1-INTRODUCTON

Les corps solides ayant une géométrie avec des arrêtes dans toutes les directions possibles sont en général traités en coordonnées cartésiennes pour enfin exprimer leur comportement mécanique (sollicitations, contraintes, déformations, déplacements, etc...), cependant pour les corps solides avec des formes curvilignes (circulaires, ellipses, etc.…), dans ce type de formes il existe plusieurs possibilités d'usage de coordonnées.
Sachant que les coordonnés :

- Sphériques
- Cylindriques
- Polaires

Principalement, le rayon r est l'axe dominant sur la dimension aussi l'axe Z, mais l'angle θ avec (l'angle ψ en trois dimensions) leur dimensionnement est limité.

r : Rayon (distance à l'origine)

θ : Angle (l'angle que fait le rayon (r) avec un axe du repère cartésien

z: Axe de résolution pour la troisième dimension.

ψ : Angle (l'angle que fait le rayon (r) avec le deuxième axe du repère cartésien

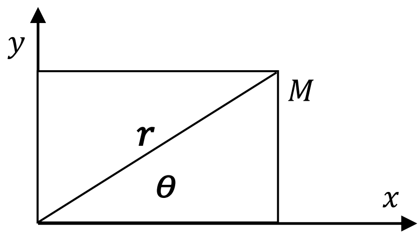
Cependant, les paramètres d'études en coordonnées polaires deviennent ainsi :

$$(\sigma_r ; \sigma_\theta ; \sigma_z ; \tau_{r\theta} ; \tau_{rz} ; \tau_{\theta z} \text{ et } \varepsilon_r ; \varepsilon_\theta ; \varepsilon_z ; \varepsilon_{r\theta} ; \varepsilon_{rz} ; \varepsilon_{\theta z})$$

En élasticité plane (déformation ou contrainte plane), on a :

$\tau_{rz} = \tau_{\theta z}=0$

Les autres composantes de contraintes ne dépendant que de r et θ, ce qui aboutit à l'usage seulement des coordonnées polaires (r et θ)

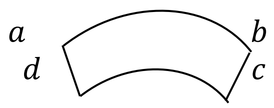


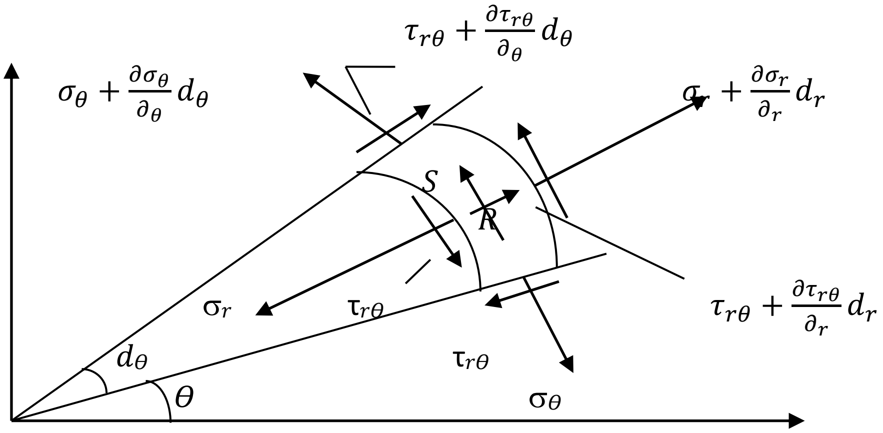
Les relations déduites entres les coordonnées cartésiennes et les cordonnées polaires :

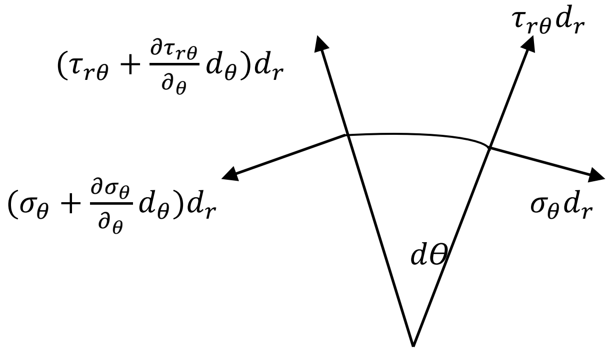
$$x = r.\cos\theta$$
$$y = r.\sin\theta$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\theta = Arctg(y/x)$$

2- EQUATIONS D'EQUILIBRE EN C.P.

Soit le petit élément $abcd$ en équation.







