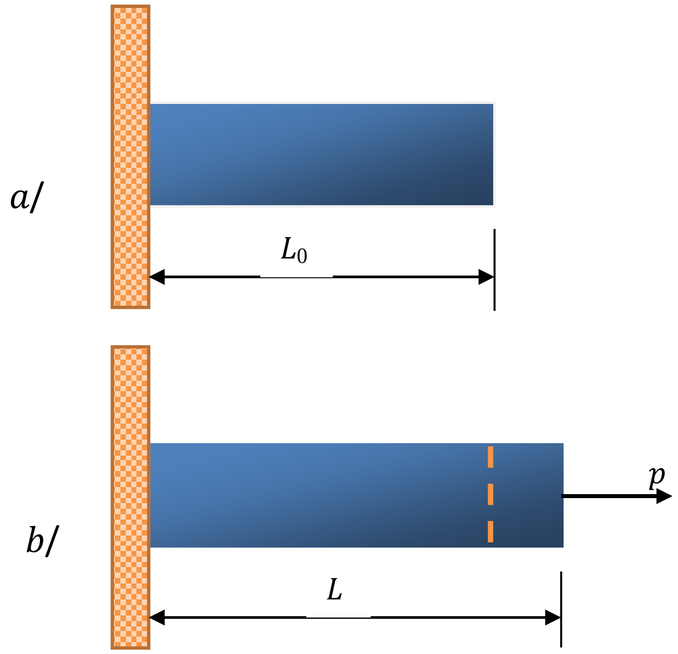
I-GÉNÉRALITÉ :

Une barre prismatique est soumise à une charge « p » quelconque attachée à son extrémité libre.



a/ Avant chargement
b/ Après chargement

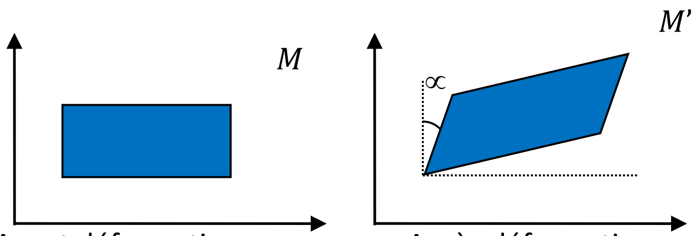
- L_o : longueur de la barre avant le chargement
- L : longueur après le chargement.

$(L - L_o) / L_o$: déformation longitudinale ou extension.

L'**extension** est la variation relative de la longueur de l'élément dans l'une des directions du repère considéré, notée « **ε** »

« Dans le cas de changement d'angle entre les deux côtés d'un même élément, ce type de déformation est appelé généralement **distorsion** et noté par « **γ** ».

EXEMPLE : le vecteur déplace $\vec{U}(u, v, w)$



Avant déformation Après déformation

Un point quelconque « M» de coordonnées x. y. z subira un déplacement $M\ M'$ même dont les projections sur les axes x. y. z seront notées $u.v.w$.

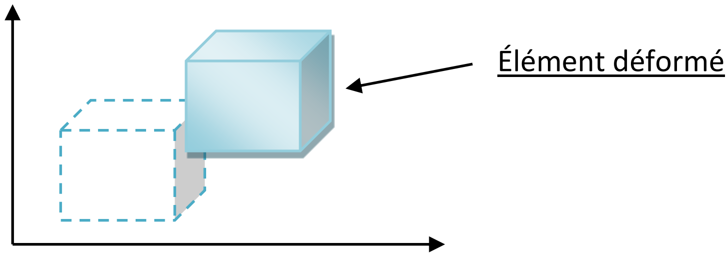
On admettra que ces composantes sont des infiniment petites variant d'une manière continue à l'intérieur du volume.

