M$ , le repère principal du tenseur  $[F][F]^T$  (équation 2.49), cette équation s'écrit :

$$\left( \frac{dx}{\lambda_1 dr_0} \right)^2 + \left( \frac{dy}{\lambda_2 dr_0} \right)^2 + \left( \frac{dz}{\lambda_3 dr_0} \right)^2 = 1 \quad (2.53)$$

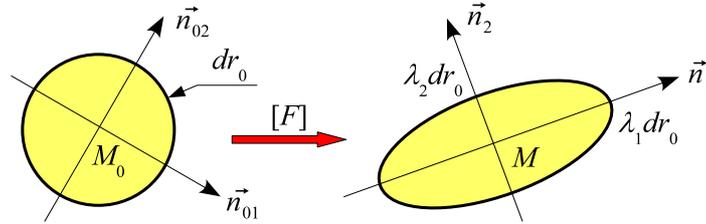


Figure 29 – Transformation d'un cercle : ellipse des dilatations (problème plan)

La sphère de rayon  $dr_0$  en  $M_0$  devient en  $M$  l'ellipsoïde dont les axes sont les transformés des directions principales de  $[C]$  et les demi-axes sont  $\lambda_1 dr_0$ ,  $\lambda_2 dr_0$  et  $\lambda_3 dr_0$  (figure 29).

## 2.7 Décomposition polaire

Le déterminant de  $[F]$  étant différent de 0,  $[F]$  peut être décomposé de façon unique sous les deux formes :

$$[F] = [R][U] = [V][R] \quad (2.54)$$

où :

–  $[R]$  est une matrice orthonormale :

$$[R]^T [R] = [R][R]^T = [I] \quad , \quad \det[R] = 1 \quad (2.55)$$

et représente un **mouvement de corps rigide** (rotation).

- $[U]$  et  $[V]$  sont deux matrices symétriques définies positives et représentent un **mouvement de déformation pure**.

*Remarque* : les matrices  $[U]$  et  $[V]$  sont liées par les relations :

$$[V] = [R][U][R]^T \quad , \quad [U] = [R]^T[V][R] \quad (2.56)$$

De la relation  $[C] = [F]^T[F]$  on déduit :

$$[C] = [U]^2 \quad (2.57)$$

La matrice des dilatations  $[C]$  et la matrice  $[U]$  ont les mêmes directions principales  $\{n_{0i}\}$ . Les valeurs principales de  $[U]$  sont les dilatations principales  $\lambda_i$  :

$$[U] \{n_i\} = \lambda_i \{n_{0i}\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.58)$$

On en déduit l'expression de  $[U]$  (décomposition spectrale) :

$$[U] = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \{n_{0i}\} \{n_{0i}\}^T \quad , \quad \sum_{i=1}^3 \{n_{0i}\} \{n_{0i}\}^T = [I] \quad (2.59)$$

La matrice de rotation s'écrit :

$$[R] = [F][U]^{-1} \quad (2.60)$$

De même, de l'équation (2.49) et de la relation :

$$[F][F]^T = [V]^2 \quad (2.61)$$

on déduit :

$$[V] \{n_i\} = \lambda_i \{n_i\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.62)$$

et

$$[V] = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \{n_i\} \{n_i\}^T \quad , \quad \sum_{i=1}^3 \{n_i\} \{n_i\}^T = [I] \quad (2.63)$$

Les vecteurs unitaires  $\{n_{0i}\}$  et  $\{n_i\}$  sont liés par la relation :

$$\{n_i\} = [R] \{n_{0i}\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.64)$$

La figure (30) montre la transformation par  $[F]$ ,  $[U]$ ,  $[V]$  et  $[R]$  d'un cercle infiniment petit de centre  $M_0$ , de rayon  $dr_0$  et situé dans le plan  $\{M_0; \vec{n}_{01}, \vec{n}_{02}\}$ .

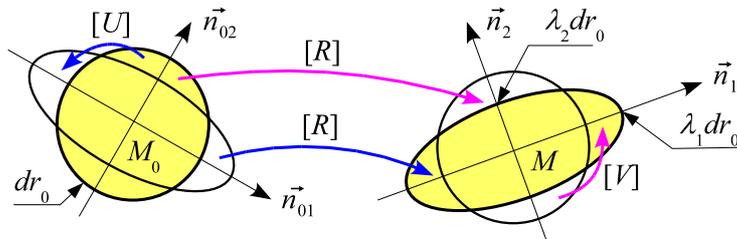


Figure 30 – Décomposition polaire : transformation d'un cercle (problème plan)

La figure (31) montre la transformation par  $[F]$ ,  $[U]$ ,  $[V]$  et  $[R]$  d'un rectangle infiniment petit construit sur les directions principales  $\vec{n}_{01}$  et  $\vec{n}_{02}$  de la déformation en  $M_0$ .

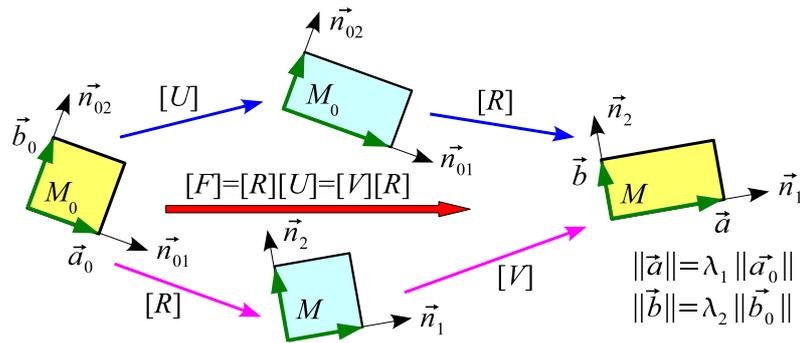


Figure 31 – Décomposition polaire : transformation de deux vecteurs orthogonaux portés par les directions principales (problème plan)

Remarque : si les côtés du rectangle ne sont pas deux directions principales du tenseur  $[C]$  en  $M_0$ , les arêtes du rectangle subissent une rotation lors de la transformation  $[U]$  ou  $[V]$  (figure 32).

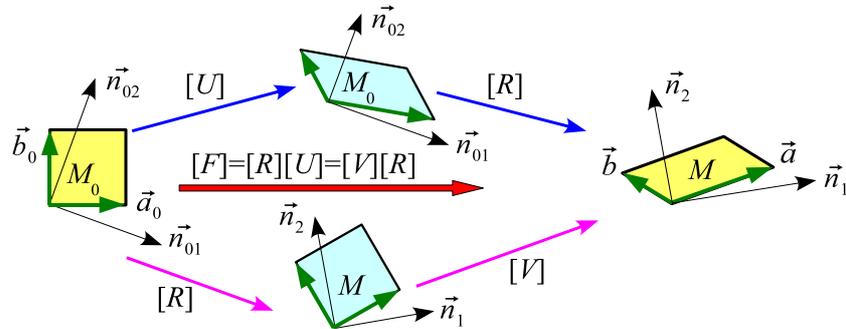


Figure 32 – Décomposition polaire : transformation de deux vecteurs orthogonaux (problème plan)

## 2.8 Petits déplacements et petites déformations : élasticité linéaire

On admettra les hypothèses suivantes :

- Les déplacements sont petits par rapport aux dimensions du solide.
- Les dérivées des déplacements par rapport à  $x_0, y_0, z_0$  sont petites devant l'unité :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_0} \right| \ll 1 \quad , \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y_0} \right| \ll 1 \quad \dots \quad (2.65)$$

Si  $f$  une fonction de  $x_0, y_0, z_0$ , on en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x_0} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x_0} \simeq \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.66)$$

De même :

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} \simeq \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z_0} \simeq \frac{\partial f}{\partial z} \quad (2.67)$$

Rappels : si  $x$  et  $y$  sont petits devant l'unité ( $|x| \ll 1$ ,  $|y| \ll 1$ ), on a les relations :

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} \quad , \quad \frac{1}{1+x} \simeq 1 - x \quad , \quad (1+x)(1+y) \simeq 1 + x + y \quad , \quad \sin x \simeq x \quad (2.68)$$

### 2.8.1 Tenseur des déformations linéarisé

Le tenseur des déformations (équation 2.17) se réduit à :

$$[E] \simeq \frac{1}{2} ([L]^T + [L]) = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \text{sym.} & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \text{sym.} & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

où :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} & , & \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} & , & \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & , & 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & , & 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (2.70)$$

Le tenseur  $[\varepsilon]$  est appelé **tenseur des déformations linéarisé**.

