Exercice n° 01 (06 points)

Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme suit :

$$y' + 2y = g(x) \qquad (E)$$

1) Ecrire (E_h) l'équation différentielle homogène associée à (E). (01)

2) Trouver la solution générale y_h de cette équation homogène (E_h) associée à (E). (1,5)

Soit y_p la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui s'écrit sous la forme suivante :

$$y_p = 2x + 3 + (x-1)e^{5x} + 2\cos x - 3\sin x \quad (2)$$

3) Donner la solution générale y_G de l'équation différentielle (E). (01)

4) La solution générale y_G vérifiant (E) déduire le domaine de définition et l'expression exacte de la fonction $x \longmapsto g(x)$. (2,5)

Exercice n° 02 (06 points)

Soit les deux équations différentielles suivantes :

$$(x-1)y'' - y' = -y + 2x^3 \qquad (E_1)$$
$$4y' - xy^2 + x^3 = 7x^2 - x + 4 \qquad (E_2)$$

1) Donner pour chacune des équations différentielles (E_1) et (E_2) les caractéristiques relatives aux notions suivantes : ordre, 1ier membre, coefficient, 2ième membre, linéarité, équation associée, solution et ensemble de solutions. (1, 5)

2) Soit F une primitive de la fonction f sur l'intervalle non vide I de $\mathbb{R}$. Donner la relation qui doit liée F et f . Pourquoi dit-on que F est « <u>une</u> » primitive de f sur I ? que peut-on dire de la fonction $x \longmapsto F(x) + C, C \in \mathbb{R}$? (1,5)

3) Soit la fonction paire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, démontrer que : $\forall b \in \mathbb{R}, \int_{-b}^{+b} f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx$. (1,5)

4) Citer les différentes méthodes permettant de calculer une primitive ou une intégrale. (1,5)

Exercice n° 03 (06 points)

1) Trouver les primitives des fonctions suivantes avec leurs domaines de définition : (3x1)

$$f_1(x) = \frac{x-1}{(x^2-x-2)} \ (1,0);\ f_2(x) = \frac{\cos x}{2-\cos^2 x} \ (1,0);\ f_3(x) = e^x \cos x \ (1,0)$$

2) Calculer les intégrales suivantes. (3x1)

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{7}}^{\frac{\pi}{7}} e^{2x} \sin^{2k+1}(x) \ln(x^2+1) \cos^{4k}(x) \ (1, 0);$$

$$I_2 = \int_{-1}^{+1} e^{\tan x}\,dx - \int_{+1}^{-1} \tan^2(x)\, e^{\tan x}\,dx \ (1,0);\ I_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{1-\sin x}\,dx \ (1,0).$$

<u>Indications</u> :

- *2 points sont réservés à la présentation du travail.*
- *Conseil : Ne pas oublier les numéros des exercices et questions traitées. Traiter la question facile, avant celle qui l'est moins.*
- *L'usage des téléphones portables, tablettes, calculatrices et autres gadgets, n'est pas permis.*
- *L'étudiant est sensé avoir ses propres affaires : il ne lui est pas permis d'emprunter celles du camarade.*

Corrigé-01. (06 points)

Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme suit :

$$y' + 2y = g(x) \qquad (E)$$

1) Ecrire (E_h) l'équation différentielle homogène associée à (E).

L'équation différentielle homogène associée à (E) s'écrit : $y' + 2y = g(x)$ (01)

2) Trouver la solution générale y_h de cette équation homogène (E_h) associée à (E).

La solution générale y_h de (E_h) s'écrit : $y_h = Ke^{-2x}, K \in \mathbb{R}$. (1,5)

Soit y_p la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui s'écrit sous la forme suivante :

Corrigé-01. (06 points)

Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme suit :

$$y' + 2y = g(x) \qquad (E)$$

1) Ecrire (E_h) l'équation différentielle homogène associée à (E).

L'équation différentielle homogène associée à (E) s'écrit : $y' + 2y = g(x)$ (01)

2) Trouver la solution générale y_h de cette équation homogène (E_h) associée à (E).

La solution générale y_h de (E_h) s'écrit : $y_h = Ke^{-2x}, K \in \mathbb{R}$. (1,5)

Soit y_p la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui s'écrit sous la forme suivante :

$$y_p = 2x + 3 + (x-1)e^{5x} + 2\cos x - 3\sin x \quad (2)$$

3) Donner la solution générale y_G de l'équation différentielle (E).

La solution générale y_G de (E) s'écrit : $y_G = y_h + y_p$

Ce qui donne : $y_G = Ke^{-2x} + 2x + 3 + (x-1)e^{5x} + 2\cos x - 3\sin x$. (01)

4) La solution générale y_G vérifiant (E) déduire le domaine de définition et l'expression exacte de la fonction $x \longmapsto g(x)$. (2,5)

$$\begin{cases} 2y_G = 2Ke^{-2x} + 2(2x+3) + 2(x-1)e^{5x} + 4\cos x - 6\sin x & (a) \\ y'_G = -2Ke^{-2x} + 2 + 0 + (5x-5+1)e^{5x} - 3\cos x - 2\sin x & (b) \end{cases}$$

y_G, vérifiant (E) on a d'une part : $(a) + (b) = 2y_G + y'_G$ d'autre part : $(a) + (b) = g(x)$.

Ce qui donne : $g(x) = 4(x+2) + (7x-6)e^{5x} + \cos x - 8\sin x$. Et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. (01)

Corrigé-02. (06 points)

Soit les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} (x-1)y'' - y' &= -y + 2x^3 && (E_1) \\ 4y' - xy^2 + x^3 &= 7x^2 - x + 4 && (E_2) \end{aligned}$$

1) Donner pour chacune des équations différentielles (E_1) et (E_2) les caractéristiques relatives aux notions suivantes : ordre, 1^{er} membre, coefficient, $2^{ème}$ membre, linéarité, équation associée, solution et ensemble de solutions. → (1, 5)

2) Soit F une primitive de la fonction f sur l'intervalle non vide I de $\mathbb{R}$. Donner la relation qui doit liée F et f. Pourquoi dit-on que F est « <u>une</u> » primitive de f sur I ? que peut-on dire de la fonction $x \longmapsto F(x) + C, C \in \mathbb{R}$? (1,5)

- La relation liant F et f est la suivante : $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.
- On dit que F est « <u>une</u> » primitive de f sur I car elle n'est pas unique. En effet on a : $\forall C \in \mathbb{R}$; La fonction $t \longmapsto C + F(x); x \in I$ est primitive de f.
- On a bien sûr $\forall x \in I, (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 \Leftrightarrow (F(x) + C)' = f(x)$ i.e. f, sur I, possède une infinité de primitives, différenciées par C une constante réelle arbitraire.

3) Soit la fonction paire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, démontrer que : $\forall b \in \mathbb{R}, \int_{-b}^{+b} f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx$. (1,5)

En posant : $I_b = \int_{-b}^{+b} f(x)\,dx; I_b^+ = \int_0^{+b} f(x)\,dx; I_b^- = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx$

La relation de Chasles permet d'écrire $I_b = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+b} f(x)\,dx = I_b^- + I_b^+$.

Il suffit de montrer que $I_b^- = I_b^+$ en utilisant l'hypothèse de parité entre autre.

Considérons $x \longmapsto \varphi(x) = -x$. Comme $(\varphi'(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow \underbrace{(\varphi \searrow \text{sur } \mathbb{R})}_{(a)}$.

Si on considère $I_b^- = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx$ on a $(B)\begin{cases} -b \le x \le 0 & (b) \\ f(x) = f(-x) & f \text{ paire } (c) \end{cases}$

On déduit de (a) et (b) et (c) que $\begin{cases} \varphi(0) \le \varphi(x) \le \varphi(-b) & \Leftrightarrow & 0 \le \varphi(x) \le b \\ f(x) = f(-x) & \Leftrightarrow & f(x) = f(\varphi(x)) \end{cases}$

Si on pose $u = \varphi(x)$ on déduit $du = \varphi'(x)dx$ c'est à dire $du = -dx$ l'intégrale I_b^- devient :

$I_b^- = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx \Leftrightarrow I_b^- = -\int_{\varphi(-b)}^{\varphi(0)} f(\varphi(x))(-dx) \Leftrightarrow I_b^- = -\int_b^0 f(u)\,du \Leftrightarrow I_b^- = \int_0^b f(u)\,du$.

Conclusion :

Considérons $x \longmapsto \varphi(x) = -x$. Comme $(\varphi'(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow \underbrace{(\varphi \searrow \text{sur } \mathbb{R})}_{(a)}$.

Si on considère $I_b^- = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx$ on a $(B)\begin{cases} -b \le x \le 0 & (b) \\ f(x) = f(-x) \quad f \text{ paire} & (c) \end{cases}$

On déduit de (a) et (b) