1-***INTRODUCTION*** :

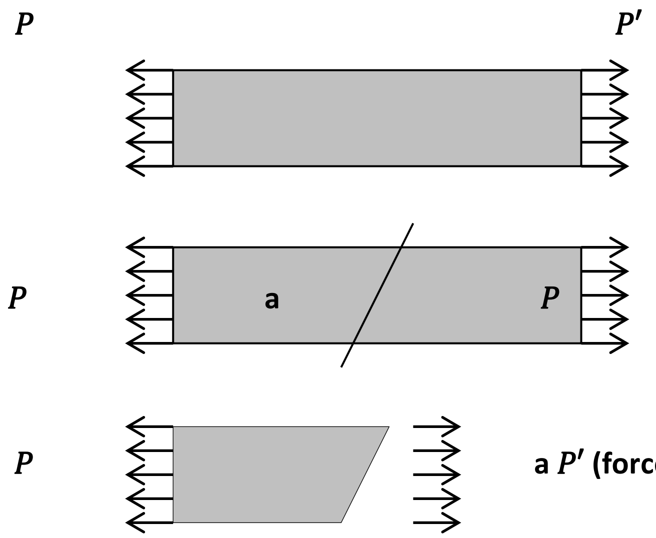
Continuité : le matériau reste continu, même après déformation (pas de cassure…)

Élasticité : l'évaluation du comportement du matériau reste dans le domaine élastique.

Homogénéité : même propriétés physiques pour tout les points (masse volumique, densité, Inertie.)

Isotropie : même propriétés élastiques dans toutes les directions (module d'Young E, coefficient de Poisson υ etc..).

2-***DEFINITION:***



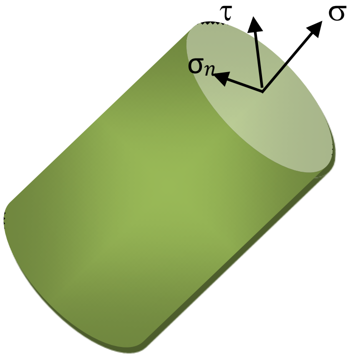
a P' (forces internes résistantes)

Avec la méthode de découpe, les forces internes deviennent externes et égalent à P pour assurer l'équilibre.

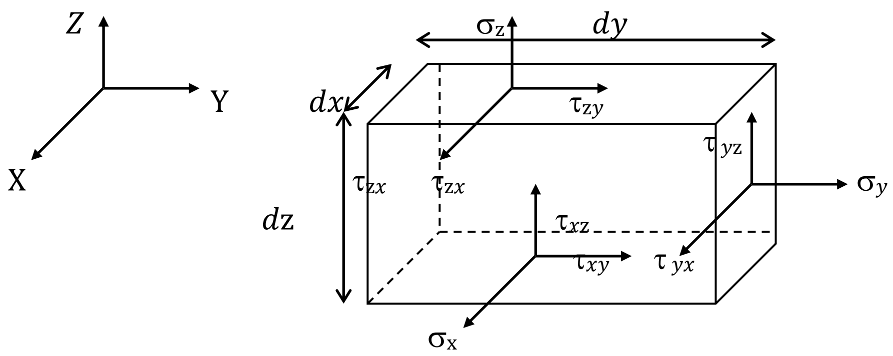
Ces forces internes sont appelées *CONTRAINTES.*

En général :

La direction de la contrainte est quelconque, (Normale et Tangentielle).



3- ***NOTATION ET CONVENTION DE SIGNE*** :



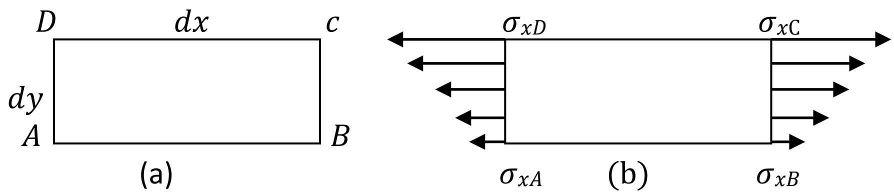
Composante de contrainte :

τ_{ij} $\begin{cases} i\text{: face normale à l'axe considéré.} \\ j\text{: face tangentielle à l'axe considéré.} \end{cases}$

Contrainte en un point (x,y,z) s'est écrit sous forme de tenseur de contrainte σ_M

$$[\sigma]n = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

4-***ACCROISSEMENT DES COMPOSANTES DE LA CONTRAINTE*** :



Pt A : $\sigma_{xA} = \sigma_x$

PtB: $\sigma_{xB} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$

PtC: $\sigma_{xC} = \sigma_{xB} + \frac{\partial \sigma_{xB}}{\partial y} dy \Longrightarrow \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} dxdy$

Pt D: $\sigma_{xD} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy$

D'où $\sigma_{xC} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy$

$\Longrightarrow$ Linéarité de distribution

Force sur AD : $= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_{xD}) dy = \sigma_x \sigma_y + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy^2$

Force sur BC : $\frac{1}{2}(\sigma_{xB}+\sigma_{xC})dy = \sigma_x dy + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dxdy + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy^2$

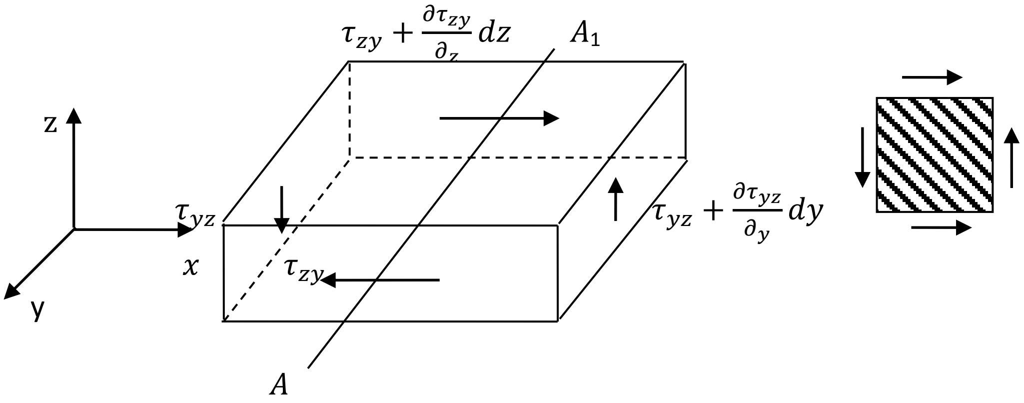
Force résultante sur l'élément considéré est : $(A\,BCD)$ $(\neq Ce)$

$$F = \left[\sigma_x dy + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dxdy + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_{\dot{x}}}{\partial y}dy^2\right] - \left[\sigma_x dy + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy^2\right]$$

$$F = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dxdy$$

F Par unité de surface $(dy\ x1)$ ⇒ L'accroissement de contrainte suivant dx

5-LOI DE RECIPROCITE DES CONTRAINTES TRANGENTIELLUES :