(1) somme des forces agissant dans la direction radiale (r) nulle :

$$\sigma_r.rd_\theta(1)+\left(\sigma_r+\frac{\partial\sigma_r}{\partial_\theta}d_r\right)(r+d_r)d_\theta(1)-\tau_{r\theta}.d_r(1).cos\frac{d_\theta}{2}$$
$$+\left(\tau_{r\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial_\theta}d_\theta\right)d_r(1).cos\frac{d_\theta}{2}-\sigma_\theta d_r(1).sin\frac{d_\theta}{2}-\ (\sigma_\theta$$
$$+\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial_\theta}d_\theta)d_r(1)sin\frac{d_\theta}{2}+R_rd_rd_\theta=0$$

N.B: R et Ssont les composantes de la force de volume suivant la direction radiale (r) et la direction par perpendiculaire au rayon qui agit sur le petit élément de dimensions (d_r et $rd\theta$).

(2) somme des forces agissant dans la direction perpendiculaire au rayon est nulle.

$$\left(\tau_{r\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial_\theta}d_\theta\right)d_r(1)sin\frac{d_\theta}{2}+\tau_{r\theta}.d_r(1).sin\frac{d_\theta}{2}-\tau_{r\theta}.d_\theta(1)$$
$$+\left(\tau_{r\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial_r}d_r\right)(r+d_r)d_\theta(1)-\sigma_\theta d_r(1).cos\frac{d_\theta}{2}+\ (\sigma_\theta$$
$$+\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial_\theta}d_\theta)d_r(1)cos\frac{d_\theta}{2}+S_rd_rd_\theta=0$$

Puisque la variation de l'angle d_θ est très petite on peut confondre :

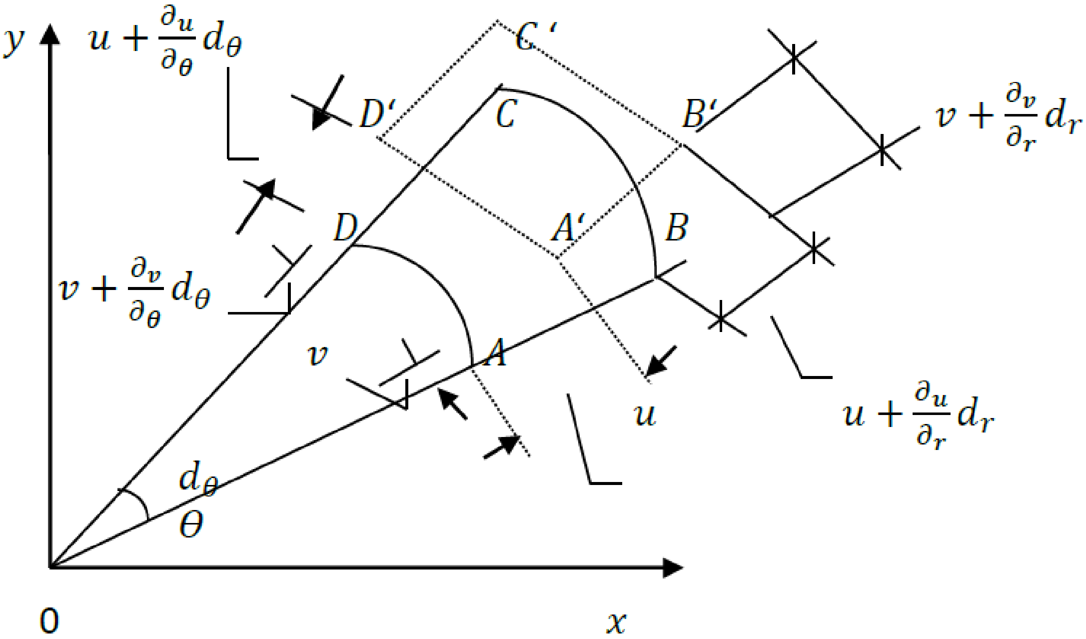
$$sin\frac{d_\theta}{2}\simeq\frac{d_\theta}{2}$$

$$cos\frac{d_\theta}{2}\simeq 1$$

Comme on peut négliger les canés de (d_r) et de (d_θ).

