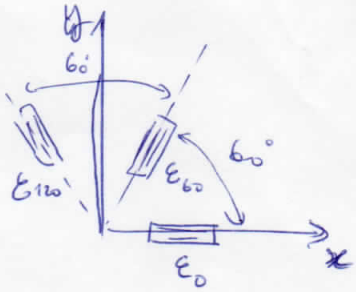
Exercice 6

systeme de rosette à 60° → lecture donne :

$$\varepsilon_0 = 75\,10^{-6} \qquad \varepsilon_{60} = 150\,10^{-6} \qquad \varepsilon_{120} = 100.10^{-6}$$

→ Application directe des formuls du cours :

une systeme de jauges en rosette à 60°



donne

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_y = \frac{1}{3}(2\varepsilon_{60} + 2\varepsilon_{120} - \varepsilon_0) \\ \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{60} - \varepsilon_{120}) \end{cases}$$

Ces formuls se deduisent de la resolution de :

$$\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin(2\times\theta)$$

ou plus simplement de :

de ici

$$\begin{cases} \varepsilon_{0°} = \varepsilon_x\cos^2(0) + \varepsilon_y\sin^2(0) + \gamma_{xy}\sin(0)\cos(0) \\ \varepsilon_{60°} = \varepsilon_x\cos^2(60) + \varepsilon_y\sin^2(60) + \gamma_{xy}\sin(60)\cos(60) \\ \varepsilon_{120} = \varepsilon_x\cos^2(120) + \varepsilon_y\sin^2(120) + \gamma_{xy}\sin(120)\cos(120) \end{cases}$$

A.N

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_0 = 75\,10^{-6} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{3}(2\times 150\,10^{-6} + 2\times 100\,10^{-6} - 75\,10^{-6}) = 141{,}67\,10^{-6} \\ \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(150\,10^{-6} - 100\,10^{-6}) = 57{,}735\,10^{-6} \end{cases}$$

avec $\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = 108{,}335\,10^{-6} \pm 44{,}097\,10^{-6}$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = +152{,}430\,10^{-6} \\ \varepsilon_2 = +64{,}238\,10^{-6} \end{cases}$$

<u>ou en fct des $(\varepsilon_0, \varepsilon_{60}, \varepsilon_{120})$</u>

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{3}(\varepsilon_0 + \varepsilon_{60} + \varepsilon_{120}) \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{60})^2 + (\varepsilon_{60} - \varepsilon_{120})^2 + (\varepsilon_{120} - \varepsilon_0)^2}$$

$$\underbrace{}_{-75} \quad \underbrace{}_{-50} \quad \underbrace{}_{25}$$

$93{,}47\,10^{-6} \pm 54{,}098$

Exercice 7

en 1 pont un système de jauges en rosettes à 45° donne comme lecture :

$$\varepsilon_0 = 190\,10^{-6} \qquad \varepsilon_{45} = 200\,10^{-6} \qquad \varepsilon_{90} = -300\,10^{-6}$$

determiner les contraints principales ?

determinons d'abord les deformations principales.

(voir le cours pour les formules) $\rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_y = \varepsilon_{90} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45} - \varepsilon_0 - \varepsilon_{90°} \end{cases}$

et $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0 + \varepsilon_{90} \pm \sqrt{2}\sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{45})^2 + (\varepsilon_{45} - \varepsilon_{90})^2}\right]$

AN/

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}\left[190\,10^{-6} - 300\,10^{-6} \pm \sqrt{2}\sqrt{(190\,10^{-6} - 200\,10^{-6})^2 + (200\,10^{-6} + 300\,10^{-6})^2}\right]$$

$\varepsilon_{1,2} =$ $\overset{0,000110}{0,00011}$ $\pm$ $\cancel{707}$,25 10^{-6} $= \begin{cases} \rightarrow \overset{8,1725\,10^{-4}}{\cancel{\quad}} \\ -5,97\,10^{-4} \end{cases}$ $\begin{cases} 298,6.10^{-6} \\ -408,6.10^{-6} \end{cases}$

