Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène
Faculté de Physique

Ondes élastiques dans les fluides et les solides
Travaux dirigés

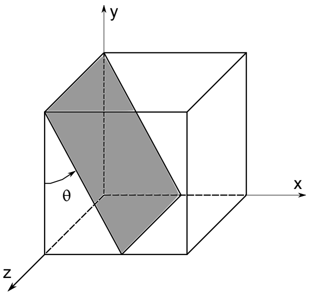
Post Graduation et Master

H. Djelouah

Année Universitaire 2009-2010

1 Ondes élastiques dans les solides

Exercice 1 :



Les composantes du tenseur des contraintes en chaque point à l'intérieur d'un cube sont données par :

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$$

Calculer la composante normale et la composante de cisaillement agissant sur le plan incliné d'un angle θ (Figure ci-contre).

Exercice 2 :

Les composantes du tenseur des contraintes en chaque point d'un milieu élastique sont données par :

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer les composantes de la tension mécanique $\vec{T}$ agissant sur le plan dont les intersections avec les axes Ox_1, Ox_2 et Ox_3 sont respectivement $A\,(3,0,0)$, $B\,(0,1,0)$ et $C\,(0,0,1)$.
   (a) Calculer les composantes
      i. normale $\vec{T}_N$
      ii. tangentielle $\vec{T}_S$
   (b) Vérifier que $\vec{T}_S$ appartient au plan défini par les points A, B et C.

Exercice 3 :

Une nuance d'acier est caractérisée par
– une masse volumique : $\rho = 7800\ kg \cdot m^{-3}$
– des coefficients de Lamé : $\lambda = 1.15 \times 10^{11}\ Pa$, $\mu = 0.77 \times 10^{11}\ Pa$

1. Calculer :
   (a) la vitesse de propagation des ondes longitudinales
   (b) la vitesse de propagation des ondes transversales
2. Une onde plane harmonique longitudinale se propage dans ce matériau. Son amplitude et sa fréquence sont respectivement : $U_0 = 1\ \mu m$ et $f = 1\ MHz$. Donner l'expression :
   (a) du déplacement de particules
   (b) de la contrainte générée par la propagation de cette onde.

Exercice 4 :

Une onde élastique longitudinale est décrite par le potentiel scalaire :

$$\varphi = A \ \exp\left[j\left(kx_1 \ \cos(\theta) + kx_3 \ \sin(\theta) - \omega t\right)\right]$$

1. Les coefficients de Lamé du mileu de propagation étant λ et μ, calculer la composante T_{33} du tenseur des contraintes en fonction de la position et du temps.
2. A l'équilibre, la masse volumique est ρ_0 ; calculer la masse volumique $\rho(x,t)$ du milieu en fonction du temps et de la position.

Exercice 5 :

On se propose de déterminer les constantes élastiques de la Paratellurite (Te O2) à partir de la mesure de vitesses de propagation d'ondes acoustiques. Les monocristaux de Paratellurite sont de symétrie tétragonale (classe 422). Ses constantes élastiques sont :

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Différentes mesures de vitesse de propagation d'ondes élastiques planes harmoniques ont été réalisées. Elles sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Direction de propagation	Polarisation	Nature de l'onde	Vitesse de propagation (m/s)
[100]	[100] [010] [001]	Longitudinale Transversale Transversale	3050 3317 2100
[110]	[110] [110] [001]	Longitudinale Transversale Transversale	4663 616 2100
[001]	[001] Dans le plan (001)	Longitudinale Transversale	4200 2100

1. Pour chacune de ces ondes, calculer la vitesse de propagation en fonction de la masse volumique et des constantes élastiques C .
2. Sachant que la masse volumique de la Paratellurite est $\rho = 6,0 \times 10^3 kg.m^{-3}$, calculer la valeur numérique des constantes élastiques que l'on peut déduire de ces mesures.

Exercice 6 :

On se propose de déterminer les constantes élastiques de l'aluminium à partir de la mesure de vitesses de propagation d'ondes acoustiques. Les monocristaux d'aluminium sont de symétrie cubique . Ses constantes élastiques sont :

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}$$

Différentes mesures de vitesse de propagation d'ondes élastiques planes harmoniques ont été réalisées. Elles sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Direction de propagation	Polarisation	Nature de l'onde	Vitesse de propagation (m/s)
[110]	[110]	Longitudinale	6450
	$[1\bar{1}0]$	Transversale	2935
	[001]	Transversale	3236

1. Pour chacune de ces ondes, calculer la vitesse de propagation en fonction de la masse volumique et des constantes élastiques $C_{\alpha\beta}$.
2. Sachant que la masse volumique de l'aluminium est $\rho = 2733\ kg.m^{-3}$, calculer la valeur numérique des constantes élastiques que l'on peut déduire de ces mesures.

Exercice 7 :

Soit un milieu élastique semi-infini, initialement au repos et non déformé. Sa frontière $(x = 0)$ est soumise à une contrainte normale $T_{xx} = T_0\ H(t)$ où T_0 est une constante et $H(t)$ est la fonction de Heaviside définie par :

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

1. Calculer le déplacement de particules dans le milieu.
2. En supposant que $\dfrac{T_0}{\lambda + 2\mu} = 1$, représenter sur un graphe le champ de déplacement en fonction de x lorsque :
   (a) $t = \dfrac{d}{c_L}$
   (b) $t = \dfrac{2d}{c_L}$
   (c) $t = \dfrac{3d}{c_L}$

Dans ces expressions d est une distance et c_L représente la vitesse de propagation des ondes longitudinales.

Exercice 8 :

Soit un milieu élastique infini soumis aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u_x(x,0) = p(x) \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

où $p(x)$ est une fonction de x.

