Dans la théorie de l'élasticité, en plus de l'hypothèse de l'élasticité, le matériau supposé continu, homogène et isotrope.

On suppose que les composantes de déplacements (u, v, w) permettent au corps de passer d'un état initial à un état final de déformation sont suffisamment petites pour rester dans la théorie des petites déformations.

- *<u>LOI GENERALE DE HOOKE</u>*

C'est par la propriété élastique des corps qu'on a pu relier la déformation à la contrainte expérimentalement établie par Hooke.

Le cas, le plus simple est celui d'une barre de section "E" tendre ou "comprimée" par une force F produisant une contrainte "σ" uniforme sur sa section.

$\sigma = E.\varepsilon$

E : une constante

ε : Déformation longitudinale.

En généralisent la loi de Hooke sur un petit élément cubique dont les faces sont par allé les aux axes soumis uniquement à l'action d'une contrainte normale σ_x uniformément distribuée sur deux faces opposées dans ce cas le rapport contrainte –déformation est appelé module d'élasticité ou module d'Young du corps, noté E.

L'expérience montre que sous l'action de σ_x l'allongement (ou rétrécissement) unitaire de valeur $\varepsilon_x = \sigma_x/E$ est toujours accompagné de rétrécissement (ou allongement) dans les deux autres directions y et z de valeurs :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\sigma_X/E \qquad \text{(2bis)}$$

Où v désigne le coefficient de poisson.

Si le petit élément est soumis aux trois contraintes normales σ_x, σ_y et σ_Z.

On aura :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= {}^1/_E\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\
\varepsilon_y &= {}^1/_E\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \quad (3) \\
\varepsilon_z &= {}^1/_E\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]
\end{aligned}$$

De même une contrainte de cisaillement τ_{ij} qui agit seule sur une facette quelconque d'un corps, produira une déformation angulaire γ_{ij} tel que :

$$\gamma_{ij} = \tau_{ij}/G \qquad (4)$$

G : le module d'élasticité en cisaillement.

On a en général $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (5)

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= {}^1/_E\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \quad & \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G \\
\varepsilon_y &= {}^1/_E\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \quad & \gamma_{xZ} &= \tau_{XZ}/G \qquad (6) \\
\varepsilon_z &= {}^1/_E\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \quad & \gamma_{YZ} &= \tau_{YZ}/G
\end{aligned}$$

<u>EQUATIONS DE LAME</u>

$\sum$ des (6)

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}(1 - 2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

On pose

$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \theta$ Trace du tenseur des contraintes

$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_v$ Dilatation cubique.

$\varepsilon_v = \theta \frac{(1-2\gamma)}{E}$ (7)

(6) $\Longrightarrow$

$$\sigma_x = \frac{\gamma E}{(1+\gamma)(1-2\gamma)}\varepsilon_v + \frac{E}{1+\gamma}\varepsilon_x \qquad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+v)}\gamma_{xy}$$
$$\sigma_y = \frac{\gamma E}{(1+\gamma)(1-2\gamma)}\varepsilon_v + \frac{E}{1+\gamma}\varepsilon_y \qquad \tau_{xz} = \frac{E}{2(1+v)}\gamma_{xz} \qquad (8)$$
$$\sigma_z = \frac{\gamma E}{(1+\gamma)(1-2\gamma)}\varepsilon_v + \frac{E}{1+\gamma}\varepsilon_z \qquad \tau_{yz} = \frac{E}{2(1+v)}\gamma_{yz}$$

En posant $\lambda = \frac{\gamma E}{(1+\gamma)(1-2\gamma)}$ et $G = \frac{E}{2(1+v)}$

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_v \qquad \tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_v \qquad \tau_{xz} = G\,\gamma_{xz} \qquad (9)$$
$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_v \qquad \tau_{yz} = G\,\gamma_{yz}$$

(9) sont appelées équations de LAME

λ et G sont les constantes de LAME

$\sum$ (9)

$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\lambda\varepsilon_v + 2G(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$

$\theta = (3\lambda + 2G)\varepsilon_v$

En posant

$K = (3\lambda + 2G)/3$

On aura

$\theta = 3K\varepsilon_V$ (10)

Cette relation exprime la relation entre la trace du tenseur des contraintes et celle du tenseur des déformations.

K : Module d'expansion volumique.

- *INFLUENCE DE LA TEMPERATURE*

ΔT : Variation de température influe sur le tenseur de déformation

$\varepsilon_x^T = \varepsilon_y^T = \varepsilon_z^T = \propto \Delta T$ et $\gamma_{xy}^T = \gamma_{xz}^T = \gamma_{yz}^T = 0$ (11)

$\propto$: Coefficient de dilatation thermique du solide.

Si un corps quelque est soumis en plus des forces extérieurs, à une variation de température (par superposition).

$$\varepsilon_x = {}^{1}\!/_{E}\left[\sigma_x - v(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \propto \Delta T \qquad \tau_{xy} = \gamma_{xy}/G$$
$$\varepsilon_y = {}^{1}\!/_{E}\left[\sigma_y - v(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \propto \Delta T \qquad \tau_{xz} = \gamma_{xZ}/G \qquad (12)$$
$$\varepsilon_z = {}^{1}\!/_{E}\left[\sigma_z - v(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \propto \Delta T \qquad \tau_{yz} = \gamma_{yZ}/G$$

En exprimant les contraintes en fonction des déformations on a :

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_v - (3\lambda + 2G) \propto \Delta T \qquad \tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$
$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_v - (3\lambda + 2G) \propto \Delta T \qquad \tau_{xz} = G\,\gamma_{xZ} \qquad (13)$$
$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_v - (3\lambda + 2G) \propto \Delta T \qquad \tau_{yz} = G\,\gamma_{yZ}$$

(Formules de LAME effet T°)

Si $\Delta T = ax + by + cz$ $\quad \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_v - (3\lambda + 2G) \propto (ax + by + cz)$

$$\boxed{\varepsilon_v = \frac{1-2v}{E}\theta + 3 \propto \Delta T}$$