Exercice n°: 1

(1)

* la deformation étant uniforme, elle est identique (selon chaque direction) en tout point :

DEFORMATION LONGITUDINALE

- déformation selon "x" : c'est le taux de changement de longueur du côté selon "x" ⇒ côté AB ou DC

$$\Rightarrow \varepsilon_x = \varepsilon_{AB} = \varepsilon_{DC} = \frac{u_B - u_A}{AB} = \frac{u_C - u_D}{CD} = \frac{1}{150} = 6{,}67\ 10^{-3}$$

- déformation selon "y" : c'est le taux de changement de longueur du côté selon "y" ⇒ côtés AD ou BC

$$\Rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_{AD} = \varepsilon_{BC} = \frac{V_D - V_A}{AD} = \frac{V_C - V_B}{BC} = \frac{4}{100} = 40 . 10^{-3}$$

DEFORMATION ANGULAIRE (TANGENTIELLE)

c'est la somme des ~~taux de changement de longueur~~ variation de deplacement selon des directions ⊥ à ces déplacements (Σ des angles) → γ_{xy}

$$\gamma_{xy} = \frac{u_D - u_A}{AD} + \frac{V_A - V_B}{AB} = \frac{4}{\underbrace{150}_{100}} + \frac{2}{\underbrace{100}_{150}} = \underbrace{4{,}67\ 10^{-3}}$$

N.B $\gamma_{xy} < 0$ car l'angle BCD a augmenté ($> 90°$)

$$\rightarrow \gamma_{xy} = -4{,}67\ 10^{-3}$$

Resumé

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= 6{,}67\ 10^{-3} \\ \varepsilon_y &= 40\ 10^{-3} \\ \gamma_{xy} &= -4{,}67\ 10^{-3} \end{aligned}}$$

* deformation principales

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

A.N/ $\varepsilon_{1,2} = \begin{cases} 5{,}20\ 10^{-2} \\ -5{,}34\ 10^{-3} \end{cases}$, $\theta_p = 27{,}2°$

Exercice 2

deformation uniforme → ∀ point ε_x et le m

→ $\varepsilon_x = \dfrac{(0{,}06 - 0{,}06)\,a}{a} = 0$ (m deplacement de C, Ripodi)

de m $\varepsilon_y = 0$ (pas de mvt)

$$\gamma_{xy} = \underbrace{\frac{0{,}06a}{a}}_{\text{deformation angulaire}/y} + \underbrace{0}_{\text{deformation angulaire}/x} = 0{,}06$$

* deformation selon les diagonales

plaque carrée → le θ ds plan diagonaux → θ = 45°

$$\rightarrow \varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\times45° + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\times 45°$$

$$\varepsilon_{45} = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03$$

⇒ selon θ = 45° → allongement → $\varepsilon_{45} = 0{,}03$

selon θ = −45 → racourssissenet → $\varepsilon_{-45} = -0{,}03$

* longueur des diagonales après deformation.

→ avant deformation $AC = BD = a\sqrt{2}$

ainsi
$$\begin{cases} AC \longrightarrow \underbrace{a\sqrt{2}}_{\text{longueur initiale}} + \underbrace{0{,}03.\,a\sqrt{2}}_{\text{allongement}} = 1{,}4566\,a \\ BD \longrightarrow \underbrace{a\sqrt{2}}_{\text{longueur initiale}} - \underbrace{0{,}03.\,a\sqrt{2}}_{\text{racoursissent}} = 1{,}3718\,a \end{cases}$$

* $$\gamma_{45} = -\underbrace{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}_{=0}\sin(2\times45°) + \frac{\gamma_{xy}}{2}\underbrace{\cos(2\times 45°)}_{=0} = 0$$

⇒ l'angle entre les diagonales $\underline{= 0}$

⇒ les diagonales restent perpendiculaire l'une / l'autre

Exercice 3

en 1 point → $\varepsilon_1 = 400\ 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 200\ 10^{-5}$

deformation sur un plan à $\theta = +30°$

$$\begin{cases} \varepsilon_{x'} = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \dfrac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \\ \varepsilon_{y'} = \quad - \shortparallel - \quad - \quad - \shortparallel - \quad - \quad - \shortparallel - \\ \gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