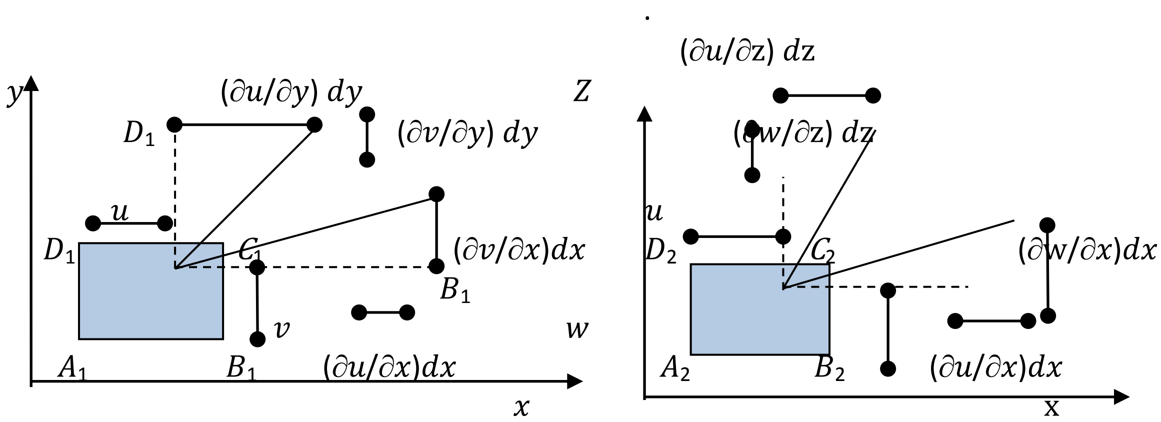
U= u (x.y.z); V= v(x.y.z); W= w(x.y.z).

II- COMPOSANTES DE DÉFORMATION :

II.1- EXTENSIONS :

On considère le petit élément (dx, dy, dz) suivant dont les projections sur les plans xy et xz sont représentées à la suite.





Projection sur le plan (x-y) Projection sur le plan (x-z)

Avant déformation, la longueur du côté AB est dx. Après déformation A est déplacé en point correspondant à A'_1 sur (x-y) et A'_2 sur (x-z).

(u, v, w) les composantes de déplacement du point A dans les directions x, y et z. Ces composantes deviennent par exemple B vers B'_1 et B'_2

u+ (($\partial u/\partial x)dx$, v+ ($\partial v/\partial x)dx$ et w+($\partial w/\partial x)dx$

Les projections de $A'B'$ seront donc :

d_x+ ($\partial u/\ \partial x)dx$ suivant la direction x

($\partial v/\ \partial x$)dx suivant la direction y

($\partial w/\ \partial x$)dx suivant la direction z

$$(A'B')^2 = \left[dx + (\frac{\partial u}{\partial x})dx\right]^2 + \left[(\frac{\partial v}{\partial x})dx\right]^2 + \left[(\frac{\partial w}{\partial x})dx\right]^2$$

Or par définition $\varepsilon_x = \frac{(A'B')-(AB)}{(AB)}$

$$(A'B') = (\varepsilon_x + 1)AB = (1+\varepsilon_x)dx$$

D'où $(1+\varepsilon_x)^2(dx)^2 = (dx)^2\left[1 + 2(\frac{\partial u}{\partial x}) \quad + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w}{\partial x})^2\right]$

$$1 + 2\varepsilon_x + \varepsilon_x{}^2 = 1 + 2\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]^2$$

ε_x est très petit on peut donc négliger $\varepsilon_x{}^2$.

D'où $\quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$

D'une manière similaire

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$

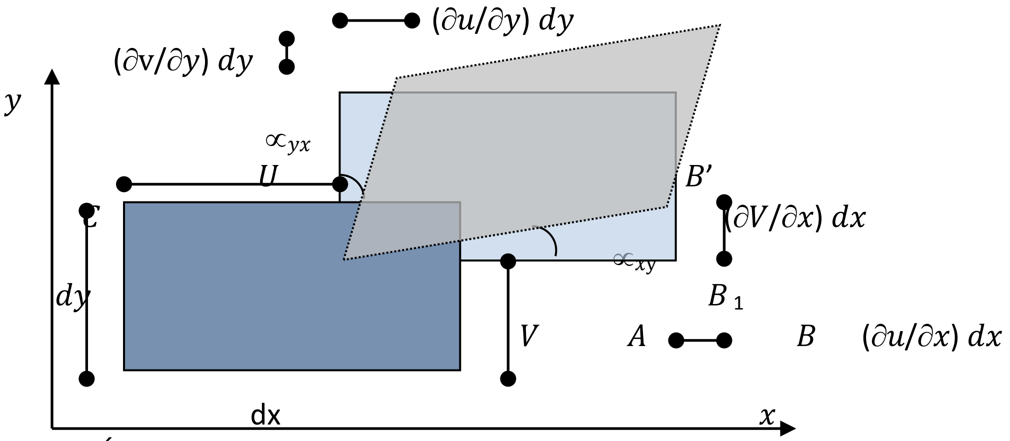
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]$$