$E = 200\ GPa \qquad \nu = 0,3$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} \\ \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E} \end{cases} \Rightarrow ? \begin{cases} \sigma_1 = \frac{E}{1+\nu^2}\left[\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2\right] & 0,038\ GPa \\ \sigma_2 = \frac{E}{1+\nu^2}\left[\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1\right] & -0,07\ GPa \end{cases}$$

Exercice n° 8 :

1°/ $\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}$

$\{\sigma\}^t = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz}\}$

$\{\varepsilon\}^t = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}\}$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & 0 & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ \hline & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 1/G & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1/G \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

2°/ $\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\}$

$\Rightarrow \quad \longrightarrow [H] = [C]^{-1}$

Exercice 9 :

le champ de contrainte dans un solide est :

$$\sigma_x = k y^2 \quad , \quad \sigma_y = -kx^2 \quad \tau_{xy} = 0$$

le champ de deplacement :

$$\begin{cases} U(x,y) = ? \\ V(x,y) = ? \end{cases}$$

la loi de HOOKE $\longrightarrow$ $\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_y = \frac{1}{E}\left(ky^2 + \nu k x^2\right) \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x = \frac{1}{E}\left(-kx^2 - \nu k y^2\right) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{k}{E}\left(y^2 + \nu x^2\right) \\ \varepsilon_y = -\frac{k}{E}\left(x^2 + \nu y^2\right) \\ \gamma_{xy} = 0 \end{cases}$$

le champ de deplacement est tel que : $\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \quad (1) \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad (2) \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \quad (3) \end{cases}$

(1) $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{k}{E}\left(y^2 + \nu x^2\right)$

$\rightarrow \quad u(x,y) = \frac{k}{E}\left(xy^2 + \frac{\nu}{3}x^3\right) + C_1(y) \leftarrow$ cte $/x$

(2) $\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -\frac{k}{E}\left(x^2 + \nu y^2\right)$

$\rightarrow \quad v(x,y) = -\frac{k}{E}\left(x^2 y + \frac{\nu}{3}y^3\right) + C_2(x) \leftarrow$ cte$/y$

(3) $\gamma_{xy} = \underbrace{\frac{k}{E}(2xy) + \frac{d C_1(y)}{dy}}_{\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}} + \underbrace{\left(-\frac{k}{E}(2xy) + \frac{d C_2(x)}{dx}\right)}_{\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}} = 0$

$\gamma_{xy} = \frac{d C_1(y)}{dy} + \frac{d C_2(x)}{dx} = 0 \implies \forall x,y \begin{cases} \frac{d C_1(y)}{dy} = +C \quad (4) \\ -\frac{d C_2(x)}{dx} = +C \quad (5) \end{cases}$ (cte)

x et y sont indepadant $\Rightarrow$

c.a.d : $F(y) + G(x) = 0$

$\Rightarrow \forall x,y \begin{cases} F(y) = cte \\ G(x) = -cte \end{cases}$

$$④ \rightarrow \frac{d\, C_1(y)}{dy} = C \rightarrow C_1(y) = Cy + C_3$$

$$⑤ \rightarrow \frac{d\, C_2(x)}{dx} = -C \rightarrow C_2(x) = -Cx + C_4$$

finalement :

$$\boxed{\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{k}{E}\left(xy^2 + \dfrac{\nu}{3}x^3\right) + Cy + C_3 \\ v(x,y) = -\dfrac{k}{E}\left(x^2y + \dfrac{\nu}{3}y^3\right) + Cx + C_4 \end{cases}}$$