A.N/

$\varepsilon_x = \varepsilon_1$

$\varepsilon_y = \varepsilon_2$

$\gamma_{xy} = 0$

$$\begin{cases} \varepsilon_{x'(30)} = 350\ 10^{-5} \\ \varepsilon_{y'(30)} = 250\ 10^{-5} \\ \gamma_{x'y'(30)} = -173\ 10^{-5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\gamma_{max}}{2} = \pm \dfrac{(400-200)\ 10^{-5}}{2} \Rightarrow \gamma_{xy} = 200\ 10^{-5} \\ \varepsilon' = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \dfrac{(400+200)}{2}10^{-5} = 300\ 10^{-5} \end{cases}$$

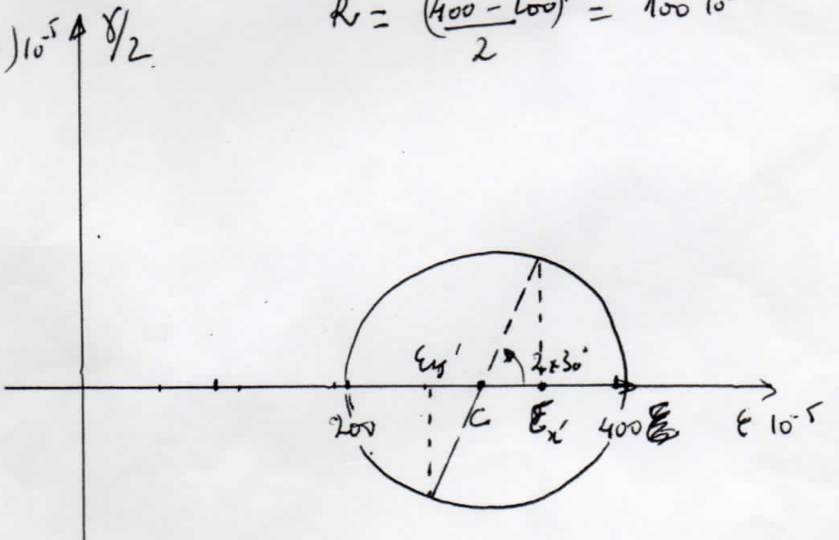
Méthode du Cercle de MOHR

$C\left(\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}, 0\right) = (300, 0)10^{-5}$

$R = \left(\dfrac{400-200}{2}\right)10^{-5} = 100\ 10^{-5}$

$A(\varepsilon_1, 0)$

$B(\varepsilon_2, 0)$



$$\begin{cases} \varepsilon_{x'(30)} = C + R\cos 2\times 30 = 300\,10^{-5} + 100\,10^{-5}\cos 60 = 350\,10^{-5} \\ \varepsilon_{y(30)} = C - R\cos 2\times 30 = 300\,10^{-5} - 100\,10^{-5}\cos 60 = 250\,10^{-5} \\ \dfrac{\gamma_{x'y'(30)}}{2} = R(\sin 60) = 100\,10^{-5}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \end{cases}$$

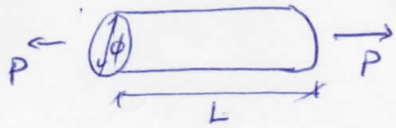
$\gamma_{max} = \pm R =$

$\varepsilon' = C$

$\Rightarrow \gamma_{x'y'} = 173\ 10^{-5} \times (-1)$

↑ pour trouver le vrai signe

Exercice 4



$$\begin{cases} \phi = 12\,mm \\ L = 75\,mm \\ P = 9\,KN \end{cases}$$

δ : resultant → $\delta = 0{,}025\,mm$

Contraintes et déformations infinitesimales : σ_{inf} , ε_{inf}

$$\varepsilon_{inf} = \frac{\delta}{L} \quad , \quad \sigma_{inf} = \frac{P}{S_0}$$

section initiale

$$\begin{cases} \varepsilon_{inf} = \frac{0{,}025}{75} = 3{,}333\,10^{-4} \\ \sigma_{inf} = \frac{P}{S_0} = \frac{4.P}{\pi D^2} = 7{,}957.10^{-2}\ KN/mm^2 \end{cases}$$