1. Calculer la transformée de Fourier par rapport à x de $u_x\left(x,t\right)$, notée $u_x^F\left(k,t\right)$ où k est la variable conjuguée de x.
2. En déduire la solution $u_x\left(x,t\right)$

Exercice 9 :

La vitesse initiale, à l'instant $t=0$, des particules d'un milieu élastique illimité est nulle et le déplacement de particules est donné par $u_x\left(x,0\right)=p\left(x\right)$, où :

$$\begin{array}{ll} p\left(x\right)=0 & si \quad x<0 \\ p\left(x\right)=A\ \sin\left(\pi x\right) & si \quad 0<x<1 \\ p\left(x\right)=0 & si \quad x>1 \end{array}$$

où A est une constante. Représenter graphiquement les variations du déplacement de particles en fonction de x lorsque : $t=0$, $t=\frac{1}{2c_L}$ et $t=\frac{1}{c_L}$.

Exercice 10 :

On considère un milieu élastique semi-infini initialement au repos et dont la frontière, $x=0$, est soumise à une contrainte normale uniforme : $T_{11}=T_0\ H\left(t\right)$ où T_0 est une constante et $H\left(t\right)$ est la fonction de Heaviside définie par :

$$H\left(t\right)=\left\{\begin{array}{lll} 0 & si & t\leqslant 0 \\ 1 & si & t>0 \end{array}\right.$$

1. Montrer que le déplacement résultant est

$$u_x\left(x,t\right)=-\frac{c_L T_0}{\lambda+2\mu}\left(t-\frac{x}{c_L}\right)\ H\left(t-\frac{x}{c_L}\right)$$

2. En supposant que $\frac{T_0}{\lambda+2\mu}=1$, représenter sur un graphe les variations du déplacement de particules en fonction de x lorsque : $t=\frac{1}{c_L}$, $t=\frac{2}{c_L}$ et $t=\frac{3}{c_L}$.

Exercice 11 :

On se propose d'étudier quelques cas particuliers de propagation d'ondes élastiques dans un milieu isotrope de masse volumique ρ et dont les coefficients de Lamé sont λ et μ.

1. *Cas de la déformation longitudinale :* Dans ce cas le déplacement de particules s'écrit sous la forme $\vec{u}(x,t)=u(x,t)\ \vec{e}_x$.
   (a) Calculer les composantes du tenseur des déformations.
   (b) Calculer les composantes du tenseur des contraintes.
   (c) Etablir l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait u.
   (d) En déduire l'équation de propagation.
   (e) Le milieu de propagation s'étend de $x=0$ à $-\infty$ et se trouve initialement au repos et non déformé. Les conditions aux limites sont telles que $T_{11}(0,t)=H(t)\ e^{-t}$, où $H(t)$ est la fonction échelon de Heaviside. Calculer le déplacement de particules.
   (f) Commenter les résultats obtenus. Comment pourrait-on réaliser expérimentalement une telle situation ?

2. *Cas de la contrainte longitudinale :* Dans ce cas la seule composante non nulle du tenseur des contraintes est $T_{11}(x,t)$.
   (a) En tenant compte du fait que $T_{22} = T_{33} = 0$, montrer que $S_{22} = S_{33} = -\nu \ S_{11}$ et que $T_{11} = E \ S_{11}$. Donner les expressions du module de Poisson ν et du module d'Young E en fonction des coefficients de Lamé.
   (b) Etablir l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait u.
   (c) En déduire l'équation de propagation.
   (d) Le milieu de propagation s'étend de $x = 0$ à $-\infty$ et se trouve initialement au repos et non déformé. Les conditions aux limites sont telles que $T_{11}(0,t) = H(t) \ e^{-t}$, où $H(t)$est la fonction échelon de Heaviside. Calculer la composantes $T_{11}(x,t)$ du tenseur des contraintes.
   (e) Commenter les résultats obtenus. Comment pourrait-on réaliser expérimentalement une telle situation ?

Exercice 12 :

Soit une plaque d'épaisseur L constituée d'un matériau élastique dont les coefficients de Lamé sont λ et μ. On suppose que la plaque est d'extension infinie dans les directions Oy et Oz et que la frontière droite $(x = L)$ est libre de toute contrainte. On suppose que la plaque est initialement au repos et non déformée. La frontière gauche $(x = 0)$ est soumise à une contrainte uniforme $T_{xx} = T_0 \ H(t)$ où T_0 est une constante et $H(t)$ est la fonction de Heaviside définie dans l'exercice précédent. Calculer l'expression du déplacement de particules $u_x(x,t)$:

1. entre les instants $\mathrm{t}_0 = 0$ et $t_1 = \dfrac{L}{c_L}$
2. entre les instants $t_1 = \dfrac{L}{c_L}$ et $t_2 = \dfrac{2L}{c_L}$.

Dans ces expressions c_L représente la vitesse de propagation des ondes longitudinales.

Exercice 13 :

On considère une plaque constituée d'un milieu élastique d'épaisseur L. On suppose que la plaque a des dimension infinies selon Oy et Oz, et que la face droite et libre de toute contrainte. On suppose également que la face gauche,initialement au repos, est soumise à un déplacement initial normal donné par $u_x(0,t) = U_0 \ \exp(j\omega t)$ où U_0 est une constante. Expliquer pourquoi le déplacement résultant peut se mettre sous la forme

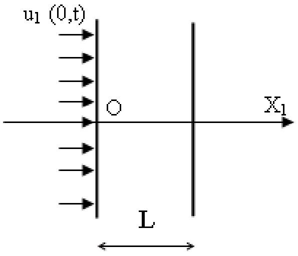
$$u_x(x,t) = A \ \exp[j(\omega t - kx)] + B \ \exp[j(\omega t + kx)]$$

Ecrire les conditions aux frontières en $x = 0$ et $x = L$ et montrer alors que le déplacement peut s'écrire, en chaque point d'abscisse x, sous la forme : $u_x(x,t) = U(x) \ \exp(j\omega t)$. Donner l'expression de $U(x)$.

Exercice 14 :

On considère un milieu élastique d'épaisseur L soumis à une contrainte de cisaillement sur sa face gauche, définie par : $T_{xy} = T_0 \ \exp(j\omega t)$. La face droite de la plaque est soudée à un milieu de rigidité infinie. Écrire les conditions au frontières et en déduire l'expression du déplacement de particule résultant en chaque point de la plaque.