Les deux équations d'équilibre se réduisent alors à :

(1)
$\sigma_r dr \quad d$



θ

$$r \frac{\partial\sigma_r}{\partial_r} d_r d_\theta + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial_\theta} d_r d_\theta - \sigma_\theta d_r d_\theta + R_r d_r d_\theta = 0$$

(2) $$r \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial_r} d_r d_\theta + \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial_\theta} d_r d_\theta + 2\tau_{r\theta}.d_r d_\theta + S_r d_r d_\theta = 0$$

En éliminant les facteurs communs ($d_r d_\theta$) on aura les équations d'équilibre en coordonnées polaires.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{\partial\sigma_r}{\partial_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial_\theta} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + R = 0} \\ \boldsymbol{\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial_\theta} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} + S = 0} \end{cases}$$

3-EQUATION D'ELASTICITE PLANE BIHARMONIQUE EN C.P :

Equations le cas de l'élasticité plane en C.C la solution du Problème peut être obtenu en résolvant directement l'équation bi harmonique.

$$\nabla^4(\varphi) = \frac{\partial^4\varphi}{\partial_x{}^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial_x{}^2\partial_y{}^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial_y{}^4} = 0$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial_x{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial_y{}^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial_x{}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial_y{}^2}\right) = 0$$

Cette équation, en coordonnées polaires deviendra avec :

$r^2 = x^2 + y^2$ Ou bien $x = r\cos\theta$

$\theta = Arctg\, {}^{y}/_{x}$ $y = r\sin\theta$

D'où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial_x} = \frac{\partial\varphi}{\partial_r}\frac{\partial_r}{\partial_x} + \frac{\partial\varphi}{\partial_\theta}\frac{\partial_\theta}{\partial_x} = (\cos\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial_r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial_\theta}$$

$$cos\frac{\partial_r}{\partial_x}=\frac{2x}{\sqrt[2]{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}=\cos\theta$$

et $\frac{\partial_\theta}{\partial_x}=\frac{-y/_{x^2}}{1+(^y/_x)^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-r\,sin\theta}{r^2}=-\frac{\sin\theta}{r}$

$\cos\theta=Arctg\,^y/_x\,;\,\left(Arctg\,f(x)\right)'=\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial_x{}^2}=\frac{\partial}{\partial_x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial_x}\right)=\left(cos\theta\frac{\partial}{\partial_r}-\frac{sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial_\theta}\right)\left(cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial_r}-\frac{sin\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial_\theta}\right)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial_x{}^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2}cos^2\theta+\frac{\partial\varphi}{\partial_\theta}\frac{cos\theta\,sin\theta}{r^2}-\frac{sin\theta cos\theta}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r\partial_\theta}-\frac{sin\theta cos\theta}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r\partial_\theta}+\frac{sin^2\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial_r}$$
$$+\left(\frac{sin\theta}{r}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial_\theta{}^2}+\frac{sin\theta cos\theta}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_\theta}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial_x{}^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2}cos^2\theta+2\frac{\partial\varphi}{\partial_\theta}\frac{cos\theta\,sin\theta}{r^2}-2\frac{sin\theta cos\theta}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r\partial_\theta}+\frac{sin^2\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial_r}+\frac{sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_\theta{}^2}}$$

$$\frac{\partial_r}{\partial_y}=\frac{2y}{\sqrt[2]{x^2+y^2}}=\frac{r\,sin\theta}{r}=sin\theta$$

$$\frac{\partial_\theta}{\partial_y}=\frac{1/_x}{1+(^y/_x)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{r\,cos\theta}{r^2}=\frac{cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial_y}=\frac{\partial\varphi}{\partial_r}\frac{\partial_r}{\partial_y}+\frac{\partial\varphi}{\partial_\theta}\frac{\partial_\theta}{\partial_y}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial_y}=\frac{\partial\varphi}{\partial_r}sin\theta+\frac{\partial\varphi}{\partial_\theta}\frac{cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial_y{}^2}=\left(\frac{\partial}{\partial_r}sin\theta+\frac{cos\theta}{2}\frac{\partial}{\partial_\theta}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial_r}sin\theta+\frac{cos\theta}{r}\frac{\partial_y}{\partial_\theta}\right)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial_y{}^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2}sin^2\theta-\frac{sin\theta cos\theta}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial_\theta}+\frac{sin\theta cos\theta}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r\partial_\theta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r\partial_\theta}\frac{sin\theta cos\theta}{r}+\frac{cos^2\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial_r}$$
$$+\frac{cos\theta sin\theta}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial_\theta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial_\theta{}^2}\frac{cos^2\theta}{r^2}$$