Équilibre des M^{mts} / AA_1 :

$$(\tau_{yz}dxdz)\frac{dy}{2} - (\tau_{zy}dxdy)\frac{dz}{2} + (\tau_{yz} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy)dxdz\frac{d_y}{2} - (\tau_{zy} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz)dxdy\frac{d_z}{2} = 0$$

$\tau_{yz}dxdydz - \tau_{zy}dxdydz = 0 \Longrightarrow \tau_{yz} - \tau_{zy} = 0 \quad \Longrightarrow$

$\tau_{yz} = \tau_{zy}$

$\Longrightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$ et $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

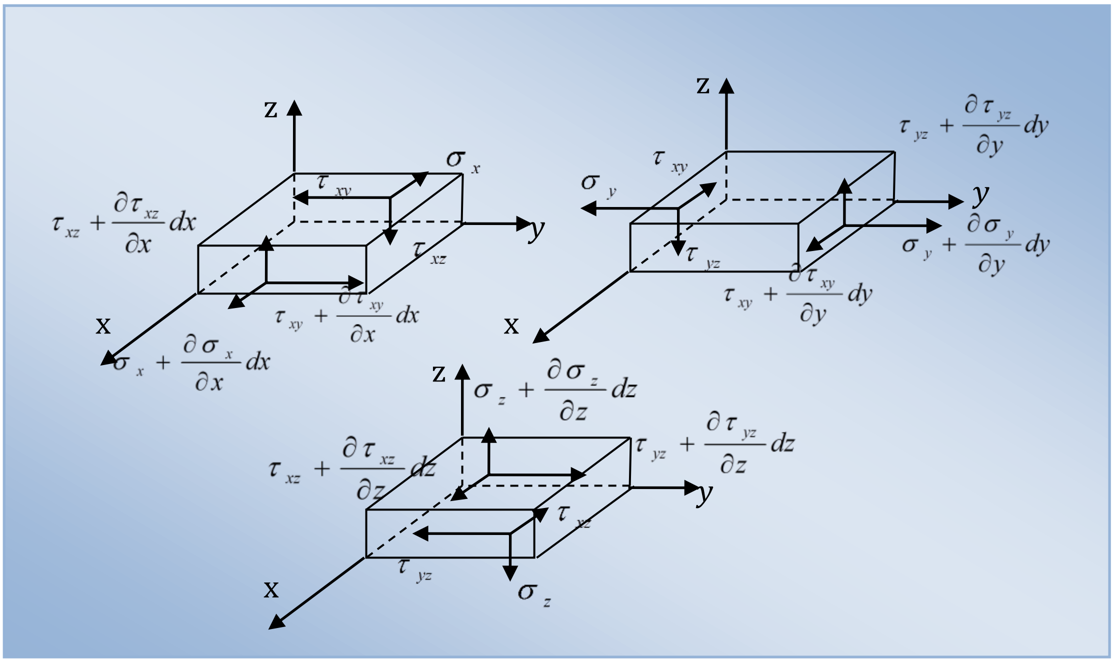
→en négligeant les termes en différentielle d'ordre supérieur

6-EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'EQUILIBRE (EQUATIONS DE NAVIER) :

∃ 2 types de forces extérieures

- Forces de surfaces (N/m^2) : (pression, p hydrostatique) $\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}$
- Forces de volume (N/m^2) : (Force gravitationnel, magnétique, inertie) x_v, y_v, z_v

Soit un petit élément soumis à une résultante de force de volume R dont les composantes suivant le repère orthogonal sont. $(x.\ y.\ z)$.



$\Sigma\, F/x = 0$

$$(\sigma_X + \frac{\partial\sigma_X}{\partial x}dx)dydz - \sigma_X dydz + \left(\tau_{Xy} + \frac{\partial\tau_{Xy}}{\partial y}dy\right)dxdz - \tau_{Xy}dxdz$$
$$+\left(\tau_{Xz} + \frac{\partial\tau_{Xz}}{\partial z}dz\right)dxdxdy - \tau_{Xz}dxdy + X_V dxdydz = 0$$

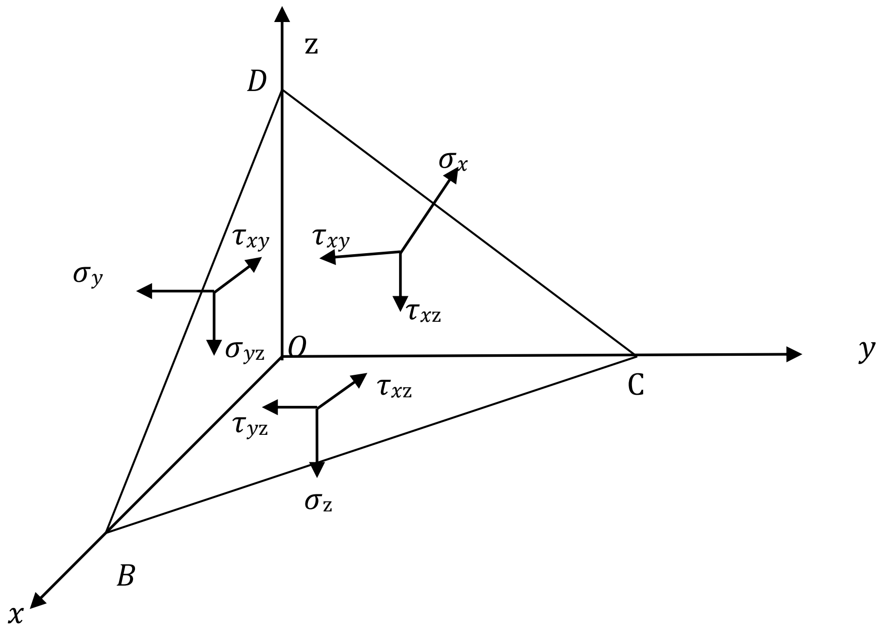
On obtient la 1ere équation différentielle d'équilibre.