Exercice 15 :



Soit une plaque d'un matériau élastique d'épaisseur L et dont les coefficients de Lamé sont λ e t μ. Sur sa frontière gauche, cette plaque est soumise à un déplacement sinusoïdal de la forme $u_1(0,t) = U_0\ e^{i\omega t}$. La frontière droite de la plaque est libre. Calculer le déplacement de particules résultant en un point quelconque à l'intérieur du matériau ; montrer que ce déplacement peut se mettre sous la forme $u_1(x,t) = U(x)\ e^{i\omega t}$

2 Ondes acoustiques dans les fluides

Exercice 1 : En utilisant la relation de thermodynamique : $\frac{T_0+\Delta T}{T} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ où $\gamma = \frac{c_P}{c_T}$et $T°K$, estimer le changement local de la température de l'air lors de la propagation d'une onde acoustique.

Exercice 2 : Calculer et représenter graphiquement les variations en fonction de la température de la longueur d'onde d'une onde ultrasonore de fréquence $f = 1MHz$, se propageant dans l'eau. On donne la loi de dépendance de la vitesse de propagation dans l'eau en fonction de la température :

$$c(P,\tau) = 1402.7 + 488\tau - 482\tau^2 + 135\tau^3 + \left(15.9 + 2.8\tau + 2.4\tau^2\right)(P_0/100)$$

où P_0 est la pression à l'équilibre mesurée en bar ($1bar = 10^5\ P_a$) et $\tau = T/100, T$ étant la température en degrés Celsius. Cette relation est précise à 0.05% pour $0 < T < 100°C$ et pour $0 \leq P_0 \leq 200\ bar$.

Exercice 3 : Estimer le degré de validité du calcul de la vitesse de propagation des ondes ultrasonores dans la glycérine lorsqu'on utilise le module élastique isotherme κ_T au lieu du module élastique adiabatique κ_A . On donne :

- la relation thermodynamique : $\kappa_A = \kappa_T \left(1 + \dfrac{\alpha_T^2\ T\ \kappa_T}{\rho_0\ c_V}\right)$ où $T°K$ et α_T étant le coefficient de dilatation isotherme.
- Caractéristiques de la glycérine à $T = 300°K$: $\alpha_T = 0.59 \times 10^{-3}\ K^{-1}$, $c_V = 2.39\ kJ/kg.K$, $\kappa_T = 0.22 \times 10^{-9}\ m^2/N$.

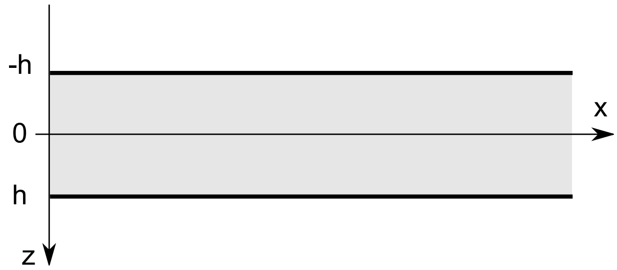
Exercice 4 : Etudier le déphasage entre la pression et la vitesse de particules d'un champ acoustique résultant de la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques de même amplitude et de même fréquence, se propageant dans des sens opposés.

Exercice 5 : Vérifier que dans le cas particulier d'une onde plane progressive sinusoïdale, la densité instantanée d'énergie satisfait l'équation de propagation.

Exercice 6 : Etablir une relation entre la densité instantanée d'énergie et la densité instantanée de flux d'énergie sous la forme d'une équation aux dérivées partielles exprimant la conservation de l'énergie.

3 Ondes guidées

Exercice 1 :



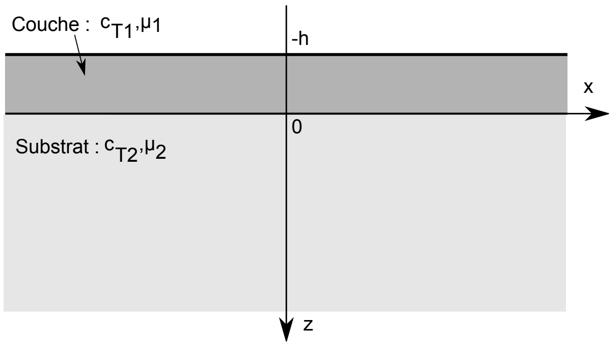
Soit un milieu élastique constitué d'une plaque d'épaisseur $2h$ et de dimensions latérales supposées infinies. Les deux faces de la plaque sont rigidement liées à un support fixe. Une onde plane longitudinale se propage dans ce milieu dans la direction de l'axe des x avec une vitesse c.

On recherche, pour le déplacement de particules $\vec{u}$ une solution du type $\vec{u} = u\ \vec{u}_y$ où

$$u = g(z)\ e^{i(\omega t - kx)}$$

1. V_S et V_A étant les vitesses de phase pour les modes symétriques et antisymétriques respectivement, établir les relations de dispersion $V_S = F(\omega)$ et $V_A = F'(\omega)$.
2. Tracer les courbes de dispersion $V_S = F(\omega)$ et $V_A = F'(\omega)$.
3. Interpréter et discuter les résultats obtenus.

Exercice 2 :



Les ondes de Love sont des ondes de cisaillement à polarisation horizontale qui se propagent à l'interface entre une couche d'épaisseur h et un substrat élastique supposé d'extension semi-infinie.

Le but de cet exercice est d'obtenir la relation de dispersion pour les ondes de Love dans le cas où la vitesse de propagation c_{T1} de l'onde transversale SH dans la couche d'épaisseur h est inférieure à la vitesse de propagation c_{T2} de l'onde transversale SH dans le substrat. Les coefficients de Lamé utiles étant respectivement μ_1 et μ_2.