on s'intéresse uniquement (notre cas) aux petites déformations, alors les dérivés de u, v et w sont des quantités très petites. D'où les carrés et les dérivés elles-mêmes.

Donc

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

II.2 <u>DISTORSIONS</u> :



Élément en distorsions

La distorsion est définie par la variation de l'angle que font entre eux les côtés AB et Ac.

D'où $\gamma_{xy} = \propto_{xy} + \propto_{yx}$

Or les angles sont très petits on peut les confondre avec les tangentes.

$$\propto_{xy} = tg\ \propto_{xy} = \frac{(\partial v/\partial x)dx}{dx + (\partial u/\partial x)dx} = \frac{(\partial v/\partial x)}{1 + (\partial u/\partial x)}$$

$$\propto_{yx} = tg\ \propto_{yx} = \frac{(\partial u/\partial y)dy}{dy + (\partial v/\partial y)dy} = \frac{(\partial u/\partial y)}{1 + (\partial v/\partial y)}$$

Les quantités $(\partial u/\partial x)$ et $(\partial v/\partial y)$ sont très petits devant l'unité donc

$\propto_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x}$; $\propto_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y}$

$\gamma_{xy} = \propto_{xy} + \propto_{yx} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}$

De façon similaire on peut obtenir :

$\gamma_{xz} = \frac{\partial_u}{\partial_z} + \frac{\partial_w}{\partial_x}$ et $\gamma_{yz} = \frac{\partial_v}{\partial_z} + \frac{\partial_w}{\partial_y}$

Avec les 6 composantes de déformation on peut obtenir le tenseur de déformation comme suit :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Noter la présence du coefficient ½ devant les distorsions.

N.B : Quelques auteurs préfèrent définir la distorsion comme étant la moyenne des deux angles après déformation : $\gamma_{xy} = (\frac{\partial_u}{\partial_y} + \frac{\partial_v}{\partial_x})/2$

Dans ce cas le coefficient « ½ » ne doit pas apparaître devant les distorsions.

II. 3 ***DEFORMATIONS ET DIRECTIONS PRINCIPALES*** :

Ayant le tenseur des déformations, les déformations principales ainsi que leurs directions se calculent de la même manière que les contraintes en résolvant le système :

$\det([\varepsilon] - \varepsilon[I]) = 0$

$[\varepsilon]$: Tenseur de déformations ; $[I]$: matrice identité.

ε : Valeur propre cherchée correspondante à la déformation principale.

Ce qui nous rémére à retondre l'équation caractéristique de degré 3.

$\varepsilon^3 - I'_1\varepsilon^2 + I'_2\varepsilon + I'_3 = 0$

$I'_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

$I'_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z - 1/4({y_{xy}}^2 + {y_{xz}}^2 + {y_{yz}}^2)$

$I'_3 = \varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_3 = det[\varepsilon]$

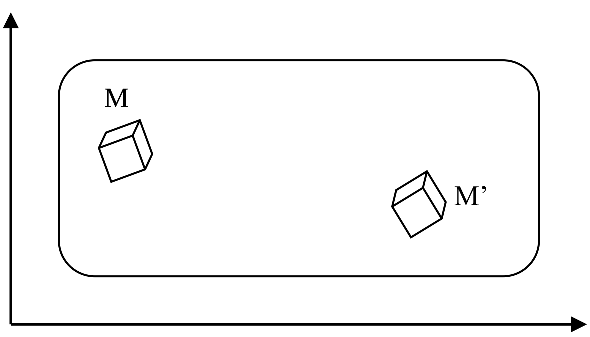
I'_1 : Invariant linéaire

I'_2 : Invariant quadratique

I'_3 : Invariant cubique.