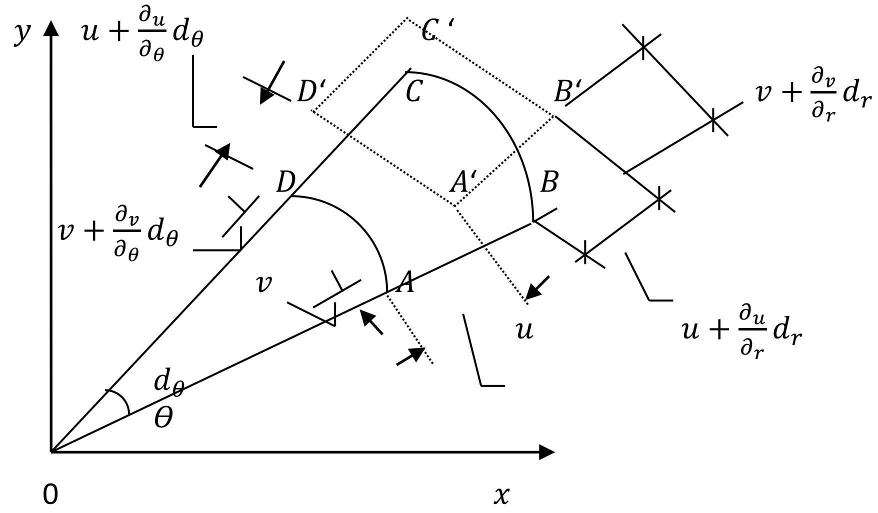
$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial_y{}^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2}sin^2\theta-2\frac{sin\theta cos\theta}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial_\theta}+2\frac{sin\theta cos\theta}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r\partial_\theta}+\frac{cos^2\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial_r}+\frac{cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_\theta{}^2}}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial_x{}^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial_y{}^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial_r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_\theta{}^2}$$

$$\nabla^4(\varphi)=\left(\frac{\partial^2}{\partial_r{}^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial_\theta{}^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial_r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_\theta{}^2}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial_r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_\theta{}^2}\\ \sigma_\theta&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2}\\ \tau_{r\theta}&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial_\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r\partial_\theta}\end{aligned}}$$

4-<u>COMPOSANTES DE LA DEFORMATION EN COORDONNÉES POLAIRES</u>



Les déplacements du pt A

- U : radiale
- V : tangentielle

<u>Suivant la direction radiale</u> AB l'allongement unitaire de l'elt ε_r

$\varepsilon_r = \frac{\left(u+\frac{\partial_u}{\partial_r}d_r\right)-(u)}{d_r} = \frac{\partial_u}{\partial_r} \Longrightarrow \quad \varepsilon_r = \frac{\partial_u}{\partial_r}$

<u>Suivant la direction tangentielle</u> AD

$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta_u} + \varepsilon_{\theta_V}$

$$\varepsilon_{\theta_V} = \frac{v+\frac{\partial_v}{\partial_\theta}d_\theta - v}{rd_\theta} = \frac{\partial_v}{r\partial_\theta}$$

$\varepsilon_{\theta_u} = \frac{(r+u)d_\theta - rd_\theta}{rd_\theta} = \frac{u}{r}$ la nouvelle long r de l'article AD $(r+u)\ d_\theta$

$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial_v}{r\partial_\theta}$

<u>Distorsion</u> $\gamma_{r\theta}$ c'est la somme des angles que font A'D' et A'B' après déférente

Côté A'D' $\propto_1 = \frac{u+\frac{\partial_u}{\partial_\theta}d_\theta - u}{rd_\theta} - \frac{\partial_u}{r\partial_\theta}$

Côté A'B' $\propto_2 = \frac{V+\frac{\partial_V}{\partial_r}d_r - V}{d_r} - \frac{V}{r}$

$= \frac{\partial_V}{\partial_r} - \frac{V}{r}$

$\gamma_{r\theta} = \propto_1 + \propto_2 = \frac{\partial_u}{r\partial_\theta} + \frac{\partial_V}{\partial_r} - \frac{V}{r}$

la quantité V/r représente le déplacement angulaire dû à la rotation l'origine de l'élément ABCD considéré comme rigide autour de l'axe passant par O.
Cette quantité n'intervient pas dessus la déformation transversale.

$$\boxed{\gamma_{r\theta} = \frac{\partial_u}{r\partial_\theta} + \frac{\partial_V}{\partial_r} - \frac{V}{r}}$$

En éliminant u et v des composantes de déformation on peut facilement vérifier que l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial^2\varepsilon_\theta}{\partial_r} + \frac{\partial^2\varepsilon_r}{r^2{\partial_\theta}^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial_r} = \frac{\partial^2\gamma_{r\theta}}{r\partial_r\partial_\theta} + \frac{\partial\gamma_{r\theta}}{r^2\partial_\theta}$$

Les équations de Hooke deviennent

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - v\sigma_\theta]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - v\sigma_r]$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}$$

5-<u>DISTRIBUTION SYMETRIQUE DES CONTRAINTES AUTOUR D'UN POINT</u>

Si la distribution des contraintes est symétrique par rapport à un axe passant par le centre et pas perpendiculaire au plan de la section, les composantes de la contrainte ne dépendent pas de θ mais de r seulement, de plus la contrainte de cisaillement est nulle $\tau_{r\theta}$= 0.