1. Ecrire les équations de propagation pour le déplacement de particules des ondes transversales
   – dans la couche : $\vec{u}_1(x,z,t) = u_1(x,z,t)\ \vec{e}_y$
   – dans le substrat : $\vec{u}_2(x,z,t) = u_2(x,z,t)\ \vec{e}_y$.
2. Rechercher une solution particulière sous les formes suivantes :
   – Couche : $-h \leqslant z \leqslant 0$

   $$u_1(x,z,t) = F(z) \exp\left[i(\omega t - kx)\right]$$

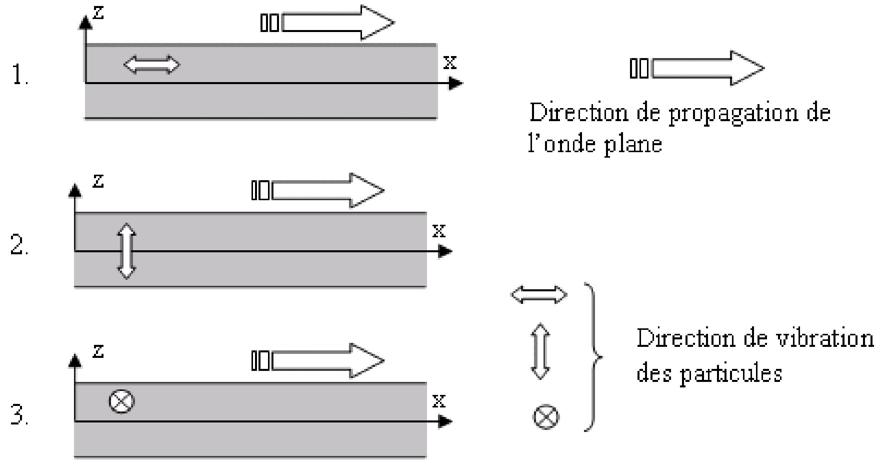
   – Substrat : $z \geqslant 0$

   $$u_2(x,z,t) = G(z) \exp\left[i(\omega t - kx)\right]$$

   Quelle est l'expression des fonctions $F(z)$ et $G(z)$?
3. En déduire les expressions des fonctions d'amplitude $F(z)$ et $G(z)$ qui satisfont les conditions aux frontières en $z = -h$ et $z \to +\infty$.

4. Écrire les relations de continuité en $z = 0$.
5. En déduire la relation de dispersion.

Exercice 3 :



Chacun des cas représentés par les figures ci-dessus, correspond à une plaque élastique (ρ, λ, μ) d'épaisseur 2d, placée dans le vide et parcourue par une onde élastique plane se propageant dans la direction de l'axe Ox. Pour chacune des polarisations représentées sur les figures ci-dessous, écrire :

- les équations aux dérivées partielles à résoudre,
- les conditions aux frontières
- indiquer la méthode de résolution (La résolution des équations n'est pas demandée).

4 Réflexion - transmission d'ondes élastiques

Exercice 1 : On considère deux milieux fluides semi-infinis de caractéristiques respectives (ρ_1, c_1) et (ρ_2, c_2). Une onde acoustique harmonique plane se propage dans le premier milieu et arrive sous incidence normale sur l'interface plan séparant les deux milieux. $Z_1 = \rho_1 c_1$ et $Z_2 = \rho_2 c_2$ sont les impédances acoustiques respectives de ces deux milieux :

1. Calculer
   (a) le coefficient de réflexion pour la pression acoustique $R_P = f\,(Z_1, Z_2)$
   (b) le coefficient de transmission pour la pression acoustique $T_P = g\,(Z_1, Z_2)$
2. Etudier et discuter les cas particuliers où :
   (a) $Z_1 = Z_2$.
   (b) $Z_1 < Z_2$.
   (c) $Z_1 > Z_2$.
   (d) $Z_1 \ll Z_2$.
   (e) $Z_1 \gg Z_2$.

Exercice 2 : On considère deux milieux fluides semi-infinis de caractéristiques respectives (ρ_1, c_1) et (ρ_3, c_3)séparés par une couche de fluide de caractéristiques (ρ_2, c_2) et d'épaisseur L. Une onde acoustique harmonique plane se propage dans le premier milieu et arrive sous incidence normale sur l'interface plan séparant les deux milieux (ρ_1, c_1) et (ρ_2, c_2).

1. Ecrire les équations et les relations de continuité qui permettent de calculer le coefficient de réflexion pour la pression à l'interface (ρ_1, c_1) - (ρ_2, c_2).
2. Montrer que ce coefficient de réflexion peut sécrire sous la forme :

$$R_P = \frac{\left(1 - \frac{Z_1}{Z_3}\right)\ \cos\left(k_2 L\right) + i\left(\frac{Z_2}{Z_3} - \frac{Z_1}{Z_2}\right)\ \sin\left(k_2 L\right)}{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right)\ \cos\left(k_2 L\right) + i\left(\frac{Z_2}{Z_3} + \frac{Z_1}{Z_2}\right)\ \sin\left(k_2 L\right)}$$

   où les Z_i sont les impédances acoustiques respectives de ces milieux, k_2 est le vecteur d'onde dans le milieu 2.
3. Etudier et discuter les cas particuliers où :
   (a) $Z_1 = Z_3$; dans ce cas pour quelle épaisseur L , le coefficient de réflexion s'annule-t-il ?.
   (b) Si $Z_1 \neq Z_3$ que vaut le coefficient de réflexion :
   – lorsque $L = n\frac{\lambda_2}{2}$
   – lorsque $L = (2n+1)\,\frac{\lambda_2}{4}$.

Exercice 3 : On considère deux milieux fluides semi-infinis de caractéristiques respectives (ρ_1, c_1) et (ρ_2, c_2). Une onde acoustique harmonique plane se propage dans le premier milieu et arrive sous incidence oblique sur l'interface plan séparant les deux milieux.

1. Calculer
   (a) le coefficient de réflexion pour le potentiel acoustique $R_\phi = f\left(Z_1, Z_2, \theta_1, \theta_2\right)$
   (b) le coefficient de transmission pour le potentiel acoustique $T_\phi = g\left(Z_1, Z_2, \theta_1, \theta_2\right)$

   θ_1 et θ_2 sont respectivement l'angle d'incidence et l'angle de réfraction. $Z_1 = \rho_1 c_1$ et $Z_2 = \rho_2 c_2$ sont les impédances acoustiques respectives de ces deux milieux.
2. Etudier et discuter les cas particuliers suivants :
   (a) Le second milieu est un milieu solide rigide.
   (b) La masse volumique ρ_2 du second milieu est de densité très faible devant la masse volumique ρ_1 du premier milieu.
3. Discuter les cas d'incidences particulières suivants :
   (a) Incidence normale $(\theta_1 = 0)$.
   (b) Incidence rasante $\left(\theta_1 = \frac{\pi}{2}\right)$.
   (c) Incidence supérieure à l'angle d'incidence critique dans le cas où $c_2 > c_1$.
   (d) Angle d'intromission correspondant à la valeur de θ_1 pour laquelle $R_\phi = 0$.