——— o ———

Exercice 10 :

une barre sous l'effet de son poids propre → champs de deplacements suivants :

$$\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{P}{2E}(2ax - x^2 - \nu y^2) \\ v(x,y) = -\dfrac{\nu P}{E}(a-x)y \end{cases}$$

champs de Deformation :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{2E}(2a - 2x) = \frac{P}{E}(a-x)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu P}{E}(a-x)$$ on remarque que $\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x$

⇒ (la seule déformation selon "y" est due à l'action selon "x"

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{P}{2E}(-2\nu y) + \frac{\nu P}{E}y = 0$$

⇒ pas de deformation de cisaillement

tous ces resultats son logiques → la seule deformation induite par l'effet du poids propre est ε_x (selon l'action du poids) et ε_y par l'effet du cofficent de poisson et comme l'action est uniforme → pas de cisaillement.

champs de Contrainte

→ il suffit d'appliquer la loi de HOOKE

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases}$$

Suite exercice 10

dans notre cas :

$$\rightarrow \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\,\overbrace{(-\nu\,\varepsilon_x)}^{\varepsilon_y}\right) = \frac{E}{(1-\nu^2)}\,\varepsilon_x(1-\nu^2)$$

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x$$

$$\rightarrow \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(-\nu\,\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_x\right) = 0$$

$$\rightarrow \tau_{xy} = 0$$

résultats parfaitement ~~normaux~~ logiques → puisque finalement cet exemple représente un cas 1D (on aurait pu deviner tous ces résultats dès le départ)

b/ Calcul de la densité d'énergie

en général la densité d'énergie s'écrit dans le cas 3D

$$U_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right)$$

ou en terme de contraintes seulement (~~avec~~ en utilisant la loi de HOOKE)

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z\right) +$$

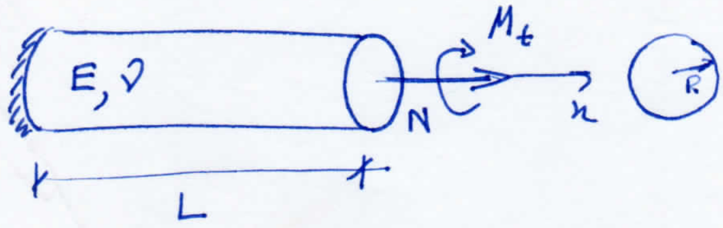
$$+ \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right)$$

dans notre cas : $\sigma_{ij} = 0$ sauf $\sigma_x \neq 0$

$$U_0 = \frac{1}{2E}\sigma_x^2 = \frac{1}{2E}E^2\varepsilon_x^2 = \frac{E}{2}\left(\frac{P^2}{E^2}(a-x)^2\right)$$

$$\boxed{U_0 = \frac{P^2(a-x)^2}{2E}}$$

Exercice 11 :



Energie totale emmagasinée dans cette poutre ?

→ d'abord il faut ~~calculer~~ établir le bilans des contraintes agissant sur cette structure

* l'effort de traction N $\xrightarrow[\text{naissance}]{\text{donne}}$ σ normale selon "x"

* l'effort de Torsion (Moment) $\xrightarrow[\text{naissance}]{\text{donne}}$ τ tangentielle

aussi * $\sigma = \dfrac{N}{S}$ S : section de la poutre $= \pi R^2$

$$\sigma = \frac{N}{\pi R^2}$$

* $\tau = \dfrac{M_t}{J} R$ J : moment d'inertie polaire =

La densité d'énergie se réduit dans ce cas à

$$U_0 = \frac{1}{2E}\sigma^2 + \frac{1}{2G}\tau^2$$

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\frac{N}{\pi R^2}\right)^2 + \frac{1}{2G}\frac{M_t^2 R^2}{J^2}$$

U_0 : densité d'énergie = énergie par unité de volume

U_t = énergie totale = $\displaystyle\int_V U_0 \, dV$

N et M_t étant constant sur le volume $\Rightarrow$

$$U_t = U_0 \cdot V_{poutre} = U_0 \, \pi R^2 L$$