Le tenseur des dilatations (équation 2.21) se réduit à :

$$[C] \simeq [I] + 2[\varepsilon] \quad (2.71)$$

### 2.8.2 Transformation des longueurs et des angles

La **dilatation**  $\lambda(M, \vec{n})$  et l'**allongement unitaire**  $\varepsilon(M, \vec{n})$  en  $M$  dans la direction  $\vec{n}$  (équations 2.23 et 2.27) s'écrivent :

$$\lambda(M, \vec{n}) \simeq 1 + \{n\}^T [\varepsilon] \{n\} \quad (2.72)$$

$$\varepsilon(M, \vec{n}) \simeq \{n\}^T [\varepsilon] \{n\} \quad (2.73)$$

Si  $\vec{n}$  est l'un des axes  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  ou  $\vec{k}$ , on obtient :

$$\varepsilon(M, \vec{i}) = \varepsilon_{xx} \quad , \quad \varepsilon(M, \vec{j}) = \varepsilon_{yy} \quad , \quad \varepsilon(M, \vec{k}) = \varepsilon_{zz} \quad (2.74)$$

*Remarque :*

$$\varepsilon_{GL}(M, \vec{n}) \simeq \varepsilon(M, \vec{n}) \quad (2.75)$$

Le **glissement** en  $M$  dans les **directions orthogonales**  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  (équation 2.32) s'écrit :

$$\gamma(M, \vec{n}, \vec{n}') = 2 \{n'\}^T [\varepsilon] \{n\} \quad (2.76)$$

Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont l'un des axes  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  ou  $\vec{k}$ , on obtient :

$$\gamma(M, \vec{i}, \vec{j}) = \gamma_{xy} \quad , \quad \gamma(M, \vec{i}, \vec{k}) = \gamma_{xz} \quad , \quad \gamma(M, \vec{j}, \vec{k}) = \gamma_{yz} \quad (2.77)$$

La figure (33) montre la signification physique des composantes du tenseur des déformations dans le cas d'un problème plan.

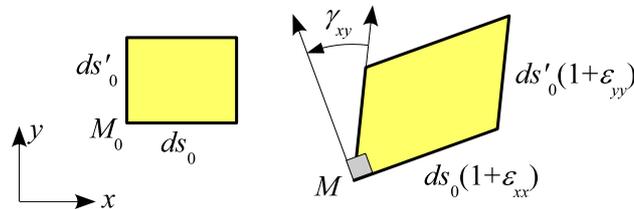


Figure 33 – Déformation plane : transformation d'un rectangle

Le volume infiniment petit  $dV_0$  en  $M_0$  devient  $dV$  en  $M$  :

$$dV = \det([F]) dV_0 \simeq (1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) dV_0 = (1 + \text{tr}([\varepsilon])) dV_0 \quad (2.78)$$

La **déformation volumique** (équation 2.37) en  $M$  se réduit à :

$$\varepsilon_V(M) = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \text{tr}([\varepsilon]) \quad (2.79)$$

### 2.8.3 Directions et valeurs principales

En  $M$ , dans le repère principal  $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ , le tenseur des déformations se réduit à :

$$[\varepsilon]_{\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Les quantités  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  sont les déformations principales.

### 2.8.4 Décomposition polaire

Les tenseurs  $[R]$ ,  $[U]$  et  $[V]$  (§ 2.7) sont voisins de l'unité. Posons :

$$[R] = [I] + [r] \quad [U] = [I] + [u] \quad , \quad [V] = [I] + [v] \quad (2.81)$$

La condition  $[R]^T[R] = [I]$  s'écrit :

$$([I] + [r])^T ([I] + [r]) \simeq [I] + [r] + [r]^T = [I] \quad (2.82)$$

d'où

$$[r] = -[r]^T \quad (2.83)$$

La matrice  $[r]$  est antisymétrique.

La condition :

$$[C] = [F]^T[F] = [U]^2 \quad \text{soit} \quad ([I] + [\varepsilon] + [\Omega])^T ([I] + [\varepsilon] + [\Omega]) = ([I] + [u])^2 \quad (2.84)$$

s'écrit au premier ordre près :

$$[I] + 2[\varepsilon] \simeq [I] + 2[u] \quad \text{d'où} \quad [u] \simeq [\varepsilon] \quad (2.85)$$

De même, la relation  $[F][F]^T = [V]^2$  implique :

$$[v] \simeq [\varepsilon] \quad (2.86)$$

La relation :

$$[F] = [I] + [\Omega] + [\varepsilon] = [R][U] = ([I] + [r]) ([I] + [u]) \quad (2.87)$$

s'écrit au premier ordre près :

$$[F] = [I] + [\Omega] + [\varepsilon] \simeq [I] + [r] + [u] \quad (2.88)$$

d'où :

$$[r] \simeq [\Omega] \quad (2.89)$$

La matrice de rotation  $[R]$  et les matrices de déformation pure  $[U]$  et  $[V]$  se réduisent à :

$$[R] \simeq [I] + [\Omega] \quad , \quad [U] \simeq [V] \simeq [I] + [\varepsilon] \quad (2.90)$$

Les composantes de  $[\Omega]$  sont :

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

où les composantes du vecteur  $\vec{\omega}$  sont :

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad 2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.92)$$

La contribution de  $[\Omega]$  à la transformation du vecteur  $d\vec{x}_0$  en  $M_0$  s'écrit :

$$\{dx\} = [\Omega]\{dx_0\} \quad \text{soit} \quad d\vec{x} = \vec{\omega} \wedge d\vec{x}_0 = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \wedge d\vec{x}_0 \quad (2.93)$$

et représente une rotation infiniment petite du vecteur  $d\vec{x}_0$  autour de l'axe  $\vec{\omega}$  en  $M$ .

### 2.8.5 Cercle de Mohr des déformations

En  $M$ , prenons comme repère, le repère principal  $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ . Considérons la famille de facettes passant par la direction principale  $\vec{n}_3$ . Soit  $\vec{n}$  ( $\cos \theta, \sin \theta, 0$ ), une facette appartenant à cette famille et  $\vec{t}$  ( $-\sin \theta, \cos \theta, 0$ ) le vecteur unitaire, situé dans le plan  $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2\}$  et faisant avec  $\vec{n}$  un angle égal à  $\pi/2$ . A chaque facette  $\vec{n}$ , nous pouvons associer les deux quantités  $\varepsilon_n$  et  $\gamma_{nt}$  définies par les équations (2.73) et (2.76) :

$$\begin{cases} \varepsilon_n = \varepsilon(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\varepsilon(M)] \{n\} = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta \\ \gamma_{nt} = \gamma(M, \vec{n}, \vec{t}) = 2 \{t\}^T [\varepsilon(M)] \{n\} = -2 \varepsilon_1 \cos \theta \sin \theta + 2 \varepsilon_2 \cos \theta \sin \theta \end{cases} \quad (2.94)$$

soit

$$\begin{cases} \varepsilon_n(\theta) = d + r \cos(-2\theta) \\ \frac{1}{2} \gamma_{nt} = r \sin(-2\theta) \end{cases} \quad \text{avec} \quad d = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad , \quad r = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (2.95)$$

À chaque facette  $\vec{n}$ , nous pouvons associer un point  $(\varepsilon_n, \gamma_{nt}/2)$  dans un repère orthonormé. Lorsque  $\theta$  varie, ce point décrit le cercle de centre  $(d, 0)$  et de rayon  $r$  (figure 34).