Exercice 4 :

On considère deux milieux élastiques semi-infinis de caractéristiques respectives $(\rho_1, c_{L_1}, c_{T_1})$ et $(\rho_2, c_{L_2}, c_{T_2})$. Une onde harmonique plane transversale SH se propage dans le premier milieu et arrive sous incidence oblique sur l'interface plan séparant les deux milieux.

1. Calculer
   (a) le coefficient de réflexion $R = f\left(\rho_1, \rho_2, c_{T_1}, c_{T_2}, \theta_1, \theta_2\right)$
   (b) le coefficient de transmission $T = f\left(\rho_1, \rho_2, c_{T_1}, c_{T_2}, \theta_1, \theta_2\right)$

θ_1 et θ_2 étant respectivement l'angle d'incidence et l'angle de réfraction.

2. Discuter l'existence d'angles critiques.

Exercice 5 :

On considère un milieu élastique semi-infini occupant le demi-espace $y > 0$ et dont la frontière $y = 0$ est rigidement liée. Les caractéristiques du milieu sont la masse volumique ρ et les coefficients de Lamé λ et μ. Une onde plane longitudinale harmonique se propageant dans le milieu arrive sous incidence oblique θ_1 sur la frontière rigide.

1. Calculer les coefficients de réflexion pour le déplacement de particules, pour les ondes réfléchies longitudinale et transversale en fonction de l'angle d'incidence θ_1 et de l'angle de réflexion θ_2 de l'onde transversale.
2. Calculer la contrainte mécanique normale résultante exercée sur la frontière $y = 0$.

Exercice 6 :

La figure ci-dessous représente une situation physique correspondant à :

- Un milieu formé de deux cristaux possédant chacun un axe d'ordre 4, orienté selon Ox_3 et parallèle au plan de jonction. Les seules constantes élastiques non nulles sont C_{11}, C_{12}, C_{44}, C'_{11}, C'_{12} et C'_{44} .
- Une onde incidente transversale polarisée selon Ox_3 (plan d'incidence Ox_1x_2) appelée onde TH (transversale horizontale).

Les déplacements permis dans les deux cristaux sont parallèles à l'axe Ox_3 et la polarisation de l'onde incidente se conserve. On obtient donc deux ondes, l'une réfléchie et l'autre transmise de même polarisation transversale que l'onde incidente.

1. Calculer le coefficient de réflexion et le coefficient de transmission pour le déplacement en fonction de l'angle d'incidence θ_I de l'angle de réfraction θ_T des constantes élastiques et des masses volumiques respectives de chacun des cristaux.
2. Donner l'allure des courbes représentant les variations, en fonction de I , du coefficient de réflexion dans les deux cas suivants :
   (a) Premier milieu : Silicium (Si) - Second milieu : Silice (SiO2)
   (b) Premier milieu : Silice (SiO2) - Second milieu : Silicium (Si)

Matériau	Classe	$C_{11}(N/m^2)$	$C_{12}(N/m^2)$	$C_{44}(N/m^2)$	$\rho(kg/m^3)$
Silice ($Si0_2$)	isotrope	7.85×10^{10}	1.61×10^{10}	3.12×10^{10}	2.203×10^3
Silicium(Si)	m3m	$16.56{\times}10^{10}$	6.39×10^{10}	7.95×10^{10}	2.329×10^3

Exercice 7 :

Calcul et tracé des coefficients et de réflexion pour le déplacement de particules en fonction de l'angle d'incidence.

Considérer deux cas d'onde incidente :

- Onde longitudinale
- Onde transversale SV

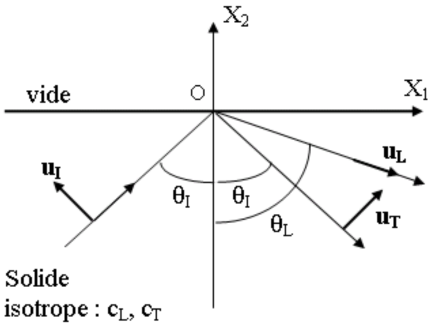
Pour deux milieux semi-infinis séparés par un interface plan :

- Milieu 1 : Plexiglas, Milieu 2 : Aluminium
- Milieu 1 : Aluminium, Milieu 2 : Plexiglas

Caractéristiques des deux milieux	C_L (m/s)	C_T (m/s)	$\rho(kg/m^3)$
Plexiglas	2670	1120	1.18×10^3
Aluminium	6320	3130	2.7×10^3

1. Faire les figures en indiquant soigneusement toutes les grandeurs.
2. Écrire les relations de continuité sous forme matricielle.
3. Proposer une méthode matricielle permettant de calculer les coefficients de réflexion et de transmission.
4. Utiliser un logiciel de calcul scientifique pour pour calculer les coefficients de réflexion et de transmission.
5. Tracer les variations de ces coefficients en fonction de l'angle d'incidence.
6. Commenter les courbes obtenues (indiquer en particulier les valeurs des éventuels angles critiques et expliquer ce qui se produit au-delà de ces angles critiques).

Exercice 8 :

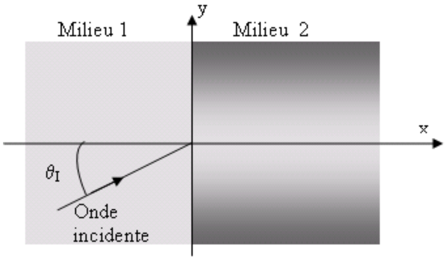


Une onde transversale arrive sous incidence oblique, sur la surface libre d'un solide isotrope.

1. Calculer les coefficients de réflexion r_{TT} et de conversion r_{TL} en fonction de θ et du coefficient $\eta = c_T/c_L$.
2. Calculer la composante normale u_N du déplacement de particules de la surface. Tracer les variations de u_N en fonction de l'angle d'incidence θ pour un matériau tel que $\eta = c_T/c_L = 0.5$.