$$\frac{\partial\sigma_X}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{Xy}}{\partial xy} + \frac{\partial\tau_{Xz}}{\partial z} + X_V = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_X}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{Xy}}{\partial xy} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + Y_V = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_X}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{Xy}}{\partial xy} + \frac{\partial\tau_{Xz}}{\partial z} + Z_V = 0$$

Les équations différentielles d'équilibre s'expriment sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{Xz} \\ x & \sigma_y & \tau_{Xz} \\ x & x & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial_x} \\ \frac{\partial}{\partial_y} \\ \frac{\partial}{\partial_z} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = -F$$

7-<u>EQUATIONS AUX CONDITIONS LIMITES</u> :



<u>TETRAEDRE EN EQUILIBRE ($OBCD$)</u>

Force de surface extérieure $p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ appliquée sur la surface ABC du tétraèdre.
N Vecteur normal à la surface BCD (*la normale*)
$\sum \frac{F}{\vec{N}} = 0$ par rapport à la normale $\vec{N}$.
<u>Arrêt ici</u> :
$\bar{x}(aire\ BCD) - \sigma_x(aire\ OCD) - \tau_{xy}(aire\ OBD) - \tau_{xz}(aire\ OBC) = 0$
$\bar{y}(BCD) - \sigma_y(OBD) - \tau_{xy}(OCD) - \tau_{yz}(OBC) = 0$
$\bar{z}\,(BCD) - \sigma_z(OBC) - \tau_{xZ}(OCD) - \tau_{yz}(OBD) = 0$
Soit la forme matricielle des Equations aux Conditions Limites s'écrivant ainsi :

$$\begin{vmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l \\ m \\ n \end{vmatrix}$$

$(aire\ BCD) = dA$
$(aire\ OCD) = dA.\cos(N.x) = l.dA$
$(aire\ OBD) = dA.\cos(N.y) = m.dA$
$(aire\ OBC) = dA.\cos(N.z) = n.dA$
l, m, et n : cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface du corps.

$$\begin{cases} \bar{x} = l\,\sigma_x + m\,\tau_{xy} + n\,\tau_{xz} \\ \bar{y} = l\,\tau_{xy} + m\,\sigma_y + n\,\tau_{yz} \\ \bar{z} = l\,\tau_{xz} + m\,\tau_{yz} + n\,\sigma_z \end{cases}$$

Équations de conditions aux limites.
Sachant $l^2 + m^2 + n^2 = 1$
En géométrie bidimensionnelle $(xy) sin^2 \propto + cos^2 \propto = 1$
$l^2 + m^2 = 1$

En géométrie tridimensionnelle (xyz) $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

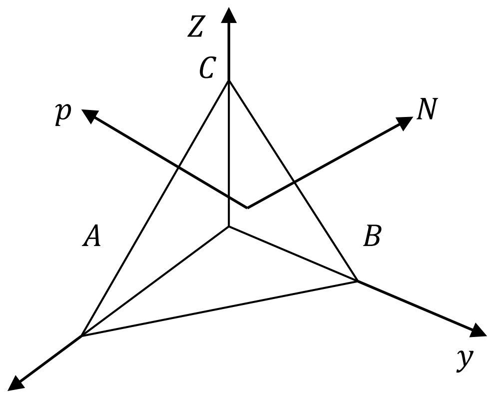
8 - CONTRAINTES PRINCIPALES :

Le tenseur des contraintes est défini dans un repère quelconque (x, y, z), dans certains cas il est plus intéressant de choisir un repère de telle façon à ce que les contraintes de cisaillement τ_{ij} soient nulles et seuls les contraintes normales sont ≠ les de zéro. Ce type de repère est appelé repère principale et les contraintes normales correspondantes sont appelées CONTRAINTES PRINCIPALES.

Sur le tétraèdre suivante la normale au plan principal (ABC) est définir par ses cosinus directeurs l, m et n et la contrainte « σ » représente la contrainte principale qui peut agir sur ce plan.

Les composantes de cette contrainte « σ »
Suivant :x ,y et z seront alors :
$l\sigma$; $m\sigma$; $n\sigma$.
En utilisant les équations de conditions aux limites on aura :

$$l\,\sigma = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz}$$
$$m\,\sigma = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz}$$
$$n\,\sigma = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z$$
$$l(\sigma_x - \sigma) + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} = 0$$
$$l(\tau_{xy} + m\big(\sigma_y - \sigma\big) + n\tau_{yz} = 0$$
$$l\,\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n(\sigma_z - \sigma) = 0$$



On a donc trois équations linéaires et homogènes à quatre inconnus qui sont (l, m, n et σ).

Les équations ne donnent de solutions différentes de zéro que si leur déterminant est nul D'où :

$$det\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

Ou bien det$([\sigma] - \sigma[I] = 0$
Ou encore
[σ] : Matrice désignant tenseur des contraintes.
[l] : Matrice identité.
σ : Valeur propre cherchée correspondante à la contrainte principale.