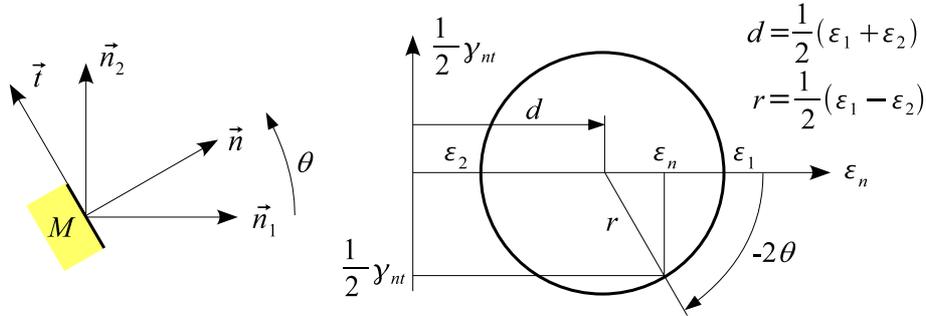


Figure 34 – Cercle de Mohr des déformations

## 3 Loi de comportement ou loi constitutive

L'état de contrainte et l'état de déformation en un point seront représentés par un vecteur à six composantes (« notation de Voigt ») :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Pour un matériau isotrope, les déformations et les contraintes sont liées par la relation (loi de comportement) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) + \alpha \Delta T \\ \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G} \end{cases} \quad (3.2)$$

où

- $E$ ,  $\nu$  et  $\alpha$  sont respectivement le **module d'Young**, le **coefficient de Poisson** et le coefficient de dilatation du matériau.
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  est le module d'élasticité transversal.
- $\Delta T$  est la variation de température.

*Remarque* :  $\nu$  est compris entre 0 et 1/2.

Avec ces notations la loi de comportement s'écrit :

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} + \{\sigma_{th}\} \quad (3.3a)$$

où la matrice  $[D]$  des coefficients élastiques est égale à :

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (3.3b)$$

où :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (3.3c)$$

sont les **coefficients de Lamé**.

$\{\sigma_{th}\}$  représente les contraintes d'origine thermique et est égal à :

$$\{\sigma_{th}\} = -\frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique du matériau.

*Remarques* :

- Les relations (3.2) et (3.3a) s'écrivent à l'aide du tenseur des contraintes et du tenseur des déformations :

$$[\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E}[\sigma] - \frac{\nu}{E}(\text{tr}[\sigma])[I] + \alpha\Delta T[I] \quad (3.5a)$$

$$[\sigma] = \lambda(\text{tr}[\varepsilon])[I] + 2\mu[\varepsilon] - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}[I] \quad (3.5b)$$

- La déformation volumique (équation 2.37) s'écrit en fonction des contraintes :

$$\varepsilon_V(M) = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + 3\alpha\Delta T = \frac{(1-2\nu)}{E}\text{tr}[\sigma] + 3\alpha\Delta T \quad (3.6)$$

– La densité d'énergie de déformation est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\{\varepsilon\}^T - \{\varepsilon_{th}\}^T) \{\sigma\} &= \frac{1}{2} (\{\varepsilon\}^T - \{\varepsilon_{th}\}^T) [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{th}\}) \\ &= \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon_{th}\} + \frac{1}{2} \{\varepsilon_{th}\}^T [D] \{\varepsilon_{th}\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

## 4 Critères de limite élastique

### 4.1 Problème

Soient  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  les trois contraintes principales en un point  $M$  d'un solide. Nous supposons que la limite élastique en traction simple est égale à la limite élastique en compression simple. Soit  $\sigma_E$  cette limite élastique .

Comment vérifier, dans un état de contrainte complexe, que la limite élastique n'est pas dépassée ? On admet que la limite élastique est atteinte lorsqu'une certaine fonction  $f$  des contraintes principales est égale à limite élastique du matériau en traction simple :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_E \quad (4.1)$$

Le domaine élastique en un point du solide est donc défini par la relation :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_E \quad (4.2)$$

Nous examinons dans ce chapitre plusieurs critères de limite élastique.

*Rappels :*

- **État de traction simple** (§ 1.6.1) :  $\sigma_1 = \sigma$  ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ .
- **État de cisaillement pur** (§ 1.6.2) :  $\sigma_1 = \tau$  ,  $\sigma_2 = -\tau$  ,  $\sigma_3 = 0$ .

### 4.2 Critère de Rankine ou de la contrainte normale maximale

#### 4.2.1 Énoncé

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_R = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq \sigma_E \quad (4.3)$$

La quantité  $\sigma_R$  est appelée **contrainte équivalente de Rankine ou de la contrainte normale maximale**.

#### 4.2.2 Validité

Le critère s'écrit :

$$|\sigma| \leq \sigma_E \quad (4.4)$$

pour un état de traction simple et

$$|\tau| \leq \sigma_E \quad (4.5)$$

pour un état de cisaillement pur ce qui impose  $\tau_E = \sigma_E$  où  $\tau_E$  est la limite élastique au cisaillement pur.

### 4.2.3 État plan de contraintes ( $\sigma_3 = 0$ )

La contrainte équivalente de Rankine se réduit à :

$$\sigma_R = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|) \quad (4.6)$$

Le domaine élastique est représenté sur la figure (35).

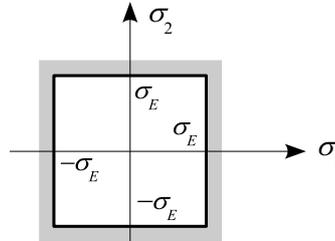


Figure 35 – Critère de Rankine : domaine élastique

## 4.3 Critère de Tresca ou du cisaillement maximal

### 4.3.1 Énoncé

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_T = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 2 \tau_{\max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_E \quad (4.7)$$

La quantité  $\sigma_T$  est appelée **contrainte équivalente de Tresca**.

### 4.3.2 Validité

Le critère s'écrit :

$$|\sigma| \leq \sigma_E \quad (4.8)$$

pour un état de traction simple et

$$|2\tau| \leq \sigma_E \quad (4.9)$$

pour un état de cisaillement pur ce qui impose  $\tau_E = \sigma_E/2$ .

### 4.3.3 État plan de contraintes ( $\sigma_3 = 0$ )

La contrainte équivalente de Tresca se réduit à :

$$\sigma_T = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) \quad (4.10)$$

Le domaine élastique est représenté sur la figure (36).

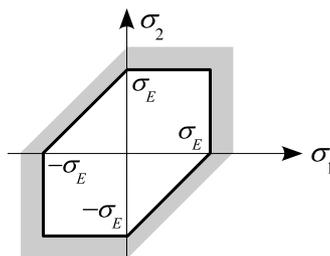


Figure 36 – Critère de Tresca : domaine élastique

## 4.4 Critère de Von Mises

### 4.4.1 Énoncé

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_{VM} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{1}{2} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2)} \leq \sigma_E \quad (4.11)$$

La quantité  $\sigma_{VM}$  est appelée **contrainte équivalente de Von Mises**.

### 4.4.2 Validité

Le critère s'écrit :

$$|\sigma| \leq \sigma_E \quad (4.12)$$

pour un état de traction simple et

$$\sqrt{3} |\tau| \leq \sigma_E \quad (4.13)$$

pour un état de cisaillement pur, ce qui impose  $\tau_E = 1/\sqrt{3} \sigma_E = 0.58 \sigma_E$ .

### 4.4.3 État plan de contraintes ( $\sigma_3 = 0$ )

La contrainte équivalente de Von Mises se réduit à :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (4.14)$$

Le domaine élastique est représenté sur la figure (37).

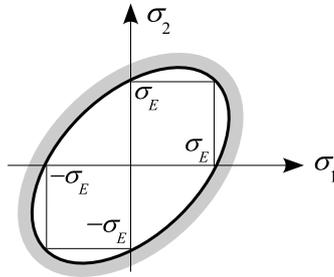


Figure 37 – Critère de Von Mises : domaine élastique

## 5 Problèmes particuliers d'élasticité

### 5.1 Contraintes planes

**Définition** : un solide est en état de contraintes planes par rapport au plan  $\{O; x, y\}$ , s'il existe un repère  $\{O; x, y, z\}$ , tel qu'en tout point  $M$  du solide, le tenseur des contraintes soit de la forme :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

où  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xz}$  sont indépendants de  $z$ .

L'axe  $z$  est donc, pour tous les points du solide, direction principale et la contrainte principale associée est nulle.

La loi de comportement se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E \alpha \Delta T}{1-\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.2a)$$

avec

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha \Delta T \quad (5.2b)$$

d'où la forme du tenseur des déformations :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Les déformations et les contraintes ne dépendent que des déplacements  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  parallèles aux axes  $x$  et  $y$ .

Les équations d'équilibre (1.27) se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases} \quad (5.4)$$

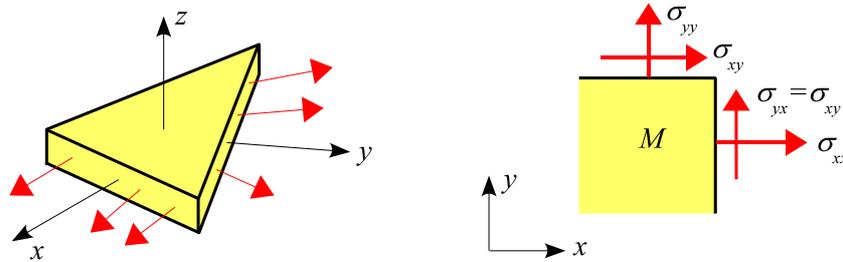


Figure 38 – *Plaque sollicitée dans son plan*

**Domaine d'application** : l'approximation contraintes planes convient aux plaques minces sollicitées dans leur plan (figure 38). Le plan  $\{O; x, y\}$  est alors le plan moyen de la plaque.

## 5.2 Déformations planes

**Définition** : un solide est en état de déformations planes par rapport au plan  $\{O; x, y\}$  s'il existe un repère  $\{O; x, y, z\}$  tel qu'en tout point  $M$  du solide, le champ de déplacement soit de la forme :

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ w = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

On en déduit le tenseur des déformations :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6a)$$

avec

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.6b)$$

En tout point du solide, la direction  $z$  est donc direction principale. Les déformations et les contraintes sont indépendantes de  $z$ .

La loi de comportement se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E \alpha \Delta T}{1 - 2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.7a)$$

avec

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - E \alpha \Delta T \quad (5.7b)$$

d'où la forme du tenseur des contraintes :

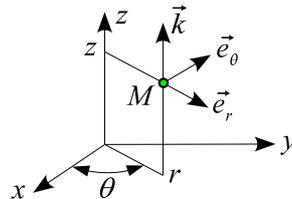
$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

**Domaine d'application** : l'état de déformations planes se présente lorsqu'on a affaire à un cylindre d'axe  $Oz$  très long satisfaisant aux conditions suivantes :

- les bases du cylindre sont fixes.
- les forces appliquées au solide sont normales à l'axe  $Oz$  et indépendantes de  $z$ .

### 5.3 Problème axisymétrique

Le solide considéré est de révolution. Il en va de même du chargement et des conditions aux limites. Soit  $z$  l'axe de révolution. Un point du solide est repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . La solution est axisymétrique. Chaque point du solide se déplace dans son plan méridien  $(r, z)$ . De plus le champ de déplacement est indépendant de la coordonnée  $\theta$ .



Le champ de déplacements se réduit à :

$$\begin{cases} u = u(r, z) & \text{(déplacement radial)} \\ v = 0 & \text{(déplacement orthoradial)} \\ w = w(r, z) & \text{(déplacement axial)} \end{cases} \quad (5.9)$$

On en déduit les déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{u}{r} & , & \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} & , & \varepsilon_{zz} = \frac{w}{z} \\ \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} & , & \gamma_{r\theta} = 0 & , & \gamma_{z\theta} = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

La direction  $\theta$  est direction principale.

La loi de comportement se réduit à :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} - \frac{E \alpha \Delta T}{1 - 2\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

d'où la forme du tenseur des contraintes :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Les équations d'équilibre (1.27) s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + f_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (5.13)$$

## 5.4 Flexion des plaques

### 5.4.1 Définitions

Une plaque est un corps solide limité par deux faces planes parallèles et par une surface cylindrique perpendiculaire à celles-ci (figure 39).

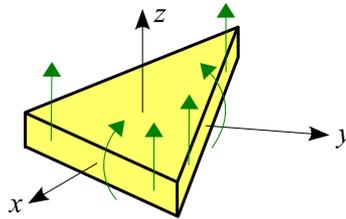


Figure 39 – Plaque

L'épaisseur  $h$  de la plaque est la distance entre les deux faces.

Le plan équidistant des deux faces est le plan médiant ou surface moyenne.

Soit  $\{O; x, y, z\}$  un repère orthonormé tel que le plan  $\{O; x, y\}$  soit le plan moyen.

Le plan situé à  $z = h/2$  est la peau supérieure de la plaque.

Le plan situé à  $z = -h/2$  est la peau inférieure de la plaque.

Une fibre normale est l'ensemble des points du solide situés sur une normale au plan médiant. Elle est caractérisée par la donnée de ses coordonnées  $(x, y)$ .

Une plaque est dite mince si son épaisseur est petite par rapport aux autres dimensions.

On adoptera les hypothèses suivantes :

- La plaque est sollicitée par des forces de composantes  $(0, 0, f_z)$  et des couples de composantes  $(m_x, m_y, 0)$ .
- La contrainte normale  $\sigma_{zz}$  est négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur des contraintes.
- Les phénomènes de membrane et de flexion sont découplés. Compte-tenu des conditions de chargement, les phénomènes de membrane sont nuls.
- $\sigma_{zx}(x, y, \pm h/2) = \sigma_{zy}(x, y, \pm h/2) = 0$ .

#### 5.4.2 Champ de déplacements : modèle de Reissner/Mindlin

Au cours de la mise en charge, une fibre normale reste droite mais ne reste pas nécessairement perpendiculaire au plan moyen.

Le champ déplacements du point de coordonnées  $(x, y, z)$  à l'instant  $t$  est (figure 40) :

$$\begin{cases} u(x, y, z; t) = z \theta_y(x, y; t) = z \beta_x(x, y; t) \\ v(x, y, z; t) = -z \theta_x(x, y; t) = z \beta_y(x, y; t) \\ w(x, y, z; t) = w(x, y; t) \end{cases} \quad (5.14)$$

où :

$w$  est le déplacement transverse.

$\theta_x = -\beta_y$  est la rotation de la fibre normale suivant  $x$ .

$\theta_y = \beta_x$  est la rotation de la fibre normale suivant  $y$ .