Exercice 9 :

Onde incidente	Milieu 1	Milieu 2
Longitudinale	Milieu élastique :λ_1, μ_1	Milieu élastique :λ_1, μ_1
Longitudinale	Milieu élastique :λ_1, μ_1	Vide
Transversale SH	Milieu élastique : λ_1, μ_1	Milieu élastique :λ_2, μ_2
Transversale SH	Milieu élastique : λ_1, μ_1	Vide
Transversale SV	Milieu élastique : λ_1, μ_1	Milieu élastique :λ_2, μ_2
Transversale SV	Milieu élastique :λ_1, μ_1	Vide



Pour chacun des cas donnés dans le tableau ci-dessus et correspondant à la figure ci-contre :

1. Représenter les différentes ondes réfléchies et transmises (vecteur d'onde et vecteur déplacement de particules). N.B.
2. Ecrire les relations de continuité à l'interface, qui permettent le calcul des différents coefficients de réflexion et de transmission.

Représenter les figures avec soin. Ecrire les différentes relations de continuité en prenant soin de noter convenablement les différentes grandeurs et les indices correspondants. Le calcul des coefficients de réflexion et de transmission n'est pas demandé.

5 Rayonnement d'ondes acoustiques

Exercice 1 : On se propose d'étudier le rayonnement d'une onde acoustique dans un milieu fluide de masse volumique ρ, par une sphère de rayon a dont la surface oscille radialement avec une vitesse d'amplitude v_0 avec une pulsation ω.

1. En raison de la symétrie sphérique, on considérera la solution sous la forme d'une onde sphérique divergente. Montrer que dans le cas du champ lointain, i.e $\lambda >> a$, la pression acoustique s'écrit sous la forme :

$$p\,(r,t) = \frac{A}{r}\ \exp\left[i\left(\omega t - kr\right)\right]$$

   Donner l'expression de A.

2. Soit un dipôle constitué par deux sources ponctuelles séparées par la distance ℓ suivant la direction Ox avec $\ell << \lambda$. Les deux sources vibrent en opposition de phase avec la même amplitude v_0 et la même pulsation ω ; la symétrie n'est plus sphérique mais cylindrique d'axe Ox. Pour le champ lointain défini par $r >> \lambda >> \ell$, montrer que la pression acoustique du dipôle à la distance r et à l'angle θ par rapport à Ox, s'écrit :

$$p\,(r,\theta,t) = q\ \frac{\exp\left[i\left(\omega t - kr\right)\right]}{r}\ \cos\left(\theta\right)$$

   (a) Donner l'expression de q.

   (b) Etudier la directivité de ce dipôle.

Exercice 2 :

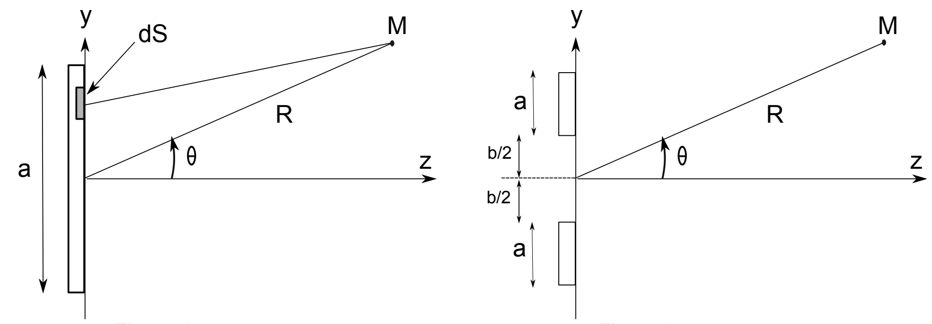


Figure 1 Figure 2

1. Utiliser l'intégrale de Rayleigh qui exprime la pression acoustique rayonnée par un source d'extension S, encastrée dans un baffle rigide et vibrant avec une vitesse normale $v_n = V_n\ e^{i\omega t}$ pour calculer le champ de pression rayonné par une source rectangulaire encastrée dans un baffle rigide et considérée comme un piston rectangulaire de longueur L très grande devant la largeur a . Le plan du baffle est constitué par le plan xOy et la surface rayonnante du piston est définie par $\left(-\frac{a}{2} < y < \frac{a}{2}, z = 0\right)$ (Figure 1). Sachant que $dS = Ldy$ et $\frac{\partial}{\partial x} = 0$, montrer qu'à de grandes distances de la source, l'amplitude de la pression peut s'écrire sous la forme : $p\,(R,\theta,t) = P\,(R) \cdot D\,(\theta)$ où $D\,(\theta) = \frac{\sin(\beta)}{\beta}$est la fonction directivité ; exprimer β en fonction de la longueur d'onde λ et de l'angle θ.

2. Calculer le champ de pression rayonné à de grandes distances par l'ensemble constitué de deux transducteurs identiques à celui de la question précédente, séparés par une distance b et vibrant en phase (Figure 2). Etablir l'expression de la directivité $D(\theta)$. Discuter et comparer avec le résultat de la question précédente.

6 Transducteur piézoélectrique pour ondes de volume

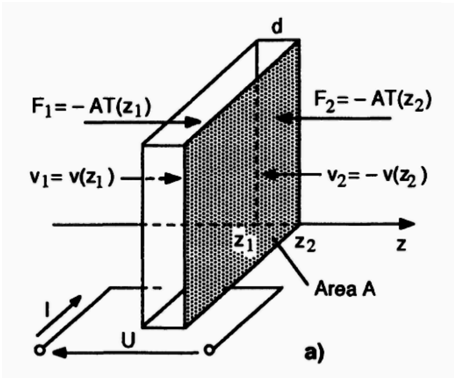


FIG. 1: Pastille piézoélectrique avec faces métallisées

Un transducteur comprend essentiellement un matériau piézoélectrique portant deux électrodes métalliques(fig. 1). Le champ électrique du signal appliqué entre les électrodes met en vibration le solide piézoélectrique dont l'épaisseur est égale à une fraction de la longueur d'onde élastique. L'orientation cristallographique du solide piézoélectrique est choisie pour que le mode élastique désiré soit préférentiellement excité.

