Université Badji Mokhtar – Annaba
Faculté des sciences de l'ingénieur
Département de Génie Civil

T.D : ELASTICITE

M1 - Structure /Année 2016/2017

SERIE N°1

Thème : Analyse de Contraintes

Exercice 1 :

Pour quelles forces de volumes le champs de contraintes suivant décrit il un état d'équilibre ?:

$$\sigma_x = -2x^2 + 3y^2 - 5z \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = z + 4xy - 7$$

$$\sigma_y = -2y^2 \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -3x + y + 1$$

$$\sigma_z = 3x + y + 3z - 5 \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

1er partie : état bidimensionnel

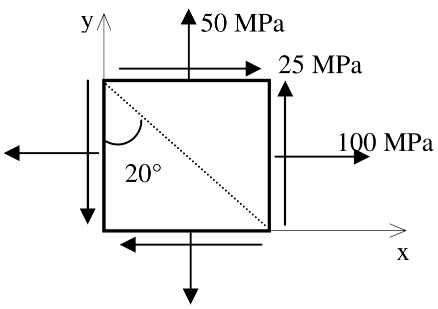
Exercice 2 :

L'état de contrainte en point est donné par l'élément infinitésimal suivant :

En utilisant la méthode analytique :

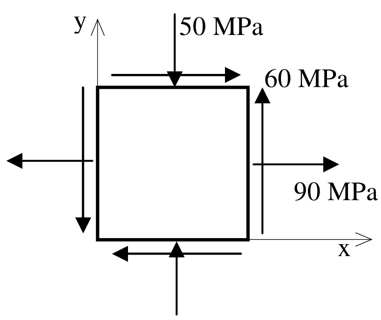
1. calculer les contraintes agissant sur le plan orienté à 20°(voir figure)
2. l'état de contrainte principale et son orientation
3. l'état de cisaillement maximum ainsi que sa contrainte associée et son orientation
4. dessiner les éléments orientés dans chaque cas

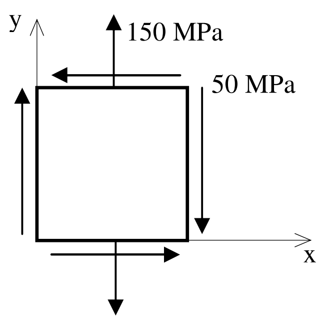
Vérifier tous vos résultat en utilisant la méthode graphique du cercle MOHR



Exercice 3:

L'état de contrainte en deux points d'une structure est représenté par les éléments infinitésimaux suivants :





Pour chaque cas :

1-Determiner en utilisant la méthode analytique :

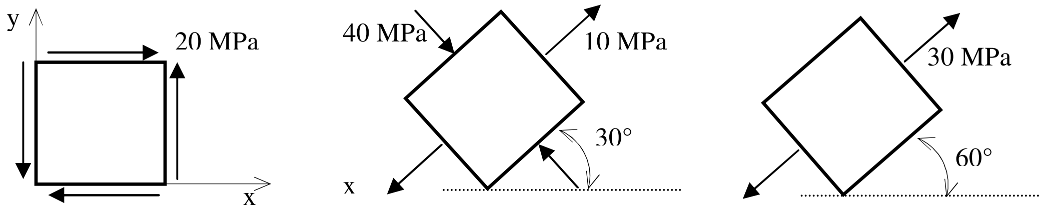
- les valeurs maximum et minimum des contraintes normales (contraintes principales) et leurs orientation. Dessiner l'élément orienté

- les valeurs maximum et minimum des contraintes de cisaillement ainsi que leurs contraintes normales associée et leurs orientations. Dessiner l'élément orienté.

2-Controler vos résultats en utilisant la méthode graphique du cercle de MOHR

<u>Exercice 4:</u>

Trois sollicitations séparées engendrent en un même point d'une structure les états de contraintes représentés sur différents axes par les éléments infinitésimaux suivants :



Lorsque les sollicitations agissent ensemble, déterminer avec la méthode de votre choix :

- les valeurs maximum et minimum des contraintes normales (contraintes principales) et leurs orientation. Dessiner l'élément orienté
- les valeurs maximum et minimum des contraintes de cisaillement ainsi que leurs contraintes normales associée et leurs orientation ; Dessiner l'élément orienté.

<u>Exercice 5:</u>

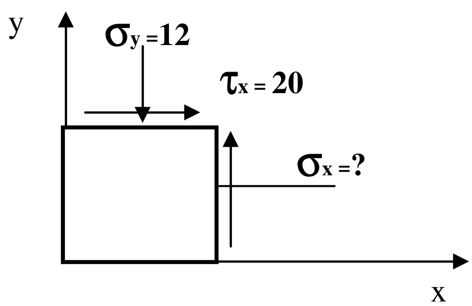
Soit les cas d'une plaque mince de forme carrée dans un premier cas et de forme losange dans un deuxième cas, soumise aux états de contraintes de cisaillement pur présentés sur la figure :

Pour chaque cas trouver :

- les contraintes agissant sur un plan orienté à 20° (voir figure) ainsi que les contraintes principales et leurs orientations

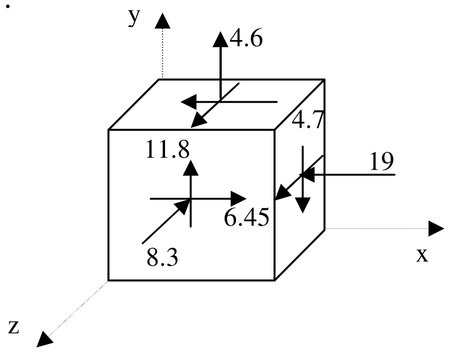
<u>Exercice n° 6 :</u>

Un état de contrainte calculé en un point d'une structure donne les résultats partiels suivants : Connaissant la contrainte maximum de compression $\sigma = -14$, déterminer la contrainte manquante σx, les contrainte principales et leur orientation et la contrainte tangentielle maximum et son orientation.



2[er] partie : Etat tridimensionnel

Exercice n° 7 :
Un état de contrainte 3D calculé en un point d'une structure donne les résultats présentés sur l'élément infinitésimal suivant :



Déterminer les contraintes principales et leurs orientations (cosinus directeurs) par rapport à (x,y,z)

Exercice n° 8 :
Le champs de contrainte dans un solide est décrit dans le système (x,y,z) par :

$$\sigma_x = x^2 + y \qquad \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_y = y^2 - 5 \qquad \tau_{xz} = 0$$

$$\sigma_z = -x + 6y + z \qquad \tau_{yz} = 0$$

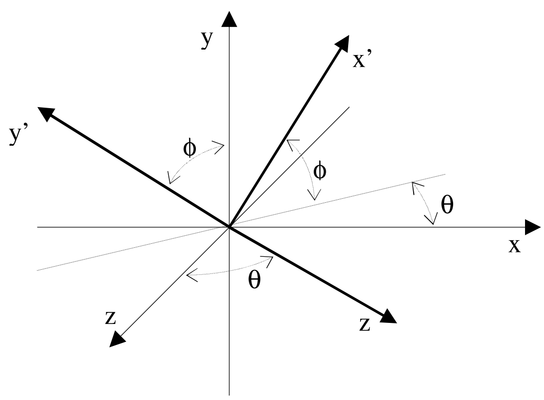
1-Déterminer au point de coordonnées (3,1,5) les contraintes par rapport au système (x',y',z') défini par rapport à (x,y,z) par les cosinus directeurs suivants :

$$\begin{cases} l_1 = 1 \\ m_1 = 0 \\ n_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_2 = 0 \\ m_2 = \dfrac{1}{2} \\ n_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} l_3 = 0 \\ m_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ n_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

2-Calculer pour chaque system les valeurs de $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$, $\mathbf{I_3}$ et conclure.

Exercice n° 9 :
Déterminer l'orientation (cosinus directeurs) d'un système d'axe (x',y',z') par rapport au système d'axe (x,y,z) défini tel que :

1. rotation du plan (xy) autour de (z) d'un angle positif ϕ
2. l'ensemble tourne ensuite autour de (y) d'un angle positif θ dans le plan (xz)



Exercice n° 10 :

Utiliser la méthode graphique du cercle de MOHR dans le cas 3D pour trouver σ et τ sur un plan oblique défini par θ= 35 ° , ϕ = 30° (la définition de θ et ϕ est celle donnée en cours) connaissant l'état principale :

σ_1 = 35 MPa σ_2 = -14 MPa σ_3 = -28 MPa

- contrôler ce résultat graphique en utilisant la méthode analytique.

Méthode de résolution de l'équation du 3eme Degrés :

$$\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0$$

Admet pour solutions

$$\begin{cases} \sigma_{p1} = 2S\left[\cos\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)\right] + \dfrac{1}{3}I_1 \\ \sigma_{p2} = 2S\left[\cos\left(\dfrac{\alpha}{3} + 120°\right)\right] + \dfrac{1}{3}I_1 \\ \sigma_{p3} = 2S\left[\cos\left(\dfrac{\alpha}{3} + 240°\right)\right] + \dfrac{1}{3}I_1 \end{cases}$$

Avec :

$$S = \sqrt{\frac{R}{3}} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{R} = \frac{1}{3}I_1^2 - I_2$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{Q}{2T}\right) \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{Q} = \frac{1}{3}I_1 I_2 - I_3 - \frac{2}{27}I_1^3 \quad \mathrm{T} = \sqrt{\frac{R^3}{27}}$$