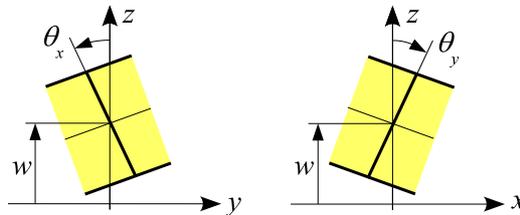


Figure 40 – Flexion des plaques : champ de déplacements

#### 5.4.3 Déformations et contraintes

Le champ de déplacements dans le solide est donc défini par la connaissance de  $w$ ,  $\beta_x$  et  $\beta_y$  en tout point  $(x, y)$  du plan moyen.

De l'expression du champ de déplacements, on déduit les déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} , & \varepsilon_{yy} = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} , & \varepsilon_{zz} = 0 \\ \gamma_{xy} = z \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) , & \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} , & \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (5.15)$$

La loi de comportement s'écrit :

$$\{\sigma_f\} = [D_m] \{\varepsilon_f\} = z [D_m] \{\chi\} \quad (5.16a)$$

où :

$$\{\sigma_f\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} , \quad \{\varepsilon_f\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \{\chi\} , \quad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (5.16b)$$

$$[D_m] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.16c)$$

pour la flexion et

$$\{\sigma_c\} = G k_c [I] \{\varepsilon_c\} \quad (5.16d)$$

où :

$$\{\sigma_c\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} , \quad \{\varepsilon_c\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} , \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.16e)$$

pour le cisaillement transverse.

$\{\chi\}$  est le vecteur des courbures.

$k_c$  est le coefficient de cisaillement transverse. Ce coefficient est calculé par identification statique ou dynamique entre une grandeur évaluée avec le modèle de Reissner-Mindlin et cette même grandeur évaluée avec un modèle plus « riche » du point de vue de la théorie de l'élasticité. On adopte souvent

$$k_c = \frac{5}{6} \quad (5.17)$$

proposé par Reissner [31] par identification statique ou

$$k_c = \frac{\pi^2}{12} \quad (5.18)$$

proposé par Mindlin [30] par identification dynamique.

**Évaluation du coefficient de cisaillement par identification statique** : pour satisfaire la condition  $\sigma_{xz}(x, y, \pm h/2) = 0$ , la contrainte  $\sigma_{xz}$  doit être au moins quadratique en  $z$  (ce qui implique, compte-tenu de la relation cinématique  $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ , une dépendance en  $z$  quadratique pour  $w$  et/ou cubique pour  $u$ ).

Si on admet la solution :

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = \sigma_{xz}(x, y, 0) \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (5.19)$$

d'où

$$q_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}(x, y, z) dz = \frac{2}{3} \sigma_{xz}(x, y, 0) h \quad (5.20)$$

il vient pour l'énergie de déformation par unité de surface moyenne due à la contrainte  $\sigma_{xz}$  :

$$E_1 = \frac{1}{2G} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}^2(x, y, z) dz = \frac{1}{2G} \frac{8}{15} \sigma_{xz}^2(x, y, 0) h = \frac{1}{2G} \frac{6q_{xz}^2}{5h} \quad (5.21)$$

La même quantité évaluée avec le modèle simplifié (5.16) est :

$$E_2 = \frac{1}{2G k_c} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{q_{xz}^2}{h^2} dz = \frac{1}{2G k_c h} \quad (5.22)$$

En écrivant  $E_1 = E_2$ , il vient :

$$k_c = \frac{5}{6} \quad (5.23)$$

#### 5.4.4 Forces et moments résultants

Considérons un élément de plaque infiniment petit, limité par un cylindre perpendiculaire au plan moyen, de section droite rectangulaire et dont les faces sont parallèles à  $x$  ou  $y$  (figure 41).

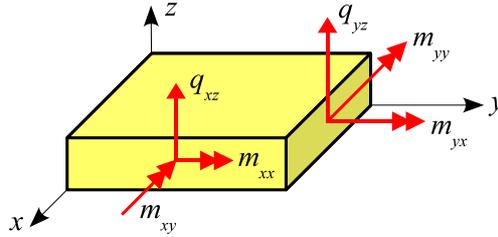


Figure 41 – Efforts résultants

Les forces et moments résultants (efforts par unité de longueur) sont définis par :

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_{xz} \\ q_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (5.24)$$

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (5.25)$$

$\{q\}$  et  $\{m\}$  s'expriment respectivement en N/m et N.m/m=N.

En portant dans ces expressions les relations de comportement (5.16), il vient :

$$\{m\} = [D_f] \{\chi\} \quad \text{avec} \quad [D_f] = \int_{-h/2}^{h/2} [D_m] z^2 dz = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.26a)$$

$$\{q\} = [D_c] \{\varepsilon_c\} \quad \text{avec} \quad [D_c] = \int_{-h/2}^{h/2} G k_c [I] dz = \frac{E k_c h}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.26b)$$

Remarque : on a les relations :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{12z}{h^3} \begin{Bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} q_{xz} \\ q_{yz} \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

### 5.4.5 Énergie de déformation et énergie cinétique

L'énergie de déformation est égale à :

$$\begin{aligned}
 E_{def} &= \frac{1}{2} \int_V (\{\varepsilon_f\}^T \{\sigma_f\} + \{\varepsilon_c\}^T \{\sigma_c\}) dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_A (\{\chi\}^T \{m\} + \{\varepsilon_c\}^T \{q\}) dA \\
 &= \frac{1}{2} \int_A (\{\chi\}^T [D_f] \{\chi\} + \{\varepsilon_c\}^T [D_c] \{\varepsilon_c\}) dA \quad \text{avec } dA = dx dy
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

L'énergie cinétique est égale à :

$$\begin{aligned}
 E_{cin} &= \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \rho (z^2 \dot{\beta}_x^2 + z^2 \dot{\beta}_y^2 + \dot{w}^2) dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_A \rho h \dot{w}^2 dA + \frac{1}{2} \int_A \frac{\rho h^3}{12} (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) dA
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

### 5.4.6 Équations d'équilibre

Les équations d'équilibre (1.27) se réduisent à :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho \ddot{u} \tag{5.30a}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = \rho \ddot{v} \tag{5.30b}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho \ddot{w} \tag{5.30c}$$

Intégrons suivant l'épaisseur l'équation (5.30c) :

$$\frac{\partial q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yz}}{\partial y} + p_z = \rho h \ddot{w} \quad \text{avec } p_z = \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz + \sigma_{zz}(x, y, h/2) - \sigma_{zz}(x, y, -h/2) \tag{5.31}$$

Multiplions par  $z$  l'équation (5.30a), puis intégrons suivant l'épaisseur :

$$\frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \rho \ddot{\beta}_x dz = \frac{1}{12} \rho h^3 \ddot{\beta}_x \tag{5.32}$$

Intégrons par parties l'intégrale du premier membre :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial(z \sigma_{xz})}{\partial z} dz - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = [z \sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2} - q_{xz} \tag{5.33}$$

En utilisant la condition  $\sigma_{xz}(x, y, \pm h/2) = 0$ , il vient :

$$\frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - q_{xz} = \frac{1}{12} \rho h^3 \ddot{\beta}_x \tag{5.34}$$

Les équations d'équilibre exprimées à l'aide des efforts résultants s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yz}}{\partial y} + p_z = \rho h \ddot{w} \\ \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - q_{xz} = \frac{1}{12} \rho h^3 \ddot{\beta}_x \\ \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} - q_{yz} = \frac{1}{12} \rho h^3 \ddot{\beta}_y \end{array} \right. \tag{5.35}$$

### 5.4.7 Modèle de Kirchhoff

Si on néglige le cisaillement transverse :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad \text{d'où} \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (5.36)$$

on a les relations :

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad \{\chi\} = - \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \quad (5.37)$$

Au cours de la mise en charge, les fibres normales restent perpendiculaires à la déformée de la surface moyenne.

