Université Badji Mokhtar-Annaba
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département de Génie Civil

Master 1/ CM
2013/2014

Examen d'Elasticité

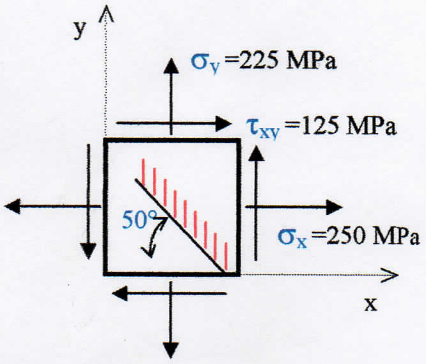
durée 1h30 **les documents ne sont pas autorisés** 27/01/2014

Exercice 1 (4 points)

En vous servant d'un état de contrainte d'un élément infinitésimal dans un système (x,y), trouver les équations donnants les contraintes sur une facette inclinée orientée de θ par rapport à l'axe (x).

Exercice 2 (10 points)

Soit en un point d'une structure l'état de contrainte présenté sur l'élément infinitésimal de la figure.



1) En utilisant la méthode graphique du cercle de MOHR et en vérifiant vos résultats avec la méthode analytique calculer :

a) les contraintes sur la facette inclinée telle que présentée sur la figure.

b) l'état de contrainte sur un plan orienté à 40 °

c) les contraintes principales et leur orientation θ_p

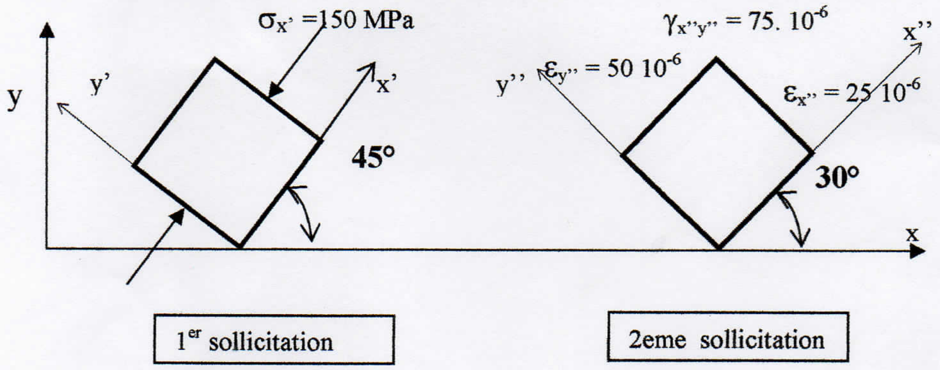
d) la contrainte de cisaillement maximum, la contrainte normale associée et leur orientation θ_c

2) dessiner pour tous ces résultats les éléments infinitésimaux orientés correspondants

---

Exercice 3 (6 points)

Deux sollicitations en un point d'une structure donnent, quand elles agissent séparément les états de contraintes et de déformations suivants sur les reperes (x',y') et (x'',y'')



On donne E = 210.10^3 MPa ν= 0.30

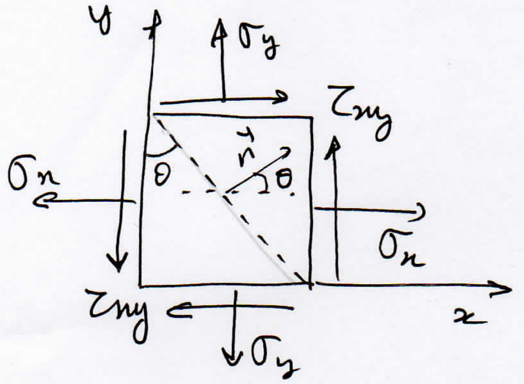
Lorsque les deux sollicitations agissent ensemble,

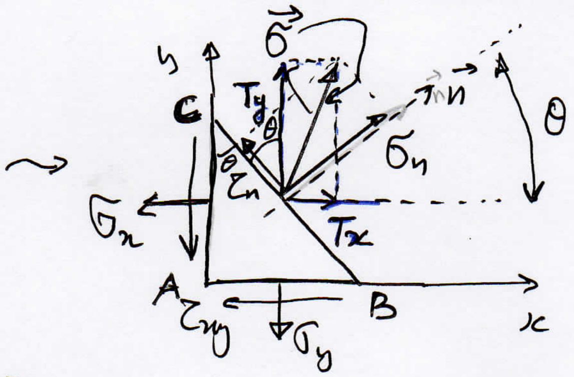
Calculer sur les axes (x,y) :

