

الحمد لله وحده نحمده ونشكره ونستعين به ونستغفره ونعوذ بالله  
من شرور أنفسنا  
ومن سيئات أعمالنا  
من يهده الله فلا مضل له ومن يضلل فلا هادي له  
أشهد ان لا إله الا الله وحده لا شريك له  
وأشهد أن محمدا عبده ورسوله  
صلى الله عليه وسلم وعلى آله وصحبه أجمعين  
ومن تبعهم بالإحسان الى يوم الدين  
ربنا لا علم لنا إلا ما علمتنا, إنك أنت العليم الخبير  
ربنا لا فهم لنا إلا ما أفهمتنا, إنك أنت الجواد الكريم  
ربي اشرح لي صدري ويسر لي أمري واحلل لي  
... عقدة لساني يفقهوا قولي

أما بعد.

فإن أصدق الحديث كتاب الله تعالى وخير الهدي, هدي سيدنا  
محمد صلى الله عليه وسلم تسليما  
وشر الأمور محدثاتها وكل محدثة بدعة وكل بدعة ضلالة وكل  
ضلالة في النار  
فאלهم أجرنا وقنا عذابها برحمتك يا ارحم الراحمين

# Série 1 : CONSTITUTION ET PARAMETRES D'IDENTIFICATION DES SOLS

## Exercice 1 :

Faire le schéma d'un modèle de constitution du sol .rappeler les paramètres du sol qui lui sont attachés avec la signification physique de chacun de ces paramètres. Quels sont parmi ces paramètres ceux qui peuvent être déterminés expérimentalement au laboratoire ou in-situ ? Comment sont obtenus les autres ? Comment peut-on justifier une telle redondance des paramètres.

## Exercice 2 :

On a trouvé qu'un échantillon avait une masse nette de 67,5 g et un volume de 39 cm<sup>3</sup>, l'échantillon n'a pas perdu de poids lors du séchage. Déterminer le volume des vides de ce sol. Trouver la masse volumique de ce sol en g/cm<sup>3</sup>, sachant que G<sub>s</sub> = 2,7

## Exercice 3 :

$$\gamma_w = 1 \text{ g/cm}^3$$

En utilisant le modèle de constitution du sol, déterminer le volume de vide d'un sol saturé dont la masse volumique est de 1.67 t/m<sup>3</sup>. Considérer la masse volumique des grains solides égale à 2,7t/m<sup>3</sup> (V = 1m<sup>3</sup>)

## Exercice 4 :

Un échantillon de sol testé au laboratoire a donné les résultats ci-après :

|                                  |         |
|----------------------------------|---------|
| Masse brute du sol               | 445,2 g |
| Masse brute du sol après étuvage | 415,2 g |
| Volume du sol                    | 221 ml  |
| Poids de la tare                 | 14,2 g  |

$$\gamma_s = \frac{\gamma}{1+w}$$

$$\gamma_d = \frac{\gamma_s}{1+e}$$

Déterminer :

- le poids volumique humide (total)
- le poids volumique sec
- la teneur en eau
- conclure quant à la qualité de sol

## Exercice 5 :

En s'aidant du modèle de constitution du sol, compléter le tableau suivant, par les paramètres manquants des 6 sols étudiés.  $\gamma_w = 10$

| Sol | $\gamma_h$<br>(kN/m <sup>3</sup> ) | $\gamma_d$<br>(kN/m <sup>3</sup> ) | e<br>(%) | n<br>(%) | S <sub>r</sub><br>(%) | w<br>(%) | $\gamma_s$<br>(kN/m <sup>3</sup> ) | V <sub>t</sub><br>(cm <sup>3</sup> ) | Masse<br>humide | Masse<br>sèche |
|-----|------------------------------------|------------------------------------|----------|----------|-----------------------|----------|------------------------------------|--------------------------------------|-----------------|----------------|
| 1   | 17,6                               | 17,6                               | 57       | 0,38     | 0                     | 0        | 27,62                              |                                      |                 |                |
| 2   |                                    |                                    | 0,2      | 48       |                       | 34       | 26,5                               |                                      |                 |                |
| 3   | 17,3                               |                                    | 73       |          |                       |          | 27,1                               |                                      |                 |                |
| 4   | 18,16                              | 14,04                              | 0,578    | 46       | 90                    | 20,46    | 26                                 |                                      |                 |                |
| 5   | 19,9                               | 15,64                              | 21,35    |          | 61,4                  | 16,98    | 26,8                               | 31                                   | 56,4            | 48,5           |
| 6   | 19,0                               | 14,5                               | 0,88     | 46,49    | 06,77                 | 31,03    | 27,1                               | 10                                   | 19,0            | 14,5           |