Le développement du déterminant donne une équation du $3^{\text{éme}}$ degré.

$$(\sigma_x - \sigma)\big[(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - \tau_{yz}\tau_{yz}\big] - \tau_{xy}\big[\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma) - \tau_{yz}\tau_{xz}\big] + \tau_{xz}\big[\tau_{xy}\tau_{yz} - \big(\sigma_y - \sigma\big)\tau_{xz}\big] = 0$$

$$(\sigma_x - \sigma)\big[\sigma_y\sigma_z - \sigma\sigma_z - \sigma_y\sigma + \sigma^2 - \tau_{yz}{}^2\big] - \tau_{xy}\big(\tau_{xy}\sigma_z - \tau_{xy}\sigma - \tau_{yz}\tau_{xz}\big) + \tau_{xz}\big[\tau_{xy}\tau_{yz} - \sigma_y\tau_{xz} + \sigma\tau_{xz}\big] = 0$$

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\sigma\sigma_z + \sigma_z\sigma^2 - \sigma_x\sigma_y\sigma + \sigma_y\sigma^2 + \sigma_x\sigma^2 - \sigma^3 - \sigma_x{\tau_{yz}}^2 + {\tau_{yz}}^2\sigma - {\tau_{xy}}^2\sigma_z + {\tau_{xy}}^2\sigma + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} + \tau_{xz}\tau_{xy}\tau_{yz} - \sigma_y{\tau_{xz}}^2 + {\tau_{xz}}^2\sigma = 0$$

$$\boxed{-\sigma^3 + (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 - (\sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z + \sigma_x\sigma_y - {\tau_{yz}}^2 - {\tau_{xy}}^2 - {\tau_{xz}}^2)\sigma + \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x{\tau_{yz}}^2 - \sigma_z{\tau_{xy}}^2 - \sigma_y{\tau_{xz}}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}) = 0}$$

La résolution de cette équation donne les valeurs des trois contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3

A- __DIRECTION PRINCIPAL__ : En portant ces valeurs successivement dans les équations (*) et en faisant usage de la relation $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ on trouvera trois groupes de cosinus directeurs définissant les trois plans principaux.
Ces directions principales sont donc obtenues en résolvant le système d'équilibre suivant, pour chaque valeur de la contrainte principale.

$$([\sigma] - \sigma_i[I])\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \{0\}$$

REMRQUE : Ii en fort de σ_i

B- *__LES INVARIANTS__* : les facteurs A, B et C de l'équation du 3éme degré de variable σ restent invariables et sont en général indépendants de l'orientation du tiède de référence.

On dit que le tenseur des contraintes à trois invariants indépendantes :

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - {\tau_{xy}}^2 - {\tau_{xz}}^2 - {\tau_{yz}}^2$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = det[\sigma]$$

I_1= Invariant linéaire
I_2= Invariant quadratique
I_3= Invariant cubique
Avec les rotations, équation (*)
Donc l'équation (**) peut s'écuré

$$\boldsymbol{\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0}$$

Partie pour σ , τ

C- __ELLIPSOIDE DES CONTRAINTES__

Si le repère $x.y.z$ choisi est un repère principal, les composantes de la contrainte agissant sur tout plan incliné deviennent
$q_x = l\,\sigma_x$; $q_y = m\,\sigma_y$; $q_z = n\sigma_z$.
Or on serait que $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

D'où $\left[\frac{q_x}{\sigma_x}\right]^2 + \left[\frac{q_y}{\sigma_y}\right]^2 + \left[\frac{q_z}{\sigma_z}\right]^2 = 1$

Cette équation représente l'équation d'un ellipsoïde.
Chaque point de l'ellipsoïde correspond à l'extrémité du vecteur contrainte (q_x, q_y,q_z) qui agit sur le plan considéré .

À partir de cette équation d'ellipsoïde on peut définir quelque cas particuliers d'état de contraintes.

a/ si $\sigma_1 = 0 \Longrightarrow$ l'ellipsoïde se réduit en une ellipse « état de contrainte plane »
b/ si $\sigma_1 = \sigma_2 = 0 \Longrightarrow$ « état de contrainte uni axial » (traction ou compression)
c/ si $\sigma_1 = \sigma_2 \Longrightarrow$ « ellipsoïde de révolution »
d/ si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \Longrightarrow$ ellipsoïde devient une sphère « état de contrainte uniforme »

Dans ce cas, trois directions quelconques mais perpendiculaires entre elles, pouvant être prises comme axes principaux.

D - <u>CONTRAINTES DE CISAILLEMENT MAXIMALES</u> :

On considère le repère principal confondu avec le repère $x.y.z$, dans ce cas σ_X, σ_y et σ_Z sont les contraintes principales. Si l, m et n désignent les cosinus directeurs d'un plan donné, on sait que les composantes (q_x, q_y, q_z) de la contrainte σ agissant sur ce plan seront :

$$q_x = l\,\sigma_x = l\,\sigma_1$$
$$q_y = m\,\sigma_y = m\,\sigma_2$$
$$q_z = n\,\sigma_z = n\,\sigma_3$$

Dans ce cas on a :

$$\sigma^2 = {q_x}^2 + {q_y}^2 + {q_z}^2 = l^2{\sigma_1}^2 + m^2{\sigma_2}^2 + n^2{\sigma_3}^2$$

Or la contrainte σ se décompose en contrainte normale σ_n et en contrainte tangentielle τ.

D'où $\sigma_n = lq_x + mq_y + nq_z$

$$\sigma_n = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3$$

Or: $\sigma^2 = {\sigma_n}^2 + \tau^2 \Longrightarrow \tau^2 = \sigma^2 - {\sigma_n}^2$

En remplaçant on aura :

$$\tau^2 = (l^2{\sigma_1}^2 + m^2{\sigma_2}^2 + n^2{\sigma_3}^2) - (l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3)^2 \qquad (*)$$

Sachant que $l^2 + m^2 + n^2 = 1 \Longrightarrow n^2 = 1 - l^2 - m^2$ dans l'équation (*)

Pour déterminer les valeurs maximales de la contrainte tangentielle, il suffit juste d'annuler les dérivées de l'équation (*) par rapport à l et m. On aura donc les deux équations suivantes :

$$l[(\sigma_1 - \sigma_3)I^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - 1/2(\sigma_1 - \sigma_3)] = 0$$
$$m[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - 1/2(\sigma_2 - \sigma_3)] = 0$$

Les solutions de ce système sont regroupées dans le tableur suivant

l	0	0	±1	0	$\pm\sqrt{2}/2$	$\pm\sqrt{2}/2$
m	0	±1	0	$\pm\sqrt{2}/2$	0	$\pm\sqrt{2}/2$
n	±1	0	0	$\pm\sqrt{2}/2$	$+\sqrt{2}/2$	0

Pour les trois premières colonnes, les directions des plans de coordonnées coïncidentes avec les plans principaux et les contraintes de cisaillement correspondantes sont nulles.

Pour les trois dernières, les valeurs correspondent à celles des plans passant par chacun des axes principaux et bissecteurs de l'angle que font les deux autres axes principaux.

Dans les trois dernières colonnes, en substituant les valeurs de l, m et n dans l'expression de τ on aura :

$$\tau_{max} = MAX\left[\pm\frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_j)\right] \quad \text{Avec } i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, 2, 3.$$

09-*TENSEURS DEVIATORIQUE ET SPHERIQUE* :

Dans plusieurs cas, il est préférable de décomposer le tenseur de contraintes [σ] En un tenseur sphérique [σ^s] et un tenseur dèviatorique [σ^d] soit :

[σ] = [σ^s] + [σ^d]

Avec $[\sigma^s] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} = \sigma_n[I] = \frac{tr[\sigma]}{3}$

Où $\sigma_m = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} = \frac{t_{r[\sigma]}}{3}$

σ_m: contrainte moyenne

Sous forme matricielle, le tenseur sphérique s'écrit $[\sigma^s] = \frac{I_1[I]}{3}$

Et I_1 : Invariant linéaire du tenseur [σ]

I: Matrice identité

A partir de l'équation $[\sigma] = [\sigma^s] + [\sigma^d]$

Le tenseur dèviatorique peut s'écrire :

$$[\sigma^d] = [\sigma] - [\sigma^s] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_y - \sigma_m \end{bmatrix}$$

En calculant la trace du tenseur [σ^d] on aura :

Trace = $(\sigma_x - \sigma_m) + (\sigma_y - \sigma_m) + (\sigma_z - \sigma_m) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma_m = 0$

Donc, si le tenseur des contraintes a une trace nulle, on dit que ce tenseur est dèviatorique.

Les directions principales du tenseur [σ] sont les mêmes que celles du tenseur dèviatorique [σ^d] et les contraintes principales s'obtiennent par simple translation des contraintes principales dèviatoriques.

Si σ_d désigne la contrainte déviatorique, le calcul des trois valeurs de σ_d revient à résoudre le poly même du 3eme degré

$${\sigma_d}^3 - j_1{\sigma_d}^2 + j_2\sigma_d - j_3 = 0.$$

Où j_1, j_2 et j_3 sont les trois invariants du tenseur dèviatorique.

$j_1 = 0$

$j_2 = 1/6[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$

$j_2 = 1/6\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6({\tau_{xy}}^2 + {\tau_{xz}}^2 + {\tau_{yz}}^2)\right]$

$j_3 = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) = det[\sigma^d]$

<u>N.B</u> :

Pour résoudre l'équation du troisième degré précédente

$${\sigma_d}^3 - j_1{\sigma_d}^2 + j_2\sigma_d - j_3 = 0$$

On pose généralement $\sigma_d = 2sin \propto \sqrt{j_{2/3}}$

En remplaçant dans l'équation caractéristique on aura à résoudre

$$2\sqrt{(j_2/3)^3}[4\sin^3 \propto -3sin \propto] = j_3$$

Or trigonométriquement $4\sin^3 \propto -3sin \propto = -sin\ 3 \propto$

D'où $\sin 3 \propto = -(j_{3/2})\sqrt{(3/j_2)^3}$

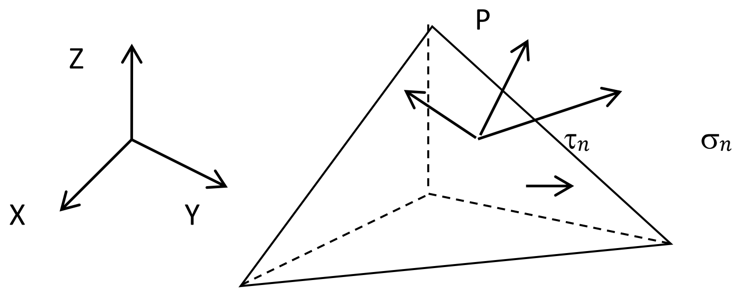
Supposons que la première solution est obtenue pour

$-\pi/2 \leq 3 \propto \leq \pi/2$ c.-à-d. $-\pi/6 \leq \propto \leq \pi/6$, les deux autres solutions sont obtenues par simple rotation cyclique de la fonction Sinus.
On aura les trois racines de l'équation (du troisième degré)(*)
$\sigma_{di} = 2sin \propto_i \sqrt{(j_2/3)}$
Où pour $\sigma_{d1} > \sigma_{d2} > \sigma_{d3}$ on a les angles
$\propto_1 = \propto + 2\pi/3$; $\propto_2 = \propto$; $\propto_3 = \propto + 4\pi/3$.

Ayant les contraintes principales dèviatorique, les contraintes principales du tenseur [σ] sont obtenues par la relation.

$\sigma_i = \sigma_{di} + \sigma_m$

NOTE :



$p\ (x.y.\mathrm{z})$ suivant Oxyz.
$p\ (\sigma_n, \tau)$ suivant la normale de la surface inclinée x^2

$p = x + y + \mathrm{z} = \sigma_n + \tau_n$

Résultante des vecteurs $\Longrightarrow$ $x^2 + y^2 + \mathrm{z}^2 + \sigma_n{}^2 + \tau^2$
Produit scalaire $\sigma_n = p.\vec{N} = x_l + y_m + z_n$
EQUATIONS aux Conditions Limites

$$\begin{cases} lx = \left(\sigma_x l + \tau_{xy}.m + \tau_{xz}.n\right)l \\ ly = \left(\tau_{xy} l + \sigma_y.m + \tau_{yz}.n\right)m \\ lz = \left(\tau_{xz} l + \tau_{yz}.m + \sigma_z.n\right)n \end{cases}$$

1) $\sigma_n = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2m\, l\tau_{xy} + 2n\, l\tau_{xz} + 2m\, n\, \tau_{yz}$
2) $\tau = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - \sigma^2}$
D'où $\left(\frac{q_x}{\sigma_x}\right) + \left(\frac{q_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{q_z}{\sigma_z}\right) = 1$
$\tau_{max} = MAX \left|\pm \frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_j)\right|$
10 – Méthode approche de la solution de l'équation du 3eme degré.