1- L'état de contraintes et l'état de déformations résultants
2- Les contraintes et déformations principales et leur orientation
3- Les contraintes et déformation tangentielles maximales et leur orientation

Exercice 1 :

soit un état de contrainte 2D $\xrightarrow{?}$ contraintes sur une facette $\vec{n}$ orientée à θ /xy





sur la facette inclinée $\rightarrow \vec{\sigma} \rightarrow$ qui a pour composantes :

sur $(x,y) \rightarrow \vec{\sigma} \begin{cases} T_x \\ T_y \end{cases}$ et selon $\vec{n}$ $\vec{\sigma} \begin{cases} \sigma_n \rightarrow \text{normale à } \vec{n} \\ \tau_n \rightarrow \text{tangentielle à } \vec{n} \end{cases}$

Le but étant de calculer σ_n, τ_n ?

* Trouvons T_x, T_y en fonction de $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$?

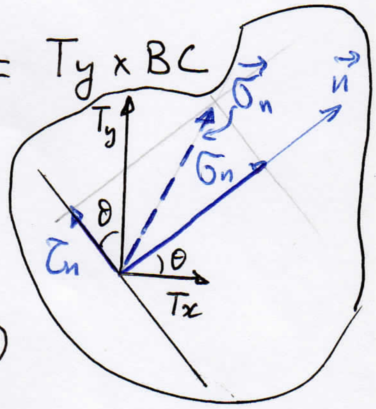
par $\sum F_{/x} = 0 \rightarrow \sigma_x \times (AC \times 1) + \tau_{xy} \times (AB \times 1) = T_x . BC$

sachant que $AC = BC\cos\theta$ et $AB = BC\sin\theta$

$\Rightarrow \rightarrow \sigma_x . \cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta = T_x$ (1)

de même $\sum F_{/y} = 0 \rightarrow \sigma_y . (AB \times 1) + \tau_{xy}(AC \times 1) = T_y \times BC$

$\sigma_y \sin\theta + \tau_{xy}\cos\theta = T_y$ (2)



* Trouvons σ_n et τ_n en fonction de T_x, T_y ?

par projection : $\begin{cases} \sigma_n = T_x\cos\theta + T_y\sin\theta \\ \tau_n = -T_x\sin\theta + T_y\cos\theta \end{cases}$ (3)

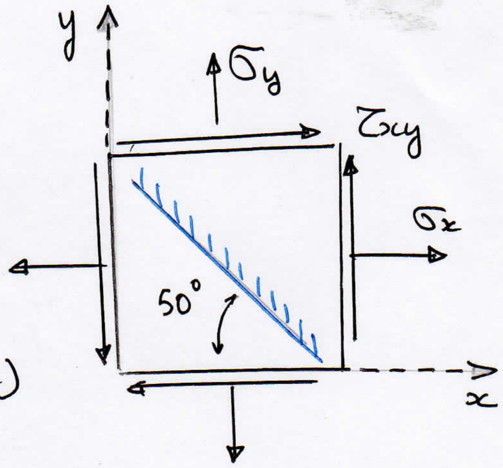
(1) et (2) $\Rightarrow$ (3) $\begin{cases} \sigma_n = (\sigma_x\cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta)\cos\theta + (\sigma_y\sin\theta + \tau_{xy}\cos\theta)\sin\theta \\ \tau_n = -(\sigma_x\cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta)\sin\theta + (\sigma_y\sin\theta + \tau_{xy}\cos\theta)\cos\theta \end{cases}$

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_n = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \\ \tau_n = -\sigma_x\cos\theta\sin\theta + \sigma_y\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{cases}}$$

Exercice 2

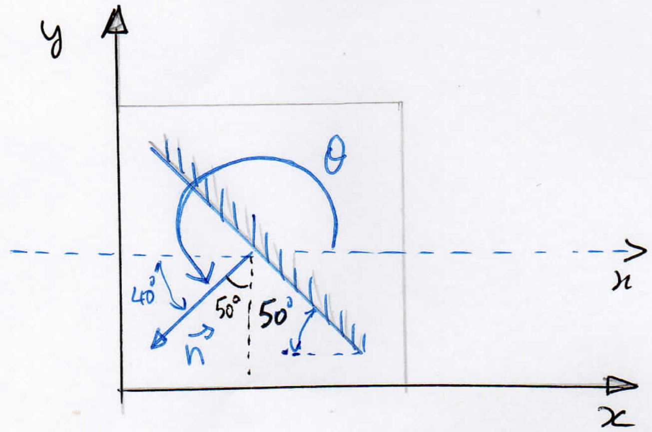
soit l'état de contrainte

$$\begin{cases} \sigma_x = 250 \text{ MPa} \\ \sigma_y = 225 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 125 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$



Calcul des contraintes sur la facette inclinée (voir figure) orientée a 50° / à l'axe (x)

L'angle d'orientation de cette facette est l'angle mesuré (positivement) de l'axe (x) ⟶ vers la normale à cette facette notée $\vec{n}$



d'après la figure :

$$\theta = 180° + 40° = 220°$$

<u>Méthode du Cercle de MOHR</u> : Le centre du cercle $C\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0\right) =$

$$C\left(\frac{250+225}{2}, 0\right) = (237{,}5 , 0) = (C_x , C_y)$$

le point $A(\sigma_x, -\tau_{xy}) = (250, -125) \longrightarrow$ facette (x)

le point $B(\sigma_y, +\tau_{xy}) = (225, 125) \longrightarrow$ facette (y)

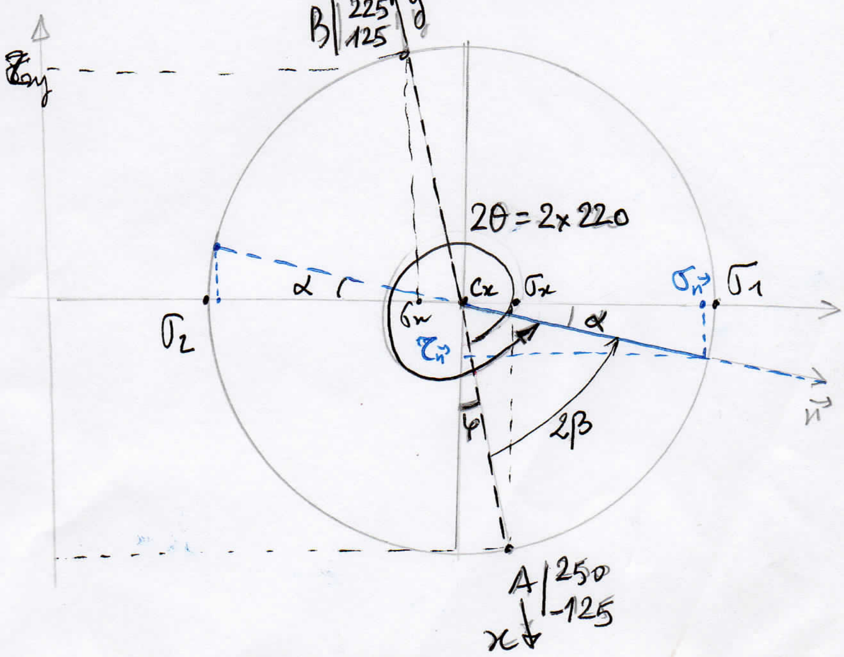
Trouvons les contraintes sur une facette à $\theta = 220°$: $\sigma_{\vec{n}}, \tau_{\vec{n}}$

sur le cercle $\longrightarrow 2\theta = 440°$

sur le cercle $\begin{cases} \sigma_{\vec{n}} = R\cos\alpha + C_x \\ \tau_{\vec{n}} = -R\sin\alpha \end{cases}$

R : Rayon du Cercle :

Trouvons α : ?



sur le graphique, de la facette x à la facette $n^{\rightarrow}$ il y a un angle :

$$2\beta = 2\theta - 360^\circ = 440 - 360 = 80 \rightarrow \beta = 40^\circ$$

$\Rightarrow$ ainsi on peut affirmer que la facette $n^{\rightarrow}$ se trouve selon un angle de $\beta = 40^\circ$ par rapport à (x) (équivalent $\theta = 220^\circ$)

ainsi $\alpha = 90^\circ - \varphi - 2\beta$ avec $\begin{cases} tg\,\varphi = \dfrac{\sigma_x - C_x}{\tau_{xy}} = 0{,}1 \\ \varphi = 5{,}710^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\alpha}} = 90 - 5{,}710 - 80 = \underline{\underline{4{,}29^\circ}}$

ainsi $\begin{cases} \sigma_{n^{\rightarrow}} = R\cos\alpha + C_x \\ \tau_{n^{\rightarrow}} = -R\sin\alpha \end{cases}$, $R = \sqrt{(\sigma_x - C_x)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(12{,}5)^2 + (125)^2}$

$\underline{R = 125{,}623}$

$\begin{cases} \sigma_{n^{\rightarrow}} = 362{,}77 \text{ MPa} \\ \tau_{n^{\rightarrow}} = -9{,}397 \text{ MPa} \end{cases}$ qui devient $\tau_{n^{\rightarrow}} = 9{,}397$ (on change le signe du à cause du cercle)

<u>Analytiquement</u> : $\begin{cases} \sigma_\theta = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \tau_\theta = -\dfrac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$

avec $\theta = 220^\circ$ (<u>ou simplement $\beta = 40^\circ$</u>) cela donne le m̂ résultat car Trigonométriquement $\underline{2\times 220^\circ \equiv 2\times 40^\circ}$

<u>A.N</u>

$$\begin{cases} \sigma_{n^{\rightarrow}} = \dfrac{250+225}{2} + \dfrac{250-225}{2}\cos 2\times 40 + 125\sin 2\times 40 \\ \tau_{n^{\rightarrow}} = -\dfrac{(250 - 225)}{2}\sin 2\times 40 + 125\cos 2\times 40 \end{cases}$$

$\begin{cases} \sigma_{n^{\rightarrow}} = 362{,}77 \text{ MPa} \\ \tau_{n^{\rightarrow}} = 9{,}396 \text{ MPa} \end{cases}$ résultats conforme à ceux du cercle de MOHR

Calcul de l'état de Contrainte à $\theta = 40°$

Le calcul précédent a permit d'avoir les contraintes sur une facette à $\theta = 220°$ qui est équivalent à $\theta = 40°$ ainsi il suffit de calculer la contrainte normale à $\theta' = \theta + 90°$

$$\begin{cases} \sigma_{40} = \sigma_{220} = \underline{362,77} \text{ MPa} & \text{(déja calculé)} \\ \tau_{40} = \tau_{220} = \underline{9,396} \text{ MPa} & (\text{—''—}) \\ \sigma_{40+90} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2(40+90) + \tau_{xy}\sin 2(40+90°) \end{cases}$$

$$\sigma_{40+90} = \underline{112,23 \text{ MPa}}$$

sur le cercle : $\sigma_{40+90} = -R\cos\alpha + C_x = 112,23$ MPa OK

m̂ résultat

* Contrainte principales

sur le cercle $\sigma_1 = C_x + R = 237,5 + 125,623 = 363,123$ MPa

$\sigma_2 = C_x - R = 237,5 - 125,623 = 112,27$ MPa

$$2\theta_p = 2\beta + \alpha = 80 + 4,29 = 84,29 \rightarrow \theta_p = 42,145°$$

analytiquement : $\sigma_{1,2} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 363,123 \text{MPa} \\ 112,27 \text{ MPa} \end{cases}$

$$tg\, 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} = \frac{2\times125}{25} = 10 \rightarrow \theta_p = 42,145$$

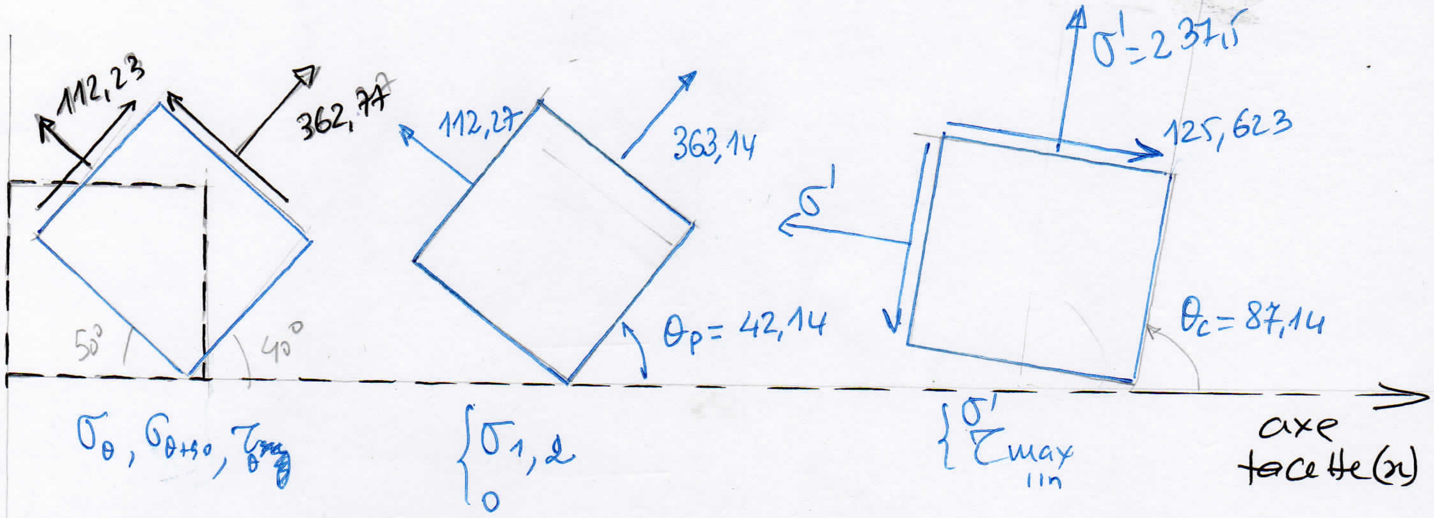
donc résultats conformes entre le cercle et les méthodes Analytiques

* Contraintes Tangentielles max

$\tau_{\substack{max\\min}} = \pm R$ sur le cercle , $\tau_{\substack{max\\min}} = \pm\left(\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right) = \pm R$

$$\theta_c = \theta_p + 45° = 87,14$$

$$\theta_c \Rightarrow \begin{cases} \sigma' = C_x = 237,5 \text{ MPa} \\ \tau_{max} = \pm R \end{cases}$$



Exercice 3

plusieurs chemins sont possibles pour Trouver l'etat de Contraintes et de déformations sous la superposition des des deux sollicitations. (condition : petit déplacements et deformations → principe de superposition - valable)

1°/ l'~~un~~ des méthode soit $[\sigma]^{I}_{x'y'}$ l'etat de contrainte sur $(x'y')$ sous sollicitation (I)

$[\varepsilon]^{II}_{x''y''}$ état de déformation sur $(x''y'')$ sous sollicitation (II)

etapes

ainsi

1. on transforme $[\sigma]^{I}_{x'y'} \xrightarrow{\text{vers}} [\sigma]^{I}_{xy}$ avec $\theta = -45°$

   — // — $[\varepsilon]^{II}_{x''y''} \longrightarrow [\varepsilon]^{II}_{xy}$ avec $\theta = -30$

2. on utilise la loi de HOOKE → $[\varepsilon]^{II}_{xy} \longrightarrow [\sigma]^{II}_{xy}$

3. finalement $[\sigma]_{xy} = [\sigma]^{I}_{xy} + [\sigma]^{II}$ état de contrainte sur xy

4. avec la loi de HOOKE

$$[\sigma]_{xy} \longrightarrow [\varepsilon]_{xy}$$

Rq: en jouant sur les Transformations et la loi de HOOKE (puisque le principe de superposition est valable) on peut aboutir aux mêmes résultat en passant par plusieurs chemins

A.N (pour le chemin choisi)

étape 1 : $[\sigma]^{I}_{x'y'} = \begin{bmatrix} -150 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa $\sigma_{x'} = -150$, $\sigma_{y'} = 0$, $\tau_{x'y'} = 0$

$\rightarrow [\sigma_{xy}] \rightarrow$ avec $\theta = -45$

$$\begin{cases} \sigma^{I}_{x} = \dfrac{\sigma_{x'}+\sigma_{y'}}{2} + \dfrac{\sigma_{x'}-\sigma_{y'}}{2}\cos(2\times 45)^{\circ} + \tau_{x'y'}\sin(2\times 45)^{\circ} \\ \sigma^{I}_{y} = \text{—"—} - \text{—"—} - \text{—"—} \\ \tau^{I}_{xy} = -\dfrac{(\sigma_{x'}-\sigma_{y'})}{2}\sin(2\times 45) + \tau_{x'y'}\cos(2\times 45)^{\circ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma^{I}_{x} = -75 \text{ MPa} \\ \sigma^{I}_{y} = -75 \text{ MPa} \\ \tau^{I}_{xy} = -75 \text{ MPa} \end{cases}$$

Etape 2 $[\varepsilon]^{II}_{x''y''} = \begin{bmatrix} 25\,10^{-6} & \frac{75}{2}10^{-6} \\ \frac{75}{2}10^{-6} & 50\,10^{-6} \end{bmatrix} \rightarrow$ $\varepsilon_{x''} = 25\,10^{-6}$, $\varepsilon_{y''} = 50\,10^{-6}$, $\gamma_{x''y''} = 75\,10^{-6}$

$[\varepsilon_{xy}] \xrightarrow[\theta=-30]{}$

$$\begin{cases} \varepsilon^{II}_{x} = \dfrac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \dfrac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos\times 2(-30) + \dfrac{\gamma_{x''y''}}{2}\sin 2(-30) \\ \varepsilon^{II}_{y} = \text{- -} - \text{- - - -} - \text{- - -} \\ \gamma^{II}_{xy} = -\left(\dfrac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)\sin 2(-30) + \dfrac{\gamma_{x''y''}}{2}\cos 2(-30) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon^{II}_{x} = -1{,}22\,10^{-6} \\ \varepsilon^{II}_{y} = 76{,}22\,10^{-6} \\ \gamma^{II}_{xy} = 7{,}93\,10^{-6} \end{cases}$$

Etape 3

Loi de HOOKE

$$\begin{cases} \varepsilon^{II}_{x} = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu\,\sigma_y}{E} \\ \varepsilon^{II}_{y} = \dfrac{-\nu\sigma_x}{E} + \dfrac{\sigma_y}{E} \\ \gamma^{II}_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sigma^{II}_{x} = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y) \\ \sigma^{II}_{y} = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x) \\ \tau^{II}_{xy} = G.\,\tau_{xy} \end{cases}$$

A.N

$$[\sigma]^{II}_{xy} - \begin{cases} \sigma_x^{II} = \dfrac{210\ 10^3}{1-0{,}3^2}\left(-1{,}22\ 10^{-6} + 0{,}3 \times 76{,}22\ 10^{-6}\right) \\ \sigma_y^{II} = \dfrac{210 . 10^3}{1-0{,}3^2}\left(76{,}22\ 10^{-6} + 0{,}3\left(-1{,}22\ 10^{-6}\right)\right) \\ \tau_{xy}^{II} = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \cdot 7{,}93\ 10^{-6} = \dfrac{210\ 10^3}{2(1+0{,}3)} \cdot 7{,}93\ 10^{-6} \end{cases}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\begin{cases} \sigma_x^{II} = 4{,}99 \text{ MPa} \\ \sigma_y^{II} = 17{,}50 \text{ MPa} \\ \tau_{xy}^{II} = 0{,}6405 \text{ MPa} \end{cases}$$

* les Deux sollicitations ensemble → Etat de contrainte Total

$$[\sigma]_{xy} = \begin{cases} \sigma_x = \sigma_x^{I} + \sigma_x^{II} = -75 + 4{,}99 = -70 \text{ MPa} \\ \sigma_y = \sigma_y^{I} + \sigma_y^{II} = -75 + 17{,}50 = -57{,}5 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}^{I} + \tau_{xy}^{II} = -75 + 0{,}6405 = -74{,}36 \text{ MPa} \end{cases}$$

Etat de déformation Total (→ loi de HOOKE)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu\sigma_y}{E} = \dfrac{-70}{210\,10^3} - \dfrac{0{,}3(-57{,}5)}{210\,10^3} = -25{,}12\ 10^{-5} \\ \varepsilon_y = \dfrac{-\nu\sigma_x}{E} + \dfrac{\sigma_y}{E} = \dfrac{-0{,}3(-70)}{210\,10^3} + \dfrac{-57{,}5}{210\,10^3} = -17{,}38\ 10^{-5} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} = \dfrac{\tau_{xy}(2(1+\nu))}{E} = -\dfrac{74{,}36}{210\,10^3}(2(1{,}3)) = -92{,}06\ 10^{-5} \end{cases}$$

* Contrainte principales :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} \sigma_2 = -137{,}84 \\ \sigma_1 = 10{,}34 \end{cases} \quad (\sigma_1 > \sigma_2$$

* deformation principales

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 2{,}49\ 10^{-4} \\ \varepsilon_2 = -6{,}74\ 10^{-4} \end{cases} \quad (\varepsilon_1 > \varepsilon_2)$$