$$S = \frac{V_w}{V_v}$$

### Exercice 6 :

Rappeler le principe et la méthode de l'essai de mesure de la densité du sol par la méthode du remplacement par le sable. On donne ici les résultats bruts d'un tel essai :

|  |        |                   |                            |
|--|--------|-------------------|----------------------------|
| Masse du sol extrait du trou .....                         | 4 kg   | $\Rightarrow W_s$ |                            |
| Teneur en eau du sol .....                                 | 18 %   |                   |                            |
| Masse du sable sec pour remplir le trou .....              | 3.1 kg |                   | $\oplus \rightarrow \odot$ |
| Masse de sable pour remplir le cylindre de 4.2 litres..... | 5.8 kg | - on tire         |                            |

En considérant un poids volumique des grains de  $26.8 \text{ kN/m}^3$ , déterminer :

- Poids volumique humide du sol
- Poids volumique sec
- Degré de saturation

### Exercice 7 :

On utilise un pycnomètre de masse 620g pour déterminer la densité spécifique des grains d'un sol séché à l'étuve. Rappeler le principe et la procédure de cet essai. On trouve les résultats ci-dessous. Déduire de ces résultats le poids volumique spécifique des grains du sol testé.

|  |        |
|--|--------|
| Masse du sol testé .....                 | 980 g  |
| Masse du pycnomètre avec sol et eau..... | 2112 g |
| Masse du pycnomètre rempli d'eau .....   | 1495 g |

### Exercice 8 :

Rappeler la définition des densités maximales et les procédures de leur détermination expérimentale. Pour quels types de sols, sont normalement réalisés ces essais.

La masse volumique d'un sol est de  $1.9 \text{ t/m}^3$  et sa teneur en eau est de 10 %, la densité des grains solides a été trouvée égale à 2.66 et les indices des vides maximum à 0.62 et 0.44. Déduire de ces résultats la densité relative du sol testé.

### Exercice 9 :

A un emplacement où un dépôt sableux est saturé, on a mesuré la masse volumique du sol qui est de  $2.0989 \text{ t/m}^3$  et qui correspond à une densité relative du sol de 88 %. A un autre endroit du même dépôt mais où le sable n'est pas saturé, on a trouvé une masse volumique de  $1.711 \text{ t/m}^3$ , et une teneur en eau de 9 %, état qui correspond à une densité de 45 %. La masse volumique spécifique des grains de ce sol est de  $2.7 \text{ g/cm}^3$ .

Déterminer la teneur en eau de saturation de ce sol lorsqu'il est à une densité relative de 100%.

→ Serie 1 →

$$\gamma_s = 27 \text{ kN/m}^3$$

Ex 2:  $W = 67.5 \text{ g}$ ,  $V = 39 \text{ cm}^3$ ,  $\gamma_s = 27$  = densité des grains solide.

- Le volume de vide:  $V_v$

$$g/\text{cm}^3 = \text{tn}/\text{m}^3 = \text{kN}/\text{m}^3, w_w = 0.$$

- Le volume de vide ( $V_v$ ).

$$V_v = V - V_s \quad \underline{V_v} = V - \frac{W_s}{\gamma_s} = V - \frac{W_s}{\gamma_s \gamma_{\text{eau}}}$$

$$W_w = 0, \quad W_s = W - W_w = 67.5 \text{ g}$$

$$\Rightarrow V_v = 14 \text{ cm}^3$$

2) La masse volumique de sol:

$$m_v = 1.73 \text{ g/cm}^3$$

$$\gamma_d = \frac{W_s + W_w}{V} = \frac{W_s}{V} = \gamma_d$$

$W$ : water.  
 $W$ : poids.

Pour comparer les sols, on utilise  $\gamma$ .