On appelle :

- U : la différence de potentiel électrique
- I : le courant débité par le générateur électrique item rho : la masse volumique de la pastille piézoélectrique.
- d : l'épaisseur de la pastille piézoélectrique
- A :surface des électrodes
- C^E : la constante élastique à champ électrique constant
- ε^S : la permittivité diélectrique à déformation constante
- e : la constante piézoélectrique
- T : la contrainte mécanique.
- F_1, F_2 : les forces mécaniques exercées sur les faces $1(z = -d/2)$ et 2 $(z = +d/2)$.
- $\dot{u}_1,\ \dot{u}_2$: les vitesses respectives de ces faces.
- $v_1 = \dot{u}_1,\ v_2 = -\dot{u}_2$
- C_0 : Capacité statique de la pastille piézoélectrique.

Si ces conditions sont satisfaites, on obtient dans ce cas un système unidimensionnel.

1. Ecrire T et D en fonction de la déformation $\frac{\partial u}{\partial z}$ et du champ électrique E.
2. Montrer que ces deux équations peuvent être remplacées par les deux équations

suivantes :

$$T = C^D \frac{\partial u}{\partial z} - hD$$
$$E = \frac{1}{\varepsilon^S} D - h \frac{\partial u}{\partial z}$$

3. Ecrire l'équation du mouvement élastique.
4. Ecrire le théorème de Gauss pour le vecteur excitation électrique D.
5. Ecrire la relation liant le courant de déplacement au courant I débité dans le transducteur par le circuit extérieur.
6. Calculer la vitesse de propagation des ondes élastiques dans le solide piézoélectrique.
7. En raison des réflexions multiples sur les faces 1 et 2, la vitesse de particules à l'intérieur de la pastille piézoélectrique peut s'écrire, en omettant le terme $e^{i\omega t}$:

$$\dot{u} = a e^{-ikz} + b e^{+ikz}$$

   Donner l'expression de k en fonction de $C^D,\ \rho\ et\ \omega$.
8. Calculer a et b en fonction de $\dot{u}_1$ et $\dot{u}_2$.
9. En déduire l'expression de $\partial T/\partial t$ en fonction de l'impédance acoustique Z du milieu piézoélectrique.
10. Calculer les forces sur chacune des faces en fonction de $\mathcal{Z} = AZ$
11. Calculer a et b en fonction de $\dot{u}_1$ et $\dot{u}_2$.
12. Etablir les expressions de F_1, F_2 et U en fonction de v_1, v_2 et I.
13. Une pastille piézoélectrique peut être symbolisée par une hexapole à deux entrées acoustiques et une entrée électrique (fig.2). Calculer les éléments de la matrice impédance définie par :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Matrice \\ Impedance \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ I \end{pmatrix}$$

14. En tenant compte de l'identité

$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \tan\frac{\theta}{2}$$

   montrer que :

$$F_1 = -i\frac{\mathcal{Z}}{\sin kd}(v_1 + v_2) + i\mathcal{Z}\tan\frac{kd}{2} v_1 + f$$
$$F_1 = -i\frac{\mathcal{Z}}{\sin kd}(v_1 + v_2) + i\mathcal{Z}\tan\frac{kd}{2} v_2 + f$$

   avec

$$f = hC_0\left[U - \frac{hC_0(v_1 + v_2)}{i\omega C_0}\right]$$

15. En déduire le circuit équivalent de Masson-Redwood (fig. 3).

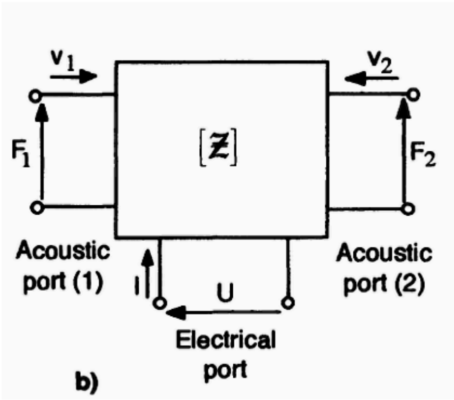


FIG. 2: Hexapole

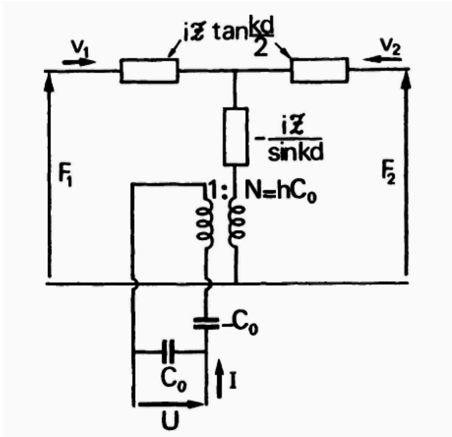
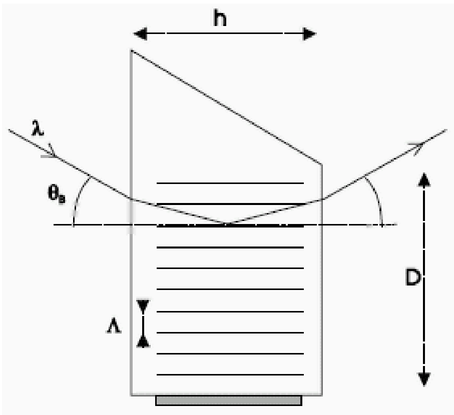


FIG. 3: Schéma de Masson-Redwood

7 Interaction acousto-optique

Principaux résultats



L'interaction acousto-optique. se produit lorsqu'un faisceau lumineux de longueur d'onde λ traverse un milieu dont l'indice est modulé par une onde acoustique de longueur d'onde Λ. Pour distinguer les deux types fondamentaux d'interaction acousto-optique, on utilise le paramètre $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{Q} = \frac{2n\lambda h}{\Lambda}$$

- Si $Q \ll 1$, ou encore si $h \ll \frac{2n\Lambda^2}{\lambda}$, l'onde incidente va diffracter suivant plusieurs ordres. C'est le régime de Raman-Nath correspondant a la diffraction par un réseau mince.
- Si $Q \gg 1$, ou encore si $h \gg \frac{2n\Lambda^2}{\lambda}$, l'onde incidente va diffracter suivant un seul ordre. C'est le régime de Bragg correspondant à la diffraction par un réseau épais.