-ROTATIONS :

Élément en rotation

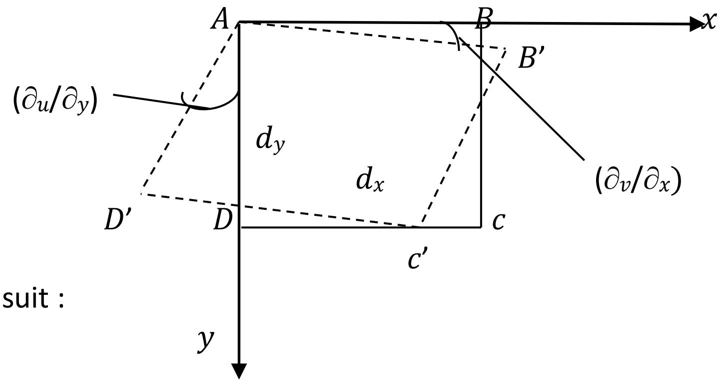


Un petit élément cubique en déplacement MM' sans déformation.
Les composantes du déplacement en suffissent par définir la nouvelle position du cube considéré.

Il serait donc nécessaire de considérer la rotation rigide autour des axes dont les composantes seront notées ω_{xy}, ω_{xz} et ω_{yz}

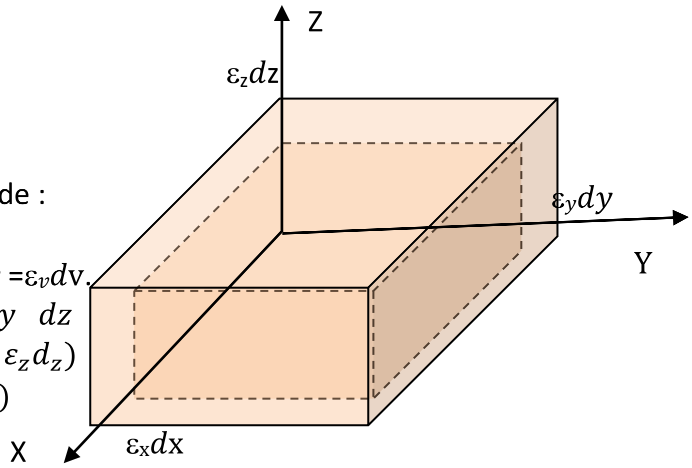
Pour exprimer ces composantes en fonction des composantes du déplacement u,v et w, considérons le cas plan simple suivant :

L'angle de rotation est égal à
(∂_v/∂_x) ou à $(-\partial_u/\partial_y)$
Ainsi la rotation est définie :
$w_{xy}= \frac{1}{2}\,(\partial_v/\partial_x - \partial_u/\partial_y)$
De façon similaire on aura :
$w_{xz} = \frac{1}{2}\,(\partial_w/\partial_x - \partial_u/\partial_z)$
$w_{yz} = \frac{1}{2}\,(\partial_w/\partial_y - \partial_v/\partial_z)$
De ces composantes, on peut définir le tenseur des rotations comme suit :



$$[w] = \begin{bmatrix} 0 & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{xy} & 0 & w_{yz} \\ w_{xz} & w_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Elément plan en rotation</u>



-DILATATION CUBIQUE :

Tout en sachant ; à chaque côté l'allongement est de :
$\delta(d_x)$, $\delta(d_y)$ et $\delta(d_z)$.
Et soit l'allongement total du volume du cube. $\delta dv = \varepsilon_v dv$.

$$dv = dx\ \ dy\ \ dz$$
$$(dv + \partial dv) = (d_x + \varepsilon_x d_x)(d_y + \varepsilon_y d_y)(d_z + \varepsilon_z d_z)$$
$$(dv + \partial dv_v) = d_x d_y d_z (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$$

$$= d_x d_y d_z\big(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\big) + \cdots + \underset{\searrow 0}{\varepsilon_x\varepsilon_y} + \underset{\searrow 0}{\varepsilon_x\varepsilon_z} + \underset{\searrow 0}{\varepsilon_y\varepsilon_z} + \cdots + \underset{\searrow 0}{\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z})$$

$$(dv + \partial dv) = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$
$$\frac{\delta d_v}{d_v} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Le produit de volume est égal $1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

$$\boxed{\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$ Dilatation cubique