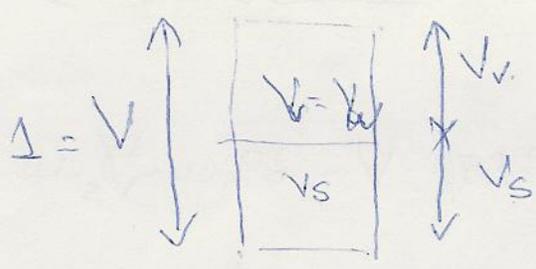
$$\gamma_{\text{saturation}} \Rightarrow V_v = \underline{W}$$

Ex3:

Sol saturé  
 $V_w = V_v$

$V_1 = 1 \text{ m}^3$

$V_v = V - V_s = 1 - V_s$   
 $V_w = \dots$   
 $W = W_s + W_w$



$W = \gamma_s V_s + \gamma_w V_w$

$W = \gamma_s V_s + \gamma_w (1 - V_s) \Rightarrow V_s = 0.62 \text{ m}^3$

$V_v = 0.38 \text{ m}^3$

Ex4:

1) de poids <sup>volu.</sup> humide. -  $\gamma_t = \gamma_R = \gamma$

masse totale = 445,2g

masse après étuve = 415,2g

~~masse~~ masse d'eau = 30g

Volume ( $V_T$ ) = 2 dl ml = 221  $\text{cm}^3$

$\gamma_T = \frac{W_T}{V_T} = \frac{445,2 - 14,2g}{221} = 1,95 \text{ g/cm}^3$

2) Le pois volumique sec

$$\gamma_d = \frac{W_s}{V} = 1,81 \text{ cm}^3$$

3) Le teneur en eau

$$w = \frac{W_w}{W_s} = 0,07$$

← Ex 5 →

Sol 5

$$\gamma_d = \frac{W_s}{V} = \frac{W - W_w}{V} = \frac{W}{V} - \frac{W_w}{V} = \gamma_h - \frac{W_w}{V}$$

et on a  $w = \frac{W_w}{W_s} \Rightarrow W_w = W_s w$

$$\gamma_d = \gamma_h - \frac{W_s w}{V} = \gamma_h - \gamma_d w$$

$$\gamma_d = \frac{\gamma_h}{1+w} = 17,6$$

le meilleur coefficient de compacité ou la densité

est  $\gamma_d$

$$\gamma_s = \frac{W_s}{V_s} = ?$$

$$\gamma_d = \frac{W_s}{V}$$

$$W_s = \frac{w w}{w}, \quad V_s = \frac{V_v}{e}$$

$$\gamma_s = \frac{w w e}{w V_v} = \frac{e}{w} \frac{w w}{V_v}$$



$$\gamma_s = \gamma_d \frac{e}{n} = \gamma_d \frac{e}{\frac{e}{1+e}} = \gamma_d (1+e)$$

$$\gamma_s = 27.28 \%$$

$$\gamma_s = \gamma_d (1+e)$$



$$S = \frac{V_w}{V_v}$$

$$e = \frac{n}{1-n}$$

$$\gamma_d = \frac{W_s}{V}$$

$$n = \frac{e}{1+e}$$

$$\gamma_h = \frac{W_w}{V}$$

$$S = \frac{V_w}{V_v} = \frac{V_w}{e V} = \frac{w w}{e \gamma_s \gamma_w} = \frac{w W_s}{e V_s \gamma_w}$$

$$S = \frac{w \gamma_s}{e \gamma_w} = \frac{w}{e} G \Rightarrow G w = S e$$

$$S = 0$$

$$e = \frac{\Delta L}{L - n}$$

Ona:  $n = \frac{V_v}{V}$ ,  $e = \frac{V_v}{V_s}$

$$e = \frac{\frac{V_v}{V}}{1 - \frac{V_v}{V}} \Rightarrow e = \frac{\frac{V_v}{V}}{\frac{V - V_v}{V}} \Rightarrow e = \frac{V_v}{V - V_v}$$

$$\frac{e}{V_s} = \frac{\frac{\frac{V_v}{V_s}}{\frac{V - V_v}{V_s}}}{V_s} =$$

$$e = \frac{V_v}{V_s} = \frac{V_v}{V - V_v} = \frac{\frac{V_v}{V}}{\frac{V - V_v}{V}} = \frac{\Delta L}{L - n}$$

$$e = \frac{n}{L - n}$$

$$n = \frac{e}{L + e}$$

$$n = \frac{\frac{V_v}{V}}{L + \frac{V_v}{V}} = \frac{\frac{V_v}{V}}{L + \frac{V_v}{V}} = \frac{e}{L + e}$$

$$n = \frac{e}{L + e}$$

GW - S.e.  $\rightarrow$  ①

$$S = \frac{V_w}{V_d} = \frac{W_w}{V_d \cdot \gamma_w} = \frac{W_s \cdot \omega}{\gamma_v \gamma_w} = \frac{\gamma_s V_s \omega}{V_d \cdot \gamma_w}$$

$$= \frac{\gamma_{sw}}{\gamma_{we}} = \frac{GW}{e} \Rightarrow GW - S.e.$$

$$\gamma_s = \frac{\gamma}{1 + \omega}, \quad \gamma_d = \frac{\gamma_s}{1 + e}$$