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial_r} \\ \sigma_\theta = \dfrac{\partial^2\varphi}{{\partial_r}^2} \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\nabla^4(\varphi) = \frac{\partial^4\varphi}{{\partial_r}^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3\varphi}{{\partial_r}^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial\varphi}{\partial_r} = 0$$

Et $\nabla^4(\varphi) = \left(\frac{\partial^2}{{\partial_r}^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{{\partial_r}^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r}\right) = 0$

C'est une équation différentielle ordinaire du $4^{éme}$ degré. Sa résolution nécessite le changement de variable $r = e^t$ et donc :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial_r} = \frac{\partial\varphi}{\partial_t}\frac{\partial t}{\partial_r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial_t}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{{\partial_r}^2} = \frac{\partial}{\partial_r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial_r}\right) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{{\partial_t}^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial_r}\right)$$

$$\frac{\partial^3\varphi}{{\partial_r}^3} = \frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial^3\varphi}{{\partial_t}^3} - 3\frac{\partial^2\varphi}{{\partial_t}^2} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial_t}\right)$$

$$\frac{\partial^4\varphi}{{\partial_r}^4} = \frac{1}{r^4}\left(\frac{\partial^4\varphi}{{\partial_t}^4} - 6\frac{\partial^3\varphi}{{\partial_t}^3} + 11\frac{\partial^2\varphi}{{\partial_t}^2} - 6\frac{\partial\varphi}{\partial_t}\right)$$

L'équation biharmonique devient :

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial_t{}^4}-4\frac{\partial^3\varphi}{\partial_t{}^3}+4\frac{\partial^2\varphi}{\partial_t{}^2}=0$$

C'est une équation différentielle linéaire à coefficient dont la solution est :

$$\varphi=A.t+B.t.e^{2t}+C.e^{2t}+D$$

Or: $t=\log r$

$$\varphi(r)=A\log r+B_r{}^2\log r+C_r{}^2+D$$

Les constantes A.B.C et D sont des constantes d'intégration et dépendant du chargement de la structure et de la géométrie.

* *la distribution des contraintes*

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial_r}=B(1+2\log r)+2C\frac{A}{r^2}$$

$$\sigma_\theta=\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2}=B(3+2\log r)+2C-\frac{A}{r^2}$$

$$\tau_{r\theta}=0$$

* les composantes de déformation dans le cas de distribution symétrique seront :

$$\varepsilon_r=\frac{\partial_u}{\partial_r};\ \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}+\frac{\partial_v}{r\partial_\theta};\ \gamma_{r\theta}=\frac{\partial_V}{\partial_r}+\frac{\partial_r}{r\partial_\theta}-\frac{V}{r}$$

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}[\sigma_r-v\sigma_\theta]=\frac{1}{E}\left[\left[B(1+2\log\ r)+2C+\frac{A}{r^2}\right]-v\left[B(3+2\log r)+2C-\frac{A}{r^2}\right]\right]$$

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}[\sigma_\theta-v\sigma_r]=\frac{1}{E}\left[\left[B(3+2\log r)+2C-\frac{A}{r^2}\right]-v\left[B(1+2\log\ r)+2C+\frac{A}{r^2}\right]\right]$$

$$\gamma_{r\theta}=\frac{\tau_{r\theta}}{G}=0$$

6-<u>CALCUL DES DEPLACEMENTS ELASTIQUES DANS LE CAS DE DISTRIBUTION</u>

<u>- SYMETRIQUE DE CONTRAINTE</u>

$$\nabla^2(\varphi)=\left(\frac{\partial^2}{\partial_r{}^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r}\right)=0$$

$$\varphi(r)=A\log\mathrm{r}+B_r{}^2\log r+C_r{}^2+D$$

$$\begin{cases}\sigma_r=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial_r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial_\theta{}^2}\\[2ex]\sigma_\theta=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2}\\[2ex]\tau_{r\theta}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial_\theta}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial_r\partial_\theta}\end{cases}$$