## 5.5 Torsion d'une poutre cylindrique : théorie de Saint-Venant

Saint-Venant a résolu le problème de la torsion des poutres cylindriques en adoptant le champ de déplacements (figure 42) :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \omega(y, z) \frac{d\theta_x}{dx} \quad \text{avec} \quad \frac{d\theta_x}{dx} = Cte \\ v(x, y, z) &= -z \theta_x \\ w(x, y, z) &= y \theta_x \end{aligned} \quad (5.38)$$

où :

- $\theta_x$  est la rotation supposée petite de la section autour de l'axe  $\vec{x}$ .
- $\omega(y, z)$  est la fonction de gauchissement.

Le champ de déplacements est la combinaison d'une rotation de la section droite autour du point  $C$  appelé **centre de torsion** (ou **centre de cisaillement**) et du **gauchissement de la section**.

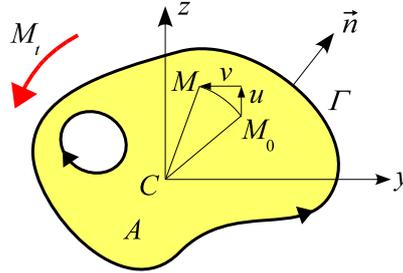


Figure 42 – Torsion d'une poutre cylindrique : champ de déplacements

On en déduit les déformations :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right) \frac{d\theta_x}{dx} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right) \frac{d\theta_x}{dx} \quad (5.39)$$

puis les contraintes :

$$\sigma_{xy} = G \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right) \frac{d\theta_x}{dx} \quad , \quad \sigma_{xz} = G \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right) \frac{d\theta_x}{dx} \quad \text{avec} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.40)$$

Les composantes du tenseur des contraintes se réduisent donc à :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

La surface du cylindre est libre de toute contrainte. Si  $M$  est un point du contour et  $\vec{n}$  de composantes  $(0, n_y, n_z)$  la normale extérieure, on a :

$$[\sigma(M)]\{n\} = \{0\} \quad (5.42)$$

soit

$$\sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z = 0 \quad \forall M \in \Gamma \quad (5.43)$$

Le moment de torsion est égal à :

$$Mt = \int_A (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA = GJ \frac{d\theta_x}{dx} \quad (5.44)$$

où :

$$J = \int_A \left( y \frac{\partial \omega}{\partial z} - z \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dA + I_p \quad \text{avec} \quad I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_y + I_z \quad (5.45)$$

est la **constante de torsion de Saint-Venant**.

Les contraintes sont égales à :

$$\sigma_{xy} = \frac{Mt}{J} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right) \quad , \quad \sigma_{xz} = \frac{Mt}{J} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right) \quad (5.46)$$

*Remarque* : si la section est circulaire, la fonction de gauchissement est nulle et la constante de torsion se réduit à :

$$J = I_p \quad (5.47)$$

La fonction de gauchissement  $\omega(y, z)$  est solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en tout point intérieur} \quad (5.48)$$

avec la condition :

$$\sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z = \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y + \frac{\partial \omega}{\partial z} n_z - z n_y + y n_z = 0 \quad \text{en tout point du contour} \quad (5.49)$$

## 5.6 Contraintes dans une poutre

Considérons une section droite de centre de gravité  $G$ . Soient  $y$  et  $z$  les axes centraux principaux de la section. L'axe  $x$  est l'axe neutre de la poutre.

Soit  $[N \ T_y \ T_z \ Mt \ Mf_y \ Mf_z]$  les efforts intérieurs qui s'exercent sur la section.

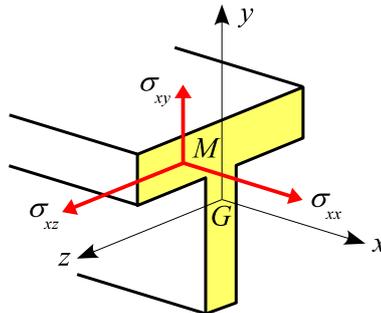


Figure 43 – Contraintes dans une section droite

Au point  $M(y, z)$ , le tenseur des contraintes a pour expression :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

où la contrainte normale est égale à :

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + z \frac{Mf_y}{I_y} - y \frac{Mf_z}{I_z} \quad (5.51)$$

Les contraintes tangentielles sont dues au moment de torsion  $Mt$  et aux efforts tranchants  $T_y$  et  $T_z$ .

Les contraintes principales sont les solutions de l'équation :

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & -\sigma_n & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & -\sigma_n \end{bmatrix} = 0 \quad (5.52)$$

soit :

$$(\sigma_{xx} - \sigma_n) \det \begin{bmatrix} -\sigma_n & 0 \\ 0 & -\sigma_n \end{bmatrix} - \sigma_{xy} \det \begin{bmatrix} \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ 0 & -\sigma_n \end{bmatrix} + \sigma_{xz} \det \begin{bmatrix} \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ -\sigma_n & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.53)$$

d'où le polynôme caractéristique :

$$\sigma_n^3 - \sigma_{xx} \sigma_n^2 - (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2) \sigma_n = 0 \quad (5.54)$$

On en déduit :

– les contraintes principales :

$$\sigma_3 = 0 \quad , \quad \left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_{xx}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\tau^2} \quad \text{avec} \quad \tau^2 = \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 \quad (5.55)$$

*Remarque* : on a la relation :

$$\sigma_2 \leq \sigma_3 = 0 \leq \sigma_1 \quad (5.56)$$

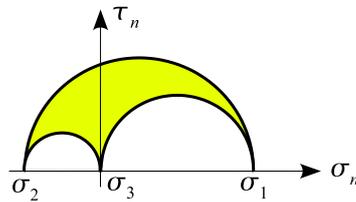


Figure 44 – Cercles de Mohr des contraintes

– la contrainte équivalente de Von Mises :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\tau^2} \quad (5.57)$$

– la contrainte équivalente de Tresca :

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\tau^2} \quad (5.58)$$

## 6 Dépouillement des rosettes d'extensométrie

Une rosette d'extensométrie est un ensemble de trois jauges collées en un point  $M$  d'un solide et faisant entre elles un angle égal à  $\varphi$  (figure 45).

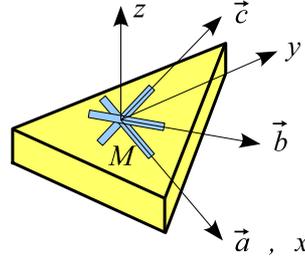


Figure 45 – Rosette d'extensométrie

Soit  $z$  le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé vers l'extérieur du solide et  $\{M; x, y, z\}$  le repère orthonormé tel que l'axe  $x$  soit colinéaire avec la jauge  $\vec{a}$ .

La direction  $z$  est direction principale et en l'absence de pression extérieure, la contrainte principale correspondante est nulle : en  $M$  l'état de contrainte est plan. Le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations ont pour expression :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

avec les relations de comportement (en l'absence de gradient thermique) :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}), \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (6.2a)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (6.2b)$$

où  $E$  et  $\nu$  sont les caractéristiques élastiques du matériau.

La mesure de l'allongement unitaire dans les trois directions  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  (figure 46) :

$$\varepsilon_a = \varepsilon(M, \vec{a}), \quad \varepsilon_b = \varepsilon(M, \vec{b}), \quad \varepsilon_c = \varepsilon(M, \vec{c}) \quad (6.3)$$

donne trois équations qui, ajoutées aux quatre relations (6.2), permet la détermination de l'état de déformation (4 inconnues) et de l'état de contrainte (3 inconnues) en  $M$ .