Contraintes et déformations "vraies" (voir cours)

$$\varepsilon_v = \ln(1+\varepsilon_{inf}) = 3{,}3327\ 10^{-4}$$

$$\sigma_v = \sigma_{inf}(1+\varepsilon_{inf}) = 7{,}959\ 10^{-2}\ KN/mm^2$$

Module d'élasticité

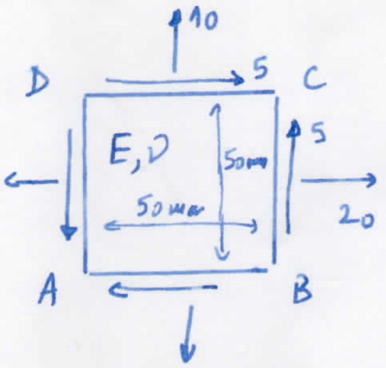
$$E_{inf} = \frac{\sigma_{inf}}{\varepsilon_{inf}} = 238{,}853\ KN/mm^2$$

$$E_v = \frac{\sigma_v}{\varepsilon_v} = 238{,}815\ KN/mm^2$$

conclusion

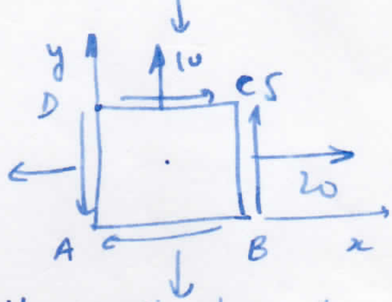
domaine elastique le calcul infintesimal est suffisant

Exercice 5



Allongement de AC

état de contrainte que subie la plaque est un état constant ⇒ Valable en ∀ point.
⇒ en 1 point infinitésimal



→ trouvons d'abord l'état de contrainte sur cette élément

$$\begin{cases} \sigma_x = 20 \\ \sigma_y = 10 \\ \tau_{xy} = 5 \end{cases}$$

→ on en déduit l'état de déformation (état élastique linéaire)

→ loi de HOOKE →

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \dfrac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu \dfrac{\sigma_x}{E} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \end{cases} \quad \text{avec} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

allongement de AC → $\varepsilon_{AC} = \dfrac{\delta_{AC}}{AC}$ ← allongement de AC

déformation de AC

$$\Rightarrow \quad \delta_{AC} = AC \cdot \varepsilon_{AC}$$

* Calcul de ε_{AC} : c'est la déformation sur le plan à $\theta = 45°$

$$\varepsilon_{AC} = \varepsilon_{45°} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

AN/

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{20}{E} - \nu \dfrac{10}{E} = \dfrac{10}{E}(2 - \nu) \\ \varepsilon_y = \dfrac{10}{E} - \nu \dfrac{20}{E} = \dfrac{10}{E}(1 - 2\nu) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{5 \times 2(1+\nu)}{E} = \dfrac{10}{E}(1 + \nu) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos \overset{0}{\cancel{90}} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin \overset{1}{\cancel{90}}$$

$$\varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\varepsilon_{45} = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{E}(2-\nu) + \frac{10}{E}(1-2\nu) + \frac{10}{E}(1+\nu) \right) = \frac{10}{E}(2-\nu)$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{AC} = AC \, . \, \varepsilon_{45}$$

$AC = 50\sqrt{2}$ (diagonale)

$$\delta_{AC} = 50\sqrt{2} \, . \, \frac{10}{E}(2-\nu)$$

$$\boxed{\delta_{AC} = \frac{500\sqrt{2}}{E}(2-\nu)}$$

---

on peut aussi utiliser une 2^e méthode :

→ on transforme les contraintes sur le plan à $\theta = 45°$

$$\begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \sigma_{x(45)} \\ \sigma_{y(45)} \\ \tau_{xy(45)} \end{matrix} \quad \text{avec } \theta = 45°$$

on calcul ensuite ε_{45} en utilisant la loi de HOOKE