La tranche intermédiaire correspondant à un regime composite n'a en pratique aucun interêt. Dans tous les cas, les ondes diffractées ont une fréquence différente de la fréquence de l'onde incidente. Les deux types d'interactions les plus utilisés sont donc :

1. **Interaction de Raman-Nath** (incidence normale) : La variation sinusoïdale de l'indice a un effet analogue à celui d'un réseau de phase de pas Λ : on trouve les

maximums pour

$$\sin\theta = p\ \frac{\lambda}{\Lambda}$$

p est l'ordre de diffraction.

2. **Interaction de Bragg** : La diffraction se fait sur un seul ordre. Deux conditions sont nécessaires :
   (a) l'une concerne les dimensions du cristal :
   $$h \geq \frac{2n\Lambda^2}{\lambda}$$
   (b) l'autre l'angle d'incidence :
   $$\sin\theta = \frac{\lambda}{2\ \Lambda}$$

On utilise un cristal d'oxyde paratellurique TeO_2 dont les caractéristiques sont :
- indice n = 2,26,
- vitesse du son v= 617m/s.

La longueur d'onde de la lumière est $\lambda = 0,633\mu m$ et la fréquence de l'onde acoustique est $N = 30MHz$. La dimension utile du cristal est $D = 30mm$.

1. Quelle est l'épaisseur minimale h_C permettant d'obtenir le régime de Bragg.
2. Calculer l'angle de Bragg.

Exercice 2 : On considère une onde acoustique plane de fréquence f qui se propage dans la direction Ox avec un vecteur d'onde $\vec{Q} = Q\ \vec{u}_x$. On suppose le milieu homogène et isotrope, de sorte que l'onde peut être représentée par une grandeur scalaire qui correspond à une variation locale de pression. Cette onde va ainsi créer une modulation de la masse volumique $\rho(x,t)$ du milieu autour de sa valeur à l'équilibre ρ_0 :

$$\rho(x,t) = \rho_0\ \left[1 + \Delta\cos(\Omega t - Qx)\right]$$

dont l'amplitude de la variation relative est typiquement de l'ordre de 10^{-4}.

1. En utilisant la relation de Lorenz-Lorentz qui donne la dépendance de la permittivité diléctrique ε_R du milieu en fonction de la masse volumique, montrer que l'onde acoustique induit une modulation de l'indice optique n.
   $$n = n_0 + \delta n\cos(\Omega t - Qx)$$
   avec $\delta n = \frac{\gamma\Delta}{2n_0}$.
   où n_0 est l'indice de réfraction du milieu, à l'équilibre. Donner l'expression de γ.
2. Donner l'ordre de grandeur de γ dans le cas de l'eau.
3. Soit une onde lumineuse plane monochromatique de longueur d'onde λ arrivant sous incidence normale sur ce réseau, dont la vibration lumineuse incidente s'écrit :
   $$S_{in}(x,z,t) = S_0\ e^{i(\omega t - kz)}$$
   Pour la suite des questions, nous considérons le cas limite où le réseau est suffisamment mince pour qu'on puisse considérer que l'onde soit diffractée sur un *réseau de phase* $\varphi(x)$ infiniment mince. La variation de phase $\varphi(x)$ correspond à l'intégration sur l'épaisseur h du milieu du trajet optique obtenu en utilisant l'expression de $n(x,t)$ de la question 1°).

(a) Justifier le fait la vibration lumineuse après traversée de ce réseau s'écrit :

$$S_{out}(x,z,t) = S_0 e^{i(\varphi(x)+\omega t-kz)}$$

avec

$$\varphi(x) = \varphi_0 \ \cos(\Omega t - Qx)$$

(b) Exprimer φ_0 a partir de l'expression de la modulation δn de l'indice de réfraction du milieu et de l'épaisseur e du milieu traversé. On rappelle qu'un terme de la forme $e^{\varphi_0 \cos u}$ avec $\varphi_0 \ll 1$ peut être développé en une série de fonctions de Bessel Jn :

$$e^{\varphi_0 \cos u} = J_0(\varphi_0) + i2J_1(\varphi_0)\cos u - 2J_2(\varphi_0)\cos 2u - i2J_3(\varphi_0)\cos 3u + \ldots$$

(c) Justifier brièvement que la propagation libre va faire apparaître différents ordres de diffraction : $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm \ell, \ldots$ tels que l'ordre ℓ correspond à une propagation dans la direction θ qui est donnée par la relation :

$$\sin\theta = \ell \frac{Q}{k}$$

(d) Justifier également que la fréquence optique ω_ℓ de l'onde diffractée dans l'ordre ℓ est décalée par rapport à la fréquence initiale ω de la vibration lumineuse et qu'elle s'exprime par

$$\omega_\ell = \omega + \ell\Omega$$

(e) On considère une onde acoustique de fréquence $f = 5MHz$, qui se propage dans le fluide avec une vitesse $v = 1500m/s$. La vibration lumineuse provient d'un laser He-Ne à la longueur d'onde $\lambda = 633nm$. Calculer la différence angulaire entre deux ordres de diffraction consécutifs, et la séparation entre les taches de diffraction correspondantes sur un écran placé à une distance de $1m$.

(f) Citer quelques applications possibles de ce dispositif.

4. Epaisseur critique : Le calcul précédent n'est valable que pour des échantillons infiniment minces, puisque chaque ordre de diffraction est en fait généré tout le long de la propagation. On se propose de déterminer au bout de quelle épaisseur h_C de milieu traversée cette approximation, dite de Raman-Nath, n'est plus valable. Montrer que l'épaisseur critique vaut :

$$h_C = \frac{n_0 \Lambda^2}{2\lambda}$$

et calculer cette longueur pour les valeurs données précédemment des différents paramètres.