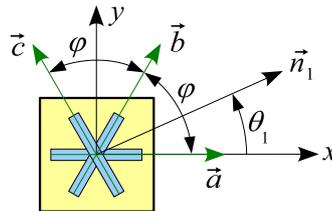


Figure 46 – Rosette  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$

Les composantes des vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  sont :

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{c\} = \begin{Bmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Des relations (équation 2.73) :

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \{a\}^T [\varepsilon] \{a\} = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_b = \{b\}^T [\varepsilon] \{b\} = \varepsilon_{xx} \cos^2(\varphi) + \varepsilon_{yy} \sin^2(\varphi) + \gamma_{xy} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \varepsilon_c = \{c\}^T [\varepsilon] \{c\} = \varepsilon_{xx} \cos^2(2\varphi) + \varepsilon_{yy} \sin^2(2\varphi) + \gamma_{xy} \cos(2\varphi) \sin(2\varphi) \end{cases} \quad (6.5)$$

on déduit les composantes  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\gamma_{xy}$  du tenseur des déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_a \\ \varepsilon_{yy} = \frac{-\varepsilon_a + 2\varepsilon_b + \varepsilon_c + 2\cos^2(\varphi)\varepsilon_a - 4\cos^2(\varphi)\varepsilon_b}{2\sin^2(\varphi)} \\ \gamma_{xy} = \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c - 4\cos^2(\varphi)\varepsilon_a + 4\cos^2(\varphi)\varepsilon_b}{2\cos(\varphi)\sin(\varphi)} \end{cases} \quad (6.6)$$

puis les composantes du tenseur des contraintes et la déformation  $\varepsilon_{zz}$  (équation 6.2).

On en déduit les contraintes principales :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}, \quad \sigma_3 = 0 \quad (6.7)$$

les déformations principales :

$$\left. \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{zz} \quad (6.8)$$

et la position angulaire  $\theta_1$  de la direction principale  $\vec{n}_1$  par rapport à l'axe  $x$  :

$$\theta_1 = \arctan \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} \quad (6.9)$$

Dans la pratique, l'angle  $\varphi$  est égal à 45 ou 120 degrés :

**Rosette à 45 degrés :**

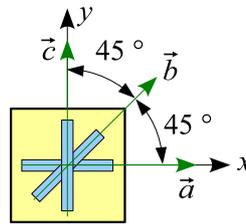


Figure 47 – Rosette à 45 degrés

L'équation (6.5) se réduit à :

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_b = \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} + \frac{1}{2} \varepsilon_{yy} + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \varepsilon_c = \varepsilon_{yy} \end{cases} \quad (6.10)$$

d'où

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_c \quad , \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c \quad (6.11)$$

et

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_a + \varepsilon_c) \quad (6.12)$$

**Rosette à 120 degrés :**

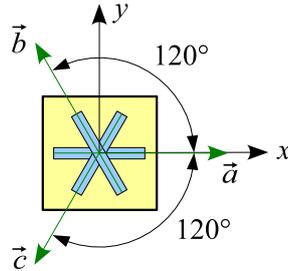


Figure 48 – Rosette à 120 degrés

L'équation (6.5) se réduit à :

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_b = \frac{1}{4} \varepsilon_{xx} + \frac{3}{4} \varepsilon_{yy} - \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy} \\ \varepsilon_c = \frac{1}{4} \varepsilon_{xx} + \frac{3}{4} \varepsilon_{yy} + \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy} \end{cases} \quad (6.13)$$

d'où

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{3} (2\varepsilon_b + 2\varepsilon_c - \varepsilon_a) \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\varepsilon_c - \varepsilon_b) \quad (6.14)$$

et

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{2}{3} \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c) \quad (6.15)$$

## A Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice symétrique à coefficients réels

Soit  $[S]$  une matrice symétrique à coefficients réels de dimension  $n$ .

### A.1 Définition

$\lambda_i$  est valeur propre de la matrice  $[S]$  si :

$$[S]\{u_i\} = \lambda_i \{u_i\} \quad (\text{A.1})$$

où  $\{u_i\}$  est le vecteur propre associé que nous choisirons unitaire :  $\{u_i\}^T \{u_i\} = 1$ .

### A.2 Propriétés

Les valeurs propres sont les solutions du polynôme caractéristique de degré  $n$  :

$$\det([S] - \lambda[I]) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Les principales propriétés des valeurs propres et des vecteurs propres sont :

- Les  $n$  valeurs propres sont réelles distinctes ou non.
- Si deux valeurs propres  $\lambda_i$  et  $\lambda_j$  sont distinctes, les vecteurs propres associés sont orthogonaux :

$$\{u_i\}^T \{u_j\} = 0 \quad \text{si } \lambda_i \neq \lambda_j \quad (\text{A.3})$$

- On peut toujours trouver un ensemble de  $n$  vecteurs orthogonaux  $\{u_1\}, \dots, \{u_n\}$  tels que :

$$[S][U] = [U][\Lambda] \quad (\text{A.4})$$

où

$$[U] = [\{u_1\} \quad \{u_2\} \quad \dots \quad \{u_n\}] \quad , \quad [U]^T [U] = [U][U]^T = [I] \quad (\text{A.5})$$

et

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

### A.3 Décomposition spectrale

La matrice  $[S]$  s'écrit en fonction des valeurs propres et des vecteurs propres :

$$[S] = [U][\Lambda][U]^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \{u_i\} \{u_i\}^T \quad , \quad \sum_{i=1}^n \{u_i\} \{u_i\}^T = [I] \quad (\text{A.7})$$

*Remarque* : la matrice  $[S]^p$  :

$$[S]^p = \underbrace{[S][S] \dots [S]}_{p \text{ fois}} \quad (\text{A.8})$$

a les mêmes vecteurs propres que la matrice  $[S]$  :

$$[S]\{u_i\} = \lambda_i \{u_i\} \quad , \quad [S]^p \{u_i\} = \lambda_i^p \{u_i\} \quad (\text{A.9})$$

d'où :

$$[S]^p = \sum_{i=1}^n \lambda_i^p \{u_i\} \{u_i\}^T \quad (\text{A.10})$$

#### A.4 Valeurs et vecteurs propres d'une matrice symétrique de dimension deux

Considérons la matrice symétrique  $[S]$  :

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} , \quad ([S]^T = [S]) \quad (\text{A.11})$$

Les valeurs propres  $S_{n=1,2}$  et les vecteurs propres  $\{n\}$  sont les solutions de l'équation :

$$[S]\{n\} = S_n\{n\} , \quad \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = S_n \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad n_x^2 + n_y^2 = 1 \quad (\text{A.12})$$

soit :

$$\begin{bmatrix} S_{xx} - S_n & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} - S_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Cette équation n'a de solution autre que la solution triviale  $n_x = n_y = 0$  que si et seulement si :

$$\det \begin{bmatrix} S_{xx} - S_n & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} - S_n \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.14})$$

d'où le polynôme caractéristique :

$$S_n^2 - \underbrace{(S_{xx} + S_{yy})}_{\text{tr}[S]=S_1+S_2} S_n + \underbrace{S_{xx} S_{yy} - S_{xy}^2}_{\det[S]=S_1 S_2} = 0 \quad (\text{A.15})$$

et les valeurs propres :

$$\left. \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix} \right\} = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(S_{xx} - S_{yy})^2 + 4 S_{xy}^2} \quad (\text{A.16})$$

Les vecteurs propres associés sont :

$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{Bmatrix} , \quad \{n_2\} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

avec :

$$\tan \theta_1 = \frac{S_1 - S_{xx}}{S_{xy}} , \quad \tan \theta_2 = \frac{S_2 - S_{xx}}{S_{xy}} , \quad \tan 2\theta_1 = \tan 2\theta_2 = \frac{2 S_{xy}}{S_{xx} - S_{yy}} \quad (\text{A.18})$$

*Remarque* : les deux directions principales sont orthogonales :

$$|\theta_1 - \theta_2| = \frac{\pi}{2} , \quad \tan \theta_1 \tan \theta_2 = -1 \quad (\text{A.19})$$