-EQUATIONS DE CONTINUITÉ

$$\varepsilon_x = \frac{\partial_u}{\partial_x}\ ;\ \varepsilon_y = \frac{\partial_v}{\partial_y}\ ;\ \varepsilon_z = \frac{\partial_w}{\partial_z}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial_u}{\partial_y}\ ;\ \partial_{xz} = \frac{\partial_w}{\partial_x} + \frac{\partial_u}{\partial_z}\ ;\ \partial_{yz} = \frac{\partial_w}{\partial_y} + \frac{\partial_v}{\partial_z}$$

Soit une structure divisée, avant déformation, en petits cubes. Si chaque petit élément subit une déformation due à un changement quelque, les cubes deviennent des parallélépipèdes et donc leur arrangement pour former un corps déformé et continu peut devenir un problème. Pour assurer cette continuité les composantes (liant les différentes composantes du tenseur de déformation entre elles). Qu'on appelle équations de continuité.

On différentie ε_x deux fois par rapport à y.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial_y{}^2} = \frac{\partial^3{}_u}{\partial_x \partial_y{}^2}$$

De même pour $\varepsilon_y = \partial v / \partial y$ par rapport à x

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial_x{}^2} = \frac{\partial^3{}_v}{\partial_x{}^2 \partial_y}$$

La somme de ces deux nouvelles équations donne :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial_y{}^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial_x{}^2} = \frac{\partial^3{}_u}{\partial_x \partial_y{}^2} + \frac{\partial^3{}_v}{\partial_x{}^2 \partial_y} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial_x \partial_y}$$

C'est la première équation de compatibilité, les deux autres s'obtiennent de façon similaire.

De plus on a :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial_u}{\partial_y} + \frac{\partial_v}{\partial_x} \Rightarrow \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_z} = \frac{\partial^2 u}{\partial_y \partial_z} + \frac{\partial^2 v}{\partial_x \partial_z}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial_u}{\partial_z} + \frac{\partial_w}{\partial_x} \Rightarrow \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial_y} = \frac{\partial^2 u}{\partial_y \partial_z} + \frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial_w}{\partial_y} + \frac{\partial_v}{\partial_z} \Rightarrow \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial_x} = \frac{\partial^2 v}{\partial_x \partial_z} + \frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y}$$

En additionnant la 1ére et la 2éme et en retenant la 3éme

$$\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial_y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial_x}\right) = 2\frac{\partial^2 u}{\partial_y \partial_z}$$

En différentiant les deux membres de l'égalité par rapport à x:

$$\frac{\partial}{\partial_x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial_y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial_x}\right) = 2\frac{\partial^3 u}{\partial_y \partial_z \partial_x} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial_y \partial_z}$$

C'est la 4éme équation de compatibilité. Les deux dernières s'obtiennent de façon similaire.

$$\frac{\boldsymbol{\partial^2 \varepsilon_x}}{\boldsymbol{\partial_y}^2} + \frac{\boldsymbol{\partial^2 \varepsilon_y}}{\boldsymbol{\partial_x}^2} = \frac{\boldsymbol{\partial^2 \gamma_{xy}}}{\boldsymbol{\partial_x \partial_y}}$$
$$\frac{\boldsymbol{\partial^2 \varepsilon_x}}{\partial z^2} + \frac{\boldsymbol{\partial^2 \varepsilon_z}}{\partial x^2} = \frac{\boldsymbol{\partial^2 \gamma_{xz}}}{\partial x \partial z}$$
$$\frac{\boldsymbol{\partial^2 \varepsilon_y}}{\partial z^2} + \frac{\boldsymbol{\partial^2 \varepsilon_z}}{\partial y^2} = \frac{\boldsymbol{\partial^2 \gamma_{yz}}}{\partial y \partial z}$$
$$\frac{\partial}{\partial_x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial_x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial_y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial_y \partial_z}$$
$$\frac{\partial}{\partial_y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial_x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial_y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial_x \partial_z}$$
$$\frac{\partial}{\partial_z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial_x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial_y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial_x \partial_y}$$

EXERCICES ET APPLICATIONS

APPLICATION :

Le vecteur déplacement en un point $M(x,y,z)$ d'un corps est donné par ses composantes :

$$\begin{cases} U = x^2 + y^2 \\ V = 6z - 2xy \\ W = -z^2 \end{cases}$$

Déterminer les déformations et directions principales.