Exercices et applications

EXO 1

L'état de contraintes en un point quelconque ($x.y.$z) est donné par la distribution suivante :

$\sigma_x = x^2/2$ $\tau_{xy} = x - (y^2/2)$

$\sigma_y = y^2/2$ $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

$\sigma_z = z^2/2$.

A - déterminez les composantes des forces de volume.

B - déterminez les composantes du vecteur normal $\vec{N}$ au plan passant par le point (1,1,1)

Pour le quel on a :

La contrainte normale : $\sigma_n = 1/2$

La contrainte tangentielle : $\tau = \sqrt{2}/4$.

C - déterminez les contraintes et directions principales au point (1,1,1).

D - déterminez la contrainte de cisaillement maximale.

E - Au point (1,1,1), décomposez ce tenseur en tenseurs sphérique et dèviatorique puis déterminer les contraintes principales de ce tenseur.

EXO 2

Un tenseur de contraintes donné par ses composantes cartésiennes :

$$\sigma = \begin{bmatrix} -5a & -4a & 0 \\ -4a & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

A - Déterminez analytiquement les contraintes principales et les plans principaux.

B - Déterminez les contraintes de cisaillement maximales.

EXO 3

Déterminer la contrainte normale σ_0 et la contrainte tangentielle τ_0 agissants sur un plan qui fait le même angle avec les trois axes principaux.

EXO 4

Déterminez les contraintes principales pour un état de contrainte qui ne contient que des contraintes égales.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma$$

EXO 5

Déterminez les contraintes et les directions principales pour l'état de contrainte :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 300 \\ 0 & 500 & 0 \\ 300 & 0 & 400 \end{bmatrix} \text{Kgf / cm}^2$$

EXO 6

En un point M du corps élastique se manifestent les contraintes σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy} et τ_{yx}, les contraintes τ_{yz} et τ_{zx} sont nulles.

Déterminez les contraintes principales, ainsi que les contraintes s'exerçant sur un élément de surface parallèle à l'axe z et dont la normale fait l'angle α avec l'axe x.

EXO 7

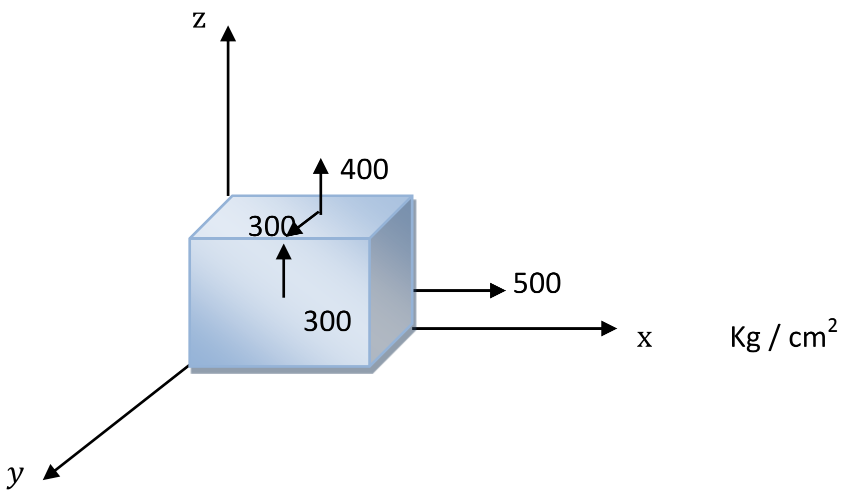
Déterminez les contraintes principales pour l'état de contrainte suivant :

$\sigma_x = \tau_{xy} = 50$ MPa ; $\sigma_y = 0$.

$\tau_{xz} = 80$ MPa ; $\tau_{yz} = -75$ MPa ; $\sigma_z = -30$ MPa.

EXO 8

Déterminez les contraintes et les directions principales pour l'état de contrainte représenté sur la figure suivante :



EXO 9

Soit un tenseur de contraintes σ suivant :

$\sigma_x = A(1+y)e^y cos\, x$; $\tau_{xy} = A\, y\, e^y \sin x$; $\sigma_y = A(1-y)e^y \cos x$; $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$; $\sigma_z = 2A\, \nu\, e^y \cos x$

Où A et ν sont des constantes, tel que : $A > 0$; $1/4 < \nu < 1/2$

A - Trouvez les contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3

B - Trouvez les directions principales.

EXO 10

Déterminez les composantes de la force volumique en action pour le tenseur de contrainte suivant :

$\sigma_x = \tau_{xy} = 0$; $\tau_{xz} = 6x$; $\sigma_y = 2x$; $\tau_{yz} = y$; $\sigma_z = 2xy$

EXO 11

On considère le problème de contraintes planes, en absence des forces de volume, trouver une relation entre les composantes du tenseur de contrainte et une fonction $\varphi(x, y)$ tel que les équations d'équilibre sont satisfaites.

EXO 12

Soit le tenseur de contrainte [σ] ou « **c** » est une constante

a)- Trouver les valeurs et les directions principales au point (1, 2, 4)

b)- Déterminer le tenseur déviateur σ^d et ces valeurs principales.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -cy \\ 0 & 0 & cx \\ -cy & cx & 0 \end{bmatrix}$$

EXO 13

Pour l'état plan de contraintes, déterminez :

a)- Les invariants du tenseur de contraintes.

b)- Les contraintes principales.

TRAVAIL DIRIGE

On demande aux étudiants de préparer un travail concernant l'expression des contraintes principales, directions principales et contraintes maximales.

ENONCE

Le tenseur de contraintes [σ] est composé essentiellement de six contraintes (normales et tangentielles), dans le cas ou on se trouve sur un repère dit repère principal, l'ensemble des contraintes tangentielles et normales se réduit en trois simples contraintes normales dites contraintes principales, cependant, en fonction, de ces contraintes principales il est très facile d'en déduire les angles que font, entre eux, les axes de ce repère principal.