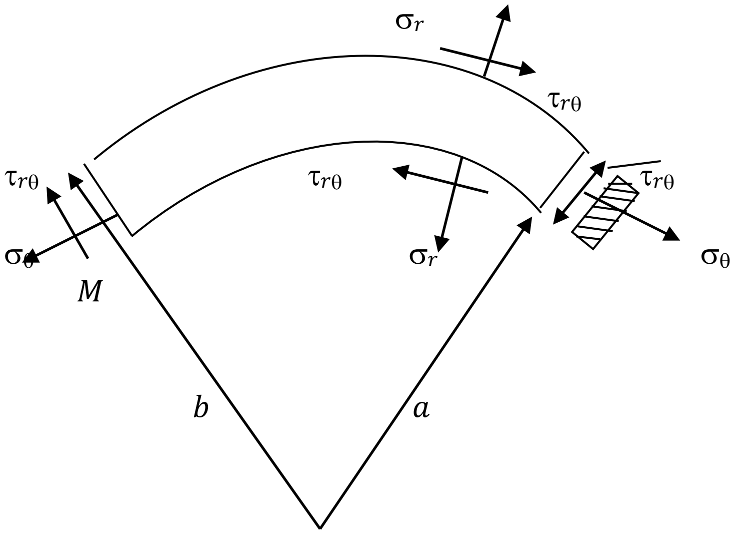
$$\begin{cases}\sigma_r=\dfrac{A}{r^2}+B(1+2\log\ r)+2C\\[2ex]\sigma_\theta=-\dfrac{A}{r^2}+B(3+2\log r)+2C\\\tau_{r\theta}=0\end{cases}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial_u}{\partial_r} = \frac{1}{E}[\sigma_r - v\sigma_\theta]$$
$$= \frac{1}{E}\left[\left[\frac{A}{r^2} + B(1 + 2\log\, r) + 2C\right] - v\left[-\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\log r) + 2C\right]\right]$$
$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[A\frac{1+v}{r^2} + B(1-3v) + 2\log r\, B(1-v) + 2C(1-v)\right]$$
$$u = \int \varepsilon_r d_r = \frac{1}{E}\left[-\frac{1+v}{r}A + B_r(1-3v) + 2B(r\log\, r - r)(1-v) + 2C_r(1-v)\right] + f(\theta)$$
A, B, C définis d'après les $C.l.$
$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial_v}{r\partial_\theta} + \frac{u}{r} = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - v\sigma_r]$$
$$\frac{\partial_v}{\partial_\theta} = \frac{r}{E}(\sigma_\theta - v\sigma_r) - u$$
$$\frac{\partial_v}{\partial_\theta} = \frac{r}{E}(-\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\log r) + 2C - \frac{vA}{r^2} - vB(1 + 2\log\, r) - 2vC) - u$$
$$\frac{\partial_v}{\partial_\theta} = \frac{1}{E}\left(-\frac{1+v}{r}A + B_r(3-v) + 2B_r\log r(1-v) + 2C_r\,(1-v)\right)$$
$$\frac{\partial_v}{\partial_\theta} = -\frac{1}{E}(-\frac{1+v}{r}A + B_r(1-3v) + 2B_r\log r(1-v) - 2B_r\,(1-v) + 2C_r\,(1-v)) - f(\theta)$$
$$\frac{\partial_v}{\partial_\theta} = \frac{1}{E}(2B_r\,(1+v) + 2B_r\,(1-v) - f(\theta)$$
$$\frac{\partial_v}{\partial_\theta} = \frac{4B_r}{E} - f(\theta) \Leftrightarrow v = \frac{4B_r}{E}\theta - \int f(\theta)d_\theta + f(r)$$
DISTORSION NULLE $\Longrightarrow \gamma_{r\theta} = 0$
$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial_u}{r\partial_\theta} + \frac{\partial_v}{\partial_r} - \frac{v}{r}$$
$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial f(\theta)}{\partial_\theta} + \frac{4B_\theta}{E} + \frac{\partial f_1(r)}{\partial_r} - \frac{4B_\theta}{E} + \frac{1}{r}\int f(\theta)\,d_\theta - \frac{\partial f_1(r)}{\partial_r} = 0$$
$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial f(\theta)}{\partial_\theta} + \int f(\theta)\,d_\theta + r\frac{\partial f_1(r)}{\partial_r} - f_1(r) = 0$$
$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial_\theta} + \int f(\theta)\,d_\theta = 0$$
$$r\frac{\partial f_1(r)}{\partial_r} - f_1(r) = 0$$
$$f(\theta) = H.cos\theta + l.sin\theta$$
$$f_1(r) = F.r$$
$$u = \frac{1}{E}\left[-\frac{1+v}{r}A + 2(1-v)B_r\log\, r - B\log\, r - B(1-v)r + 2C(1-v)v\right] + [1 + cos\theta + lsin\theta]$$
$$V = 4\frac{B_{r\theta}}{E} + Fr + lcos\theta - Hsin\theta$$

<u>- FLEXION SIMPLE D'UNE BARRE COURBE</u>

Considérons une barre courbe de section rectangulaire étroite constante, l'axe circulaire est soumis à la flexion dans le plan de courbure par des couples M appliquées à ses extrémités.