## B Dépouillement des rosettes d'extensométrie : programme Maple

Ce programme est dans le fichier `map_elasticite.txt`.

```

restart :with(linalg) :

# matériau
E :=210000; # module d'Young
nu :=0.27; # coefficient de Poisson
G :=E/2/(1+nu); # module d'élasticité transversal

# angle de la rosette en degrés
phi :=45;

# allongements unitaires mesurés
ea :=-100E-6;
eb :=-450E-6;
ec :=400E-6;

# allongement unitaire dans la direction théta
epsilon :=proc(theta)
  local nx,ny :
  nx :=cos(theta) :ny :=sin(theta) :
  exx*nx*nx+eyy*ny*ny+gxy*nx*ny :
end :

# calcul des déformations exx , eyy et gxy
# l'axe x est l'axe de la jauge a
phi :=phi*Pi/180 :
fsolve({ea=epsilon(0),eb=epsilon(phi),ec=epsilon(2*phi)},{exx,eyy,gxy}) :
assign(%) :

# calcul des contraintes et de ezz
c :=E/(1-nu^2) :
sxx :=c*(exx+nu*eyy) :
syy :=c*(eyy+nu*exx) :
sxy :=G*gxy :
ezz :=-nu/E*(sxx+syy) :

# tenseur des contraintes
sigma :=matrix(3,3,[[sxx,sxy,0],[sxy,syy,0],[0,0,0]]);

# contraintes principales
d :=0.5*(sxx+syy) :r :=0.5*sqrt((sxx-syy)^2+4*sxy^2) :
S1 :=d+r;S2 :=d-r;S3 :=0;

# angle en degrés de la direction principale 1 avec la jauge a
t_1 :=evalf(arctan((S1-sxx)/sxy)*180/Pi);

# tenseur des déformations

```

```
epsilon :=matrix(3,3,[[exx,1/2*gxy,0],[1/2*gxy,eyy,0],[0,0,ezz]]);

# déformations principales
EP :=eigenvalues(epsilon);

# déformation volumique dV/V
dV_V :=trace(epsilon);

# contrainte équivalente de Von Mises
Von_Mises :=sqrt(S1^2+S2^2-S1*S2);

# contrainte équivalente de Tresca
Tresca :=max(S1,S2,0)-min(S1,S2,0);

# cisaillement maximal
tau_max :=0.5*Tresca;

# énergie de déformation par unité de volume en MPa
energie :=0.5*(sxx*exx+sy*eyy+sxy*gxy);
# ou
energie :=0.5*trace(multiply(sigma,epsilon));
```

## Références

- [1] J. AVRIL – *Encyclopédie d'analyse des contraintes*, Vishay-Micromesures, 1984.
- [2] C. BACON et J. POUYET – *Mécanique des solides déformables*, Hermès, 2000.
- [3] Y. BAMBERGER – *Mécanique de l'ingénieur – III : Solides déformables*, Hermann, 1981.
- [4] A. BAZERGUI, T. BUI-QUOC, A. BIRON, G. MCINTYRE et C. LABERGE – *Résistance des matériaux*, 3 éd., Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, 2002.
- [5] D. BELLET et J.-J. BARRAU – *Cours d'élasticité*, Cépaduès, 1990.
- [6] R. BOUDET et P. STEPHAN – *Résistance des matériaux*, Cépaduès, 1998.
- [7] L. CHEVALIER – *Mécanique des systèmes et des milieux déformables – Cours, exercices et problèmes corrigés*, Ellipses, 2004.
- [8] J. COIRIER – *Mécanique des milieux continus – Cours et exercices corrigés*, 2 éd., Dunod, 2001.
- [9] J. COURBON – *Résistance des matériaux – Tome 1*, 2 éd., Dunod, 1964.
- [10] — , *Résistance des matériaux – Tome 2*, Dunod, 1965.
- [11] — , *Éléments de résistance des matériaux*, Dunod, 1970.
- [12] R. CRAVERO – *Bases pour la résistance des matériaux*, Ellipses, 1997.
- [13] D. DARTUS – *Élasticité linéaire*, Cépaduès, 1995.
- [14] M. DEL PEDRO, T. GMÜR et J. BOTSIS – *Introduction à la mécanique des solides et des structures*, 2 éd., Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2004.
- [15] S. DUBIGEON – *Mécanique des milieux continus*, Technique et documentation, 1998.
- [16] H. DUMONTET, G. DUVAUT, F. LÉNÉ, P. MULLER et N. TURBÉ – *Exercices corrigés de mécanique des milieux continus*, Dunod, 1998.
- [17] G. DUVAUT – *Mécanique des milieux continus*, Masson, 1990.
- [18] F. FREY – *Traité du génie civil – Volume 3 : Analyse des structures et milieux continus – Mécanique des solides*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1998.
- [19] D. GAY et J. GAMBELIN – *Dimensionnement des structures – Une introduction*, Hermès, 1999.
- [20] J. M. GERE et S. P. TIMOSHENKO – *Mechanics of materials*, 3 éd., Chapman & Hall, 1995.
- [21] P. GERMAIN et P. MULLER – *Introduction à la mécanique des milieux continus*, 2 éd., Masson, 1995.
- [22] J.-P. HENRY et F. PARCY – *Cours d'élasticité*, Dunod, 1982.
- [23] L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ – *Théorie de l'élasticité*, 2 éd., Éditions Mir, 1967.
- [24] S. LAROZE et J.-J. BARRAU – *Mécanique des structures – Tome 1 : Solides élastiques – Plaques et coques*, 2 éd., Eyrolles/Masson, 1988.
- [25] A. E. H. LOVE – *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4 éd., Dover, 1944.
- [26] J. MANDEL – *Cours de mécanique des milieux continus*, Gauthier-Villars, 1966. Réédition Jacques Gabay, 1995.
- [27] C. MASSONNET – *Résistance des matériaux – Tome 1*, 2 éd., Dunod, 1968.
- [28] — , *Résistance des matériaux – Tome 2*, 2 éd., Dunod, 1968.
- [29] C. MASSONNET et S. CESCOTTO – *Mécanique des matériaux*, De Boeck Université, 1994.
- [30] R. MINDLIN – « Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates », *Journal of Applied Mechanics, ASME* **18** (1951), p. 31–38.
- [31] E. REISSNER – « The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates », *Journal of Applied Mechanics, ASME* **12** (1945), p. 69–77.

- [32] P. ROYIS – *Mécanique des milieux continus – cours, exercices et problèmes*, Presses Universitaires de Lyon (Collection ENTPE), 2005.
- [33] J. SALENÇON – *Mécanique des milieux continus – Tome 1 : Concepts généraux*, Éditions de l'École polytechnique, 2001.
- [34] — , *Mécanique des milieux continus – Tome 2 : Thermoélasticité*, Éditions de l'École polytechnique, 2001.
- [35] — , *Mécanique des milieux continus – Tome 3 : Milieux curvilignes*, Éditions de l'École polytechnique, 2001.
- [36] L. SÉDOV – *Mécanique des milieux continus – Tome I*, Éditions Mir, 1975.
- [37] I. S. SOKOLNIKOFF – *Mathematical theory of elasticity*, McGraw-Hill, 1956.
- [38] S. P. TIMOSHENKO – *History of strength of materials*, Dover, 1983.
- [39] S. P. TIMOSHENKO et J. N. GOODIER – *Théorie de l'élasticité*, 2 éd., Béranger, 1968.
- [40] — , *Theory of elasticity*, 3 éd., McGraw-Hill, 1970.
- [41] S. P. TIMOSHENKO et S. WOINOWSKY-KRIEGER – *Theory of plates and shells*, 2 éd., McGraw-Hill, 1969.
- [42] C. WIELGOZ – *Cours et exercices de résistance des matériaux : élasticité, plasticité, éléments finis*, Ellipses, 1999.