Les contraintes tangentielles que peut exprimer le solide par ce tenseur de contraintes, peuvent être déduites des contraintes principales.

Le tenseur de contraintes $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yy} & \sigma_x \end{bmatrix}$

RECOMMANDATIONS :

Travail demandé

1 - Exprimez les invariants

2 - L'équation caractéristique

3 - Les contraintes principales

4 - Tout les cosinus directeurs des axes principaux

5 - Les angles des axes principaux

6 - Les contraintes tangentielles maximales

7 – déduire les contraintes principales par l'usage du tenseur deviatorique

8 – reprendre le problème sur un cas plan

9 – reprendre un tenseur de contrainte sur un schéma graphique intelligent

Conseils

L'usage d'un tableur de calcul est recommandé tel que « EXCEL » par exemple

Date limite respectée travail accepté, non respectée est la date, non accepté est le travail ornement du travail facilite la lecture et avantage la récompensassions

CORRIGE DES EXERCICES

EXO 1

A/ Les composantes de forces de volume

En utilisant les équations différentielles d'équilibre sur le tenseur de contrainte [σ], on obtient :

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial_x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial_y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial_z}+x_v=0$$
$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial_x}+\frac{\partial\tau_{y}}{\partial_y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial_z}+y_v=0$$
$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial_x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial_y}+\frac{\partial\tau_{z}}{\partial_z}+z_v=0$$

$\sigma_x=x^2/2 \qquad \tau_{xy}=\left[x-(\frac{y^2}{2})\right]$

$\sigma_y=[y^2/2] \qquad \tau_{xz}=\tau_{yz}=0$

$\sigma_z=[z^2/2]$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial_x}[x^2/2]+\frac{\partial}{\partial_y}[y^2/2]+x_v=0$$
$$\frac{\partial}{\partial_x}[x-(y^2/2)]+\frac{\partial}{\partial_y}[y^2/2]+y_v=0$$
$$\frac{\partial}{\partial_z}[z^2/2]+z_v=0$$

Donc :

$$\begin{matrix} x-y+X_v=0 & & X_v=-x+y \\ y+Y_v=0 & \Longrightarrow & Y_v=-y \\ z+Z_v=0 & & Z_v=-z \end{matrix}$$

A/ Les composantes du vecteur normal $\vec{N}$

Le plan considéré passe par le point (1,1,1)

Pour lequel on a

La contrainte normale : σ_n=1/2

La contrainte tangentielle : τ = √2 /4.

$$\sigma_n=\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\frac{{X_v}^2}{2}=\frac{{Y_v}^2}{2}=\frac{{Z_v}^2}{2}=1/2$$
$$\tau=\tau_{xy}=\sqrt{x-(y^2/2)}=1/2$$
$$\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$$
$$\sigma_n=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$
$$\propto \sigma^2={\sigma_n}^2+\tau^2={x_x}^2+{y_y}^2+{z_z}^2=\frac{1}{2}+l\,m-\frac{1}{4n^2}\Longrightarrow\tau^2=\sigma^2-\sigma^2=2/16$$
$$\begin{cases} lm=0 \\ \frac{n^2}{4}=\frac{1}{8} \\ l^2+m^2+n^2=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} l=0\,;m=\pm\sqrt{2}/2;n=\pm\sqrt{2}/2 \\ l=\pm\pm\sqrt{2}/2\,;m=0\,;n=\pm\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

Le tenseur au point (1, 1,1) s'écrit :

$$[\sigma]p = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Les contraintes principales seront

$\det([\sigma] - \sigma_i[I]) = 0$

D'où $\left| \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$

$(1/2 - \sigma)(\sigma)(\sigma - 1) = 0 \quad \Longrightarrow \sigma_1=1 \; ; \; \sigma_2=1/2 \; ; \; \sigma_3=0$

-les contraintes de cisaillement maximales sont :

$\sigma_1=1$

$\sigma_2=1/2$

$\sigma_3=0$

Les contraintes de cisaillement maximales sont :

$\tau_{1max}= \pm\, 1/2(\sigma_2 - \sigma_3)= \pm\, 1/2$

$\tau_{2max}= \pm\, 1/2(\sigma_1 - \sigma_3)= \pm\, 1/2$

$\tau_{3max}= \pm\, 1/2(\sigma_1 - \sigma_2)= \pm\, 1/4$

D'où le maximum de ces contraintes est :

$\tau_{max} = \pm\, 1/2$

S'écrit

$$[\sigma]p = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$[\sigma] = [\sigma^s] + [\sigma^d]$

Avec $[\sigma^s] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$

Où

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1/2 + 1/2 + 1/2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$[\sigma^s] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Et $[\sigma^d] = [\sigma] - [\sigma^s] = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Calculons les contraintes principales du tenseur dèviatorique équation caractéristique s'écrit :

$${\sigma_d}^3 - j_1{\sigma_d}^2 - j_2\sigma_d - j_3 = 0$$

Dans notre cas

$j_1 = 0$

$j_2 = ¼$

$j_3 = 0$

D'où l'équation caractéristique sera :

$\sigma_d{}^3 - 1/4\sigma_d = 0 \Longrightarrow \sigma_d(\sigma_d - 1/2)(\sigma_d + 1/2) = 0$

Les racines de ce polynôme sont :

$\sigma_{d1} = 1/2$; $\sigma_{dz} = 0$; $\sigma_{d3} = -1/2$.

Les contraintes principales du tenseur initial [σ] seront :

$\sigma_1 = \sigma_{d1} + \sigma_m = 1/2 + 1/2 = 1$

$\sigma_2 = \sigma_{d2} + \sigma_m = 0 + 1/2 = 1/2$

$\sigma_3 = \sigma_{d3} + \sigma_m = -1/2 + 1/2 = 0$

On retrouve ainsi les mêmes contraintes principales que celle dans l'application précédente.