Démonstration au tableau:

$$s = \frac{w_w}{v_w}$$

5<sup>e</sup> colonne

$$\bullet w = \frac{v_w \delta_w}{\gamma_s v_s} \stackrel{w_w}{=} \frac{w_s}{\gamma_s v_s} \delta_w \delta_v = \delta \gamma_w \left( \frac{v_w}{v_s \delta_s} \right) = \delta \gamma_w \left( \frac{v - v_s}{v_s \delta_s} \right)$$

$$w = \delta \gamma_w \left( \frac{v}{v_s \frac{w_s}{v_s}} - \frac{1}{\delta_s} \right) = \delta \gamma_w \left( \frac{1}{\delta_d} - \frac{1}{\gamma_s} \right)$$

done  $w = \delta \gamma_w \left( \frac{1}{\delta_d} - \frac{1}{\gamma_s} \right)$

$$\bullet n = \frac{w_w}{v} = \frac{v - v_s}{v} = 1 - \frac{w_s}{\gamma_d} = 1 - \frac{v_d}{\gamma_s} = \gamma_d \left( \frac{1}{\delta_d} - \frac{1}{\gamma_s} \right)$$

$$\bullet e = \frac{w}{v_s} = \frac{v - v_s}{v_s} = \frac{v}{v_s} - 1 = \frac{w_s}{\gamma_d} = \frac{\gamma_s}{\gamma_d} - 1 =$$

$$e = \gamma_s \left( \frac{1}{\delta_d} - \frac{1}{\gamma_s} \right)$$

$$\bullet \gamma = \frac{w}{v} = \frac{w_s + w_w}{v} = \gamma_d + \frac{w_w}{v} = \gamma_d (1 + w)$$

$$\bullet s = \frac{w_w}{v_w} = \frac{w_w}{\gamma_w v_w} = \frac{w - w_s}{\gamma_w v_w} = \frac{w - w_s}{v_w (v - v_s)}$$

$$s = \frac{w - w_s}{\gamma_w \left( \frac{w_s}{\gamma_d} - \frac{w_s}{\gamma_s} \right)} = \frac{\frac{w}{\gamma_d} - 1}{\gamma_w \left( \frac{1}{\gamma_d} - \frac{1}{\gamma_s} \right)} = \frac{\gamma \left( \frac{1}{\gamma_d} - \frac{1}{\gamma} \right)}{\gamma_w \left( \frac{1}{\gamma_d} - \frac{1}{\gamma_s} \right)}$$

le 1<sup>er</sup> colonne!

$$g) n = \frac{V_v}{V} = \frac{V_v}{V_v + V_s} = \frac{1}{1 + \frac{V_s}{V_v}} = \frac{1}{1 + \frac{W_s / \gamma_s}{V_v / W}} = \frac{1}{1 + \frac{W_s}{\gamma_s V_w}}$$

$$n = \frac{1}{1 + \frac{S}{\gamma_s} \left( \frac{W_s}{V_w} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{S}{\gamma_s} \left( \frac{W_s}{W_w} \gamma_w \right)} = \frac{1}{1 + \frac{S \gamma_w}{W \gamma_s}}$$

done

$$n = \frac{1}{1 + \frac{S \gamma_w}{W \gamma_s}}$$

3)  $e = \frac{W}{V_s} = \frac{W \gamma_s}{S \gamma_w}$  . on utilise  $\left\{ \begin{array}{l} S = \frac{V_w}{V} , \gamma_w = \frac{W_w}{V_w} \\ W = \frac{W_w}{W_s} , \gamma_s = \frac{W_s}{V_s} \end{array} \right.$

$$e = \frac{V_w}{S} \cdot \frac{\gamma_s}{W_s} = \frac{\gamma_s}{S} \left( \frac{V_w}{W_s} \right) = \frac{\gamma_s}{S} \left( \frac{W_w}{\gamma_w} \frac{1}{W_s} \right)$$