La barre est géométriquement symétrique et symétriquement chargée. Permettant d'avoir un état de distribution symétrique des contraintes.



$$\nabla^4\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial_r{}^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial_r}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial_r}\right) = 0$$

$$\varphi(r) = A.\log r + Br^2\log r + C\,r^2 + D$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial_r} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2} \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

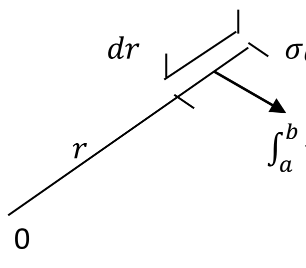
Les conditions aux limites :

1°/$r = a \longrightarrow \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$

2°/$r = b \longrightarrow \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$

3°/$\int_a^b \sigma_\theta d_r = 0$

4°/$\int_a^b r.\sigma_\theta d_r = M$



$\int_a^b r\sigma_\theta(d_r.r) = 0$

Intégration par partie

$$\frac{A}{a^2} + B(1 + 2\log\ a) + 2C = 0$$

$$\frac{A}{B^2} + (1 + 2\log\ b) + 2C = 0$$

$$\int_a^b r.\sigma_\theta d_r = -M \Rightarrow \int_a^b r\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2}\,d_r = -M$$

Integration par Partie

$$dif\int(g.f') = dif(g.f) - \int f.g'$$

$$f' = \frac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2} \Rightarrow f = \frac{\partial\varphi}{\partial_r}$$

$$g = r \Rightarrow g' = d_r$$

$$r\,\frac{\partial\varphi}{\partial_r}\bigg|_b^a - \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial_r}\,d_r = -M \Rightarrow \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial_r}\,d_r = M \Rightarrow \varphi\bigg|_a^b = M$$

$\searrow 0$

$$\Longrightarrow (A\log\ b + Bb^2\log\ b + C\,b^2) - (A\log\ a + Ba^2\log\ a + Ca^2) = M$$

$$\int_a^b \frac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2} d_r = \frac{\partial\varphi}{\partial_r}\Big|_a^b = 0$$

$$(\frac{A}{b} + 2B.b\log\ b + B.b + 2Cb) - (\frac{A}{a} + 2Ba\ \log\ a + Ba + 2Ca) = 0$$

Après solution de ces 3 équations :

$$A = -\frac{4M}{\propto} a^2b^2 \log {}^{b}/_{a}\ ;\ B = -\frac{M}{\propto}(b^2 - a^2)\ ;\ C = \frac{M}{\propto}(b^2 - a^2) + 2(b^2 \log b - a^2 \log c$$

Avec $\propto = (b^2 - a^2)^{\ 2} - 4a^2b^2(\log {}^{b}/_{a})^2$

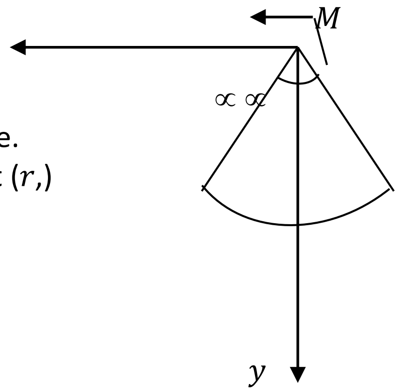
$$\sigma_r = -\frac{4M}{\propto}(\frac{a^2b^2}{r^2}\log {}^{b}/_{a} + b^2 \log {}^{r}/_{b} + a^2 \log {}^{a}/_{r})$$

$$\sigma_\theta = -\frac{4M}{\propto}\left(\frac{a^2b^2}{r^2}\log {}^{b}/_{a} + b^2 \log {}^{r}/_{b} + a^2 \log {}^{a}/_{r}) + b^2 - a^2\right)$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

APPLICATION

Soit un coin fin (épaisseur = l'unité) illimité d'angle $2x$ au soumet duquel est appliqué un moment constant M



Et soit $\varphi(r, \theta) = A\theta + Bsin\ 2\theta$

Aet B sont des constantes.