EXO 2

$$\sigma = \begin{bmatrix} -5a & -4a & 0 \\ -4a & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

A/ L'équation caractéristique est de la forme

Dont les **invariants** :

$l_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -3a$

$l_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}{}^2 - \tau_{xz}{}^2 - \tau_{yz}{}^2 = -25a^2$

$l_3 = det[\sigma] = -21a^3$

Cependant l'équation devient :

$(\sigma - a)(\sigma - 3a)(\sigma + 7a) = 0$

Et donc les contraintes principales

$\sigma_1 = 3a$; $\sigma_2 = a$; $\sigma_3 = -7a$.

Pour $\sigma_1 = 3a$

Les équations aux conditions limites s'expriment ainsi :

$2al_1 + am_1 = 0$

$2n_1 = 0$

Avec $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

$l_1 = \pm 1/\sqrt{5}$; $m_1 = \pm 2/\sqrt{5}$; $n_1 = 0$

Pour $\sigma_2 = a$

$l_2 = 0$; $m_2 = 0$; $n_2 = \pm 1$

Pour $\sigma_1 = -7a$

$l_3 = \pm 2/\sqrt{5}$; $m_3 = \pm 1/\sqrt{5}$; $n_3 = 0$

B/ Les contraintes de cisaillement maximales

$\tau_{max} = \text{Max} [\pm \frac{1}{2} (\sigma_i - \sigma_j)]$

$\tau_{max} = \pm\text{Max} [a; 5a; 4a] = 5a$

EXO 3

Un plan qui fait le même angle avec les trois axes principaux, c'est-à-dire les cosinus directeurs sont identiques, donc $l = m = n$

Avec $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ et $l = m = n = 1/\sqrt{3}$

La contrainte normale σ_0

$$\sigma^2 = {q_x}^2 + {q_y}^2 + {q_z}^2 = l^2{\sigma_1}^2 + m^2{\sigma_2}^2 + n^2{\sigma_3}^2 = 1/3({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2 + {\sigma_3}^2)$$

$$\sigma^2 = {\sigma_0}^2 + {\tau_0}^2$$

$$\sigma_0 = (1/3)\sigma_1 + (1/3)\sigma_2 + (1/3)\sigma_3 = 1/3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

La contrainte tangentielle τ_0

$$\tau_0 = \sqrt{\sigma^2 - {\sigma_0}^2} = \sqrt{1/3({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2 + {\sigma_3}^2) - 1/9(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}$$

$$\tau_0 = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

EXO 4

Déterminez les contraintes principales pour un état de contrainte qui ne contient que des contraintes égales.

$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma$

Le tenseur de contrainte peut s'écrire ainsi comme suit

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

EXO 5

Déterminez les contraintes et les directions principales pour l'état de contrainte suivant:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 300 \\ 0 & 500 & 0 \\ 300 & 0 & 400 \end{bmatrix} \text{Kgf / cm}^2$$

EXO 6

En un point M d'un corps solide élastique se manifestent les contraintes σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} et τ_{yx} les contraintes τ_{yz} et τ_{zx} sont nulles.

Déterminez les contraintes principales, ainsi que les contraintes s'exerçant sur un élément de surface parallèle à l'axe z et dont la normale fait l'angle α avec l'axe x.

EXO 7

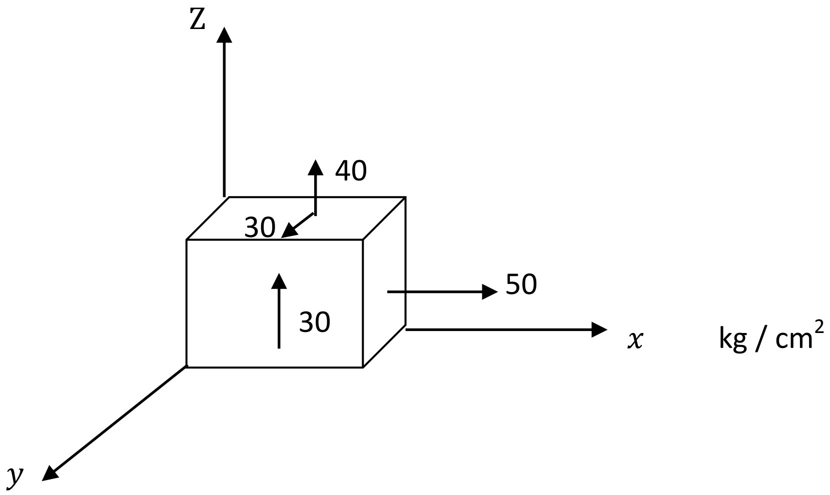
Déterminez les contraintes principales pour l'état de contrainte suivant :

σ_x= 50 MPa; σ_y = 0; σ_z = -30 MPa.

τ_{xy}= 50 MPa; τ_{xz} = 80 MPa; τ_{yz} = -75 MPa.

EXO 8

Déterminez les contraintes et les directions principales pour l'état de contrainte représenté sur la figure suivante :



EXO 9

Soit un tenseur de contraintes σ suivant :

$\sigma_x = A\,(1+y)\,e^y \cos x$; $\tau_{xy} = A\,y\,e^y \sin x$; $\sigma_y = A\,(1-y)\,e^y \cos x$

$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$; $\sigma_z = 2A\,\nu\,e^y \cos x$.

Où A et ν sont des constantes, tel que : $A > 0$; $¼ < \nu < ½$

Trouvez les contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Trouvez les directions principales.

EXO 10

Déterminez les composantes de la force volumique en action pour le tenseur de contrainte suivant :

$\sigma_x = \tau_{xy} = 0$; $\tau_{xz} = 6\,x$; $\sigma_y = 2x$; $\tau_{yz} = y$; $\sigma_z = 2\,xy$

EXO 11

On considère le problème de contraintes planes, en absence des forces de volume, trouver une relation entre les composantes du tenseur de contrainte et une fonction φ (x, y) tel que les équations d'équilibre sont satisfaites

EXO 12

Soit le tenseur de contrainte [σ] ou « c » est une constante

a)- Trouver les valeurs et les directions principales au point (1, 2, 4)

b)- Déterminer le tenseur déviateur σ^d et ces valeurs principales.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -cy \\ 0 & 0 & cx \\ -cy & cx & 0 \end{bmatrix}$$

EXO 13

Pour l'état plan de contraintes, déterminez :

a)- Les invariants du tenseur de contraintes.

b)- Les contraintes principales.