$$e = \frac{W \gamma_s}{S \gamma_w}$$

$$4) \gamma = \frac{W}{V} = \frac{W_s + W_w}{V_s + V_w} = \frac{W_s \left(1 + \frac{W_w}{W_s}\right)}{V_s + V_w} = \frac{W_s (1+w)}{V_s + V_w}$$

$$\gamma = \frac{W_s (1+w)}{\frac{V_w}{S} + \frac{W_s}{\gamma_s}} = \frac{W_s (1+w)}{\frac{V_w \gamma_s + W_s S}{S \gamma_s}} = \frac{S \gamma_s W_s (1+w)}{V_w \gamma_s + W_s S}$$

$$\gamma = \frac{S \gamma_s (1+w)}{S + \frac{V_w \gamma_s}{W_s}} = \frac{S \gamma_s (1+w)}{S + \frac{W_w \gamma_s}{\gamma_w W_s}}$$

$$\gamma = \frac{S \gamma_w \gamma_s (1+w)}{\gamma_w S + W_w \gamma_s}$$

$$5) \gamma_d = \frac{W_s}{V} = \frac{W_s}{V_w + V_s} = \frac{W_s}{\frac{W_s}{\gamma_s} + \frac{W_w}{S}} = \frac{W_s}{\frac{W_s}{\gamma_s} + \frac{W_w}{S \gamma_w}}$$

$$\gamma_d = \frac{W_s}{\frac{S W_s \cdot \gamma_w + W_w \gamma_s}{S \gamma_s \gamma_w}} = \frac{S \gamma_s \gamma_w}{S \gamma_w + W \gamma_s}$$

$$\gamma_d = \frac{S \gamma_s \gamma_w}{S \gamma_w + W \gamma_s}$$

$$6) S = \frac{V_w}{V} = \frac{\frac{W_w}{\gamma_w}}{V - V_s} = \frac{W_w}{\gamma_w \left( \frac{W_s}{\gamma_s} - \frac{W_s}{\gamma_s} \right)}$$

$$S = \frac{W}{\gamma_w \left( \frac{1}{\gamma_d} - \frac{1}{\gamma_s} \right)}$$

→ 2<sup>ème</sup> colonne →

$$3) e = \frac{V_w}{V_s} = \frac{n}{1-n} \quad \text{On a: } n = \frac{W_w}{V}$$

alors:  $e = \frac{V_w}{V - V_w} = \frac{1}{\frac{V - V_w}{V_w}} = \frac{1}{\frac{1}{n} - 1} = \frac{n}{1-n}$

$$4) \gamma = \frac{W}{V} = (1-n)\gamma_s + nS\gamma_w \quad \text{On a:}$$

$$\gamma = \frac{W_s + W_w}{V} = \frac{V_s \gamma_s + V_w \gamma_w}{V}$$

$$n = \frac{V_w}{V}, \quad \gamma_s = \frac{W_s}{V_s}$$

$$S = \frac{V_w}{V_w}, \quad \gamma_w = \frac{W_w}{V_w}$$

$$\gamma = \gamma_s \left( \frac{V_s}{V} \right) + \gamma_w \left( \frac{V_w}{V} \right), \quad V_w = V \cdot S$$

$$\gamma = \gamma_s \left( \frac{V - V_w}{V} \right) + \gamma_w \left( \frac{V \cdot S}{V} \right)$$

$$\gamma = \gamma_s (1-n) + \gamma_w S n$$

[10]

$$5) \gamma_d = (1-n) \gamma_s = \frac{W_s}{V}$$

$$\gamma_d = \frac{V_s \gamma_s}{V} = \gamma_s \left( \frac{V - V_w}{V} \right)$$

$$\gamma_d = \gamma_s (1-n)$$

Règles utilisées:

$$W_s = V_s \gamma_s$$

$$V_s = V - V_w$$

$$n = \frac{V_w}{V}$$

$$6) S = \frac{V_w}{V} \stackrel{?}{=} \frac{(1-n) \gamma_s \omega}{n \gamma_w}$$

$$S = \frac{\overset{①+⑤}{W_w}}{n \gamma_w V} = \frac{1}{n \gamma_w} \left( \frac{W_w}{V} \right)$$

$$S = \frac{1}{n \gamma_w} \left( \frac{\overset{③}{\omega W_s}}{V} \right) = \frac{\omega}{n \gamma_w} \left( \frac{W_s}{V} \right) = \frac{\omega}{n \gamma_w} \left( \frac{\overset{④}{\gamma_s V_s}}{V} \right)$$

$$S = \frac{\gamma_s \omega}{n \gamma_w} \left( \frac{\overset{⑤}{V - V_w}}{V} \right) = \frac{\gamma_s \omega}{n \gamma_w} (1-n)$$

