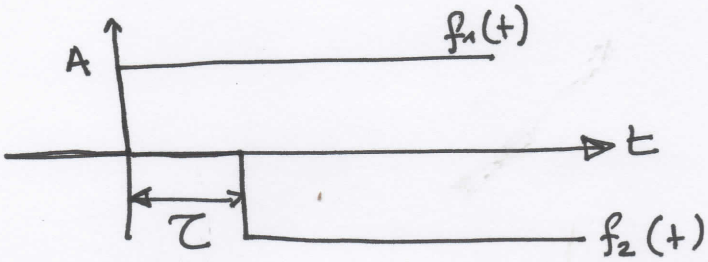
Série TD N° 04

* Exo 01 :

1)°



$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

$f_2(t) = -f_1(t-\tau)$. $\boxed{f(t) = A\mathcal{E}(t) - A\mathcal{E}(t-\tau)}$

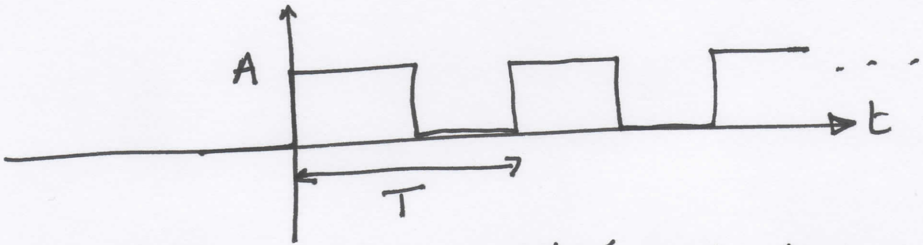
2)° Donc :

$$F(p) = TL\{f_1(t)\} + TL\{f_2(t)\}.$$

$$\begin{cases} F_1(p) = \dfrac{A}{p} \\ F_2(p) = -\dfrac{A}{p} e^{-\tau p} \end{cases}$$

Donc : $\boxed{F(p) = \dfrac{A}{p}\left[1 - e^{-\tau p}\right]}$

* Exo 02 :



Cette fonction se décompose en une infinité de fonction rectangulaire la 1ère commence à $t=0$, la 2ème après une période T, la 3ème après 2T --- etc.

Donc :

$$TL\{f(t)\} = TL\{f_1(t)\} + TL\{f_2(t)\} + TL\{f_3(t)\} + \cdots$$

et :

$$TL\{f_2(t)\} = e^{-Tp}\, TL\{f_1(t)\}.$$

$$TL\{f_3(t)\} = e^{-2Tp}\, TL\{f_1(t)\}.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Donc :

$$TL\{f(t)\} = TL\{f_1(t)\} + e^{-Tp}\, TL\{f_1(t)\} + e^{-2Tp}\, TL\{f_1(t)\} + \cdots + e^{-nTp}\, TL\{f_1(t)\} + \cdots$$

$$TL\{f(t)\} = \left(1 + e^{-pT} + e^{-2Tp} + \cdots + e^{-nTp} + \cdots\right) TL\{f_1(t)\}.$$

or : $\left(1 + e^{-Tp} + e^{-2Tp} + \cdots\right) = \dfrac{1}{1-e^{-Tp}}$ $\quad n \to +\infty$.

Alors :

$$TL\{f(t)\} = \frac{TL\{f_1(t)\}}{1-e^{-Tp}}$$

$$\boxed{F(p) = \frac{F_1(p)}{1-e^{-Tp}}}$$

* Exo 3 :

1)° e^{at} ; $t>0$

$$TL\{e^{at}\} = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-pt}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}\, dt \;;\quad t>0.$$

$$= -\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{p-a}.$$

2)° $(t^2 + t - e^{-3t})\,\varepsilon(t)$

$$TL\{(t^2+t-e^{-3t})\varepsilon(t)\} = TL\{t^2\varepsilon(t)\} + TL\{t\,\varepsilon(t)\} - TL\{e^{-3t}\varepsilon(t)\}.$$

on peut utiliser les Tables des TL ;

$$t^2\varepsilon(t) \xrightarrow{TL} \frac{2}{p^3}$$

$$t\,\varepsilon(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p^2}$$

$$e^{-3t}\varepsilon(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p+3}$$

Donc :

$$TL\{(t^2+t-e^{-3t})\varepsilon(t)\} = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p+3}.$$

3)° $t^2\cos(t)$;

D'après la propriété de ~~la~~ dérivée de la transformation :

$$TL\{(-t)^n f(t)\} = \frac{d^n F(p)}{dp^n}.$$

on pose : $f(t) = \cos(t)$

$F(p) = \frac{p}{p^2+1}$ d'après la table des TL ;

Donc :

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) = \frac{1}{p^2+1} - \frac{2p^2}{(p^2+1)^2}$$

$$\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) = \frac{-2p}{(p^2+1)^2} - \frac{4p}{(p^2+1)^2} + \frac{8p^3}{(p^2+1)^3}$$

Donc : $$\boxed{TL\{t^2\cos(t)\} = \frac{3p^3-6p}{(p^2+1)^3}}$$

A suivre

Exo 4