Les composantes de déformation sont :

$\varepsilon_x = \partial_u/\partial_x = 2x$ $\quad\gamma_{xy} = \partial_u/\partial_y + \partial_v/\partial_x = 0$

$\varepsilon_y = \partial_v/\partial_y = -2x$ $\quad\gamma_{xz} = \partial_u/\partial_z + \partial_w/\partial_x = 0$

$\varepsilon_z = \partial_w/\partial_z = -2z$ $\quad\gamma_{yz} = \partial_v/\partial_z + \partial_w/\partial_y = 6$

Le tenseur de déformation est

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & -2x & 3 \\ 0 & 3 & -2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & -2x & 3 \\ 0 & 3 & -2z \end{bmatrix}$$

On doit vérifier les six équations de continuité avec ces six termes cités dans le cours:

Les déformations principales se calculent en résolvant le système :

$$det\begin{bmatrix} (2x-\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & -2x-\varepsilon & 3 \\ 0 & 3 & -2z-\varepsilon \end{bmatrix} = 0$$

D'où $(2x-\varepsilon)[\varepsilon^2 + 2(x+z)\varepsilon + 4xz - 9] = 0$

Les solutions sont :

$\varepsilon_1 = 2x$

$\varepsilon_2 = -(x+z) - \sqrt{(x-z)^2+9}$
$\varepsilon_3 = -(x+z) + \sqrt{(x-z)^2+9}$

Les directions principales:

C'est la résolution du système

$$([\varepsilon] - \varepsilon_i[l])\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \{0\}$$

(1) $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2x$

$$\begin{bmatrix} -4mx + 3n = 0 \\ 3m - (2z+2x)n = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{bmatrix}$$

D'où $l_1 = \pm 1$; $m_1 = 0$; $n_1 = 0$

(2) $\varepsilon = \varepsilon_2 = -(x+z) - \sqrt{(x-z)^2+9}$

$$\begin{bmatrix} l = 0 \\ \left(-2x + (x+z) + \sqrt{(x-z)^2+9}\right)m + 3n = 0 \\ 3m - \left(2z - (x+z) - \sqrt{(x-z)^2+9}\right)n = 0 \end{bmatrix}$$

D'où $l_2 = 0$; $m_2 = \pm\frac{\propto 0}{\sqrt{9+\propto^2{}_0}}$; $n_2 = \pm\frac{3}{\sqrt{9+\propto^2{}_0}}$

Avec $\propto_0 = +(z-x) - \sqrt{(x-z)^2+9}$

(3) $\varepsilon = \varepsilon_3 = -(x+z) + \sqrt{(x-z)^2+9}$

$$\begin{bmatrix} l = 0 \\ \left(-2x + (x+z) - \sqrt{(x-z)^2+9}\right)m - 3n = 0 \\ 3m - \left(2z - (x+z) - \sqrt{(x-z)^2+9}\right)n = 0 \end{bmatrix}$$

D'où $l_3 = 0$; $m_3 = \pm\frac{\propto_1}{\sqrt{9+\propto_1{}^2}}$; $n_3 = \pm\frac{3}{\sqrt{9+\propto_1{}^2}}$

Avec : $\propto_1 = (z-x) - \sqrt{(x-z)^2+9}$

APPLICATION :

En considérant les composantes du vecteur déplacement de l'application présente, définir l tenseur des rotations.

$\omega_{xy} = 1/2(\partial_v/\partial_x - \partial_u/\partial_y) = 1/2\,(-2y - 2y) = -2y$
$\omega_{xz} = 1/2(\partial_w/\partial_x - \partial_u/\partial_z) = 0$
$\omega_{xz} = 1/2(\partial_w/\partial_y - \partial_v/\partial_z) = -3$

D 'où le tenseur sera :

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -2y & 0 \\ -2y & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$