Règles utilisées:

$$\overset{②}{n} = \frac{V_w}{V}, \quad \overset{④}{\gamma_s} = \frac{W_s}{V_s}$$

$$\overset{③}{\omega} = \frac{W_w}{W_s}, \quad \overset{①}{\gamma_w} = \frac{W_w}{V_w}$$

$$V_s = V - V_w \quad \overset{⑤}{}$$

3<sup>ème</sup> colonne:

$$\omega = \frac{W_w}{W_s} = \frac{e S \gamma_w}{\gamma_s}$$

$$\omega = \frac{\overset{③}{\gamma_w V_w}}{\overset{④}{\gamma_s V_s}} = \frac{\gamma_w}{\gamma_s} \left( \frac{\overset{②}{S V_w}}{\overset{①}{V_s}} \right) = \frac{S \gamma_w}{\gamma_s} e$$

Règles utilisées:

$$e = \frac{W_w}{V_s} \quad \text{--- ①}$$

$$S = \frac{V_w}{V} \quad \text{--- ②}$$

$$\gamma_w = \frac{W_w}{V_w} \quad \text{--- ③}$$

$$\gamma_s = \frac{W_s}{V_s} \quad \text{--- ④}$$

$$2) n = \frac{V_v}{V} \stackrel{?}{=} \frac{e}{1+e}$$

$$n = \frac{V_v}{V_v + V_s} = \frac{1}{1 + \frac{V_s}{V_v}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e}} = \frac{e}{1+e}$$

$$e = \frac{V_v}{V_s}$$

$$V = V_v + V_s$$

$$4) \gamma = \frac{W}{V} \stackrel{?}{=} \frac{\gamma_s + e \gamma_w}{1+e}$$

$$\gamma = \frac{W_s + W_w}{V} = \frac{\gamma_s V_s + \gamma_w V_w}{V}$$

$$\gamma = \frac{\gamma_s \left(\frac{V}{e}\right) + \gamma_w V_w}{V} = \frac{\gamma_s V + e \gamma_w S}{V} \cdot e = \frac{V_v}{V_s} \quad \text{--- (4)}$$

$$S = \frac{V_v}{V_w} \quad \text{--- (5)}$$

$$\gamma = \frac{W(\gamma_s + e \gamma_w S)}{e V} = \frac{n}{e} (\gamma_s + e \gamma_w S) \cdot n = \frac{V_v}{V} \frac{e}{1+e}$$

$$\gamma = \frac{\gamma_s + e \gamma_w S}{1+e}$$

$$5) \gamma_d = \frac{W_s}{V} \stackrel{?}{=} \frac{\gamma_s}{1+e}$$

$$\gamma_d = \frac{\gamma_s V_s}{V} = \gamma_s \left(\frac{V - V_v}{V}\right) = \gamma_s (1 - n) \cdot e = \frac{V_v}{V_s} \quad \text{--- (2)}$$

$$n = \frac{V_v}{V} \quad \text{--- (3)}$$

$$\gamma_d = \gamma_s \left(1 - \frac{e}{1+e}\right)$$

$$V_s = V - V_v \quad \text{--- (4)}$$

$$n = \frac{e}{1+e} \quad \text{--- (5)}$$

$$\gamma_d = \frac{\gamma_s}{1+e}$$

⑥

$$S = \frac{V_{w0}}{V_v} = \frac{\omega \gamma_s}{e \gamma_w}$$

$$\omega = \frac{W_{w0}}{W_s} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\gamma_s = \frac{W_s}{V_s} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\gamma_w = \frac{W_{w0}}{V_{w0}} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$S = \frac{\frac{W_{w0}}{\gamma_w} \textcircled{4}}{V_v} = \frac{\omega \gamma_s}{\gamma_w V_v} = \frac{\omega}{\gamma_w} \left( \frac{\gamma_s V_s}{V_v} \right)$$

$$S = \frac{\gamma_s \omega}{\gamma_w e}$$