i/ Vérifier que $(r,)$ est le fonction d'Airy

ii/ Déterminer les constantes A et B pour avoir l'équilibre.

iii/ Déterminer le vecteur déplacement $(u,)$ en tout point $(r,)$

SOLUTION

i/ $\nabla^4\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial_r{}^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial_\theta{}^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r{}^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial_r}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_\theta{}^2}\right) = 0$

Avec $\varphi(r, \theta) = A\theta + Bsin2\theta$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial_r{}^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial_\theta{}^2}\right) = -\frac{4}{r^2}Bsin2\theta$$

$$\nabla^4\varphi = -\frac{24}{r^4}Bsin2\theta + \frac{8}{r^4}Bsin2\theta + \frac{16}{r^4}Bsin2\theta = 0$$

ii/$\theta = \pm\propto\ \Longrightarrow \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$

ΣMints = M

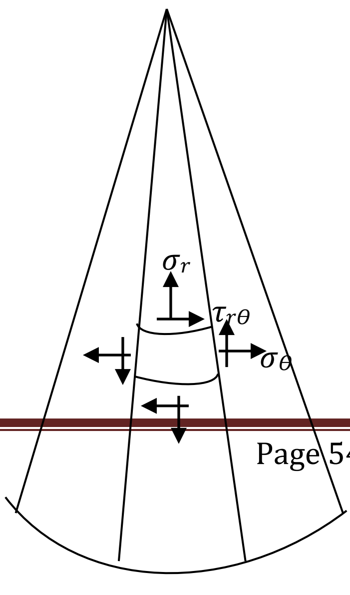
$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial_r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_\theta{}^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\varphi}{\partial_\theta{}^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial_\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_r\partial_\theta}$$

D'où

$$\sigma_r = -\frac{4}{r^2}Bsin2\theta$$



$\sigma_\theta = 0$
$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}(A + 2Bsin2\theta$
Avec les $C.l.$
$A + 2Bcos2 \propto = 0$
$\int_{-\propto}^{+\propto} \tau_{r\theta} r(rd_\theta) = M$

$$\begin{cases} A = -2Bcos\,2\propto \\ 2A\propto +2Bcos\,2\propto = M \end{cases}$$

rd_θ

$A = -\frac{M(\cos 2\propto)}{sin\,2\propto - 2\propto cos\,2\propto}$ et $B = \frac{M}{2\,sin\,2\propto - 4\propto cos\,2\propto}$

Ainsi

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{-2Msin\,2\theta}{r^2\,(\sin 2\propto - 2\propto\cos 2\propto)} \\ \sigma_\theta &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= \frac{M(\cos 2\theta - \cos 2\propto)}{r^2(\sin 2\propto - 2\propto\cos 2\propto)} \end{aligned}}$$

iii/ $\varepsilon_r = \frac{\partial_u}{\partial_r} = \frac{1}{E}(\sigma_r - v\sigma_\theta)$ après intégration
$u(r,\theta) = \frac{2C}{E.r}\sin 2\theta + f_1(\theta)$ Avec $C = \frac{M}{\sin 2\propto - 2\propto\cos 2\propto}$
$\varepsilon_\theta = \frac{\partial_v}{r\partial_\theta} + \frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - v\sigma_r)$ Après intégration
$V(r,\theta) = \frac{C}{Er}(1-v)cos2\theta - \int f_1(\theta)d_\theta + f_2(r)$
$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial_u}{r\partial_\theta} + \frac{\partial_v}{\partial_r} - \frac{v}{r} = \frac{\gamma_{r\theta}}{G}$
$\frac{\partial f_1(\theta)}{\partial_\theta} + r\frac{\partial f_2(\theta)}{\partial_r}\int f_1(\theta)d_\theta - f_2(r) = -\frac{2C(1+v)}{Er}cos2\propto$
$\frac{\partial f_2(r)}{\partial_r} - f_2(r) = -\frac{2C(1+v)}{Er}cos2\propto$
$\frac{\partial f_1(\theta)}{\partial_\theta} + \int f_1(\theta)d_\theta = 0$
$\Longrightarrow\ f_1(\theta) = H\,cos\theta + Ksin\theta\ ;\ f_2(r) = C(1+v)/Er$
$u(r,\theta) = \frac{2C}{Er}sin2\theta + Hcos\theta + Ksin\theta$
$V(r,\theta) = \frac{C}{Er}(1-v)cos2\theta - Hsin\theta + Kcos\theta + \frac{C(1+v)}{Er}$
K, H à déterminer par les C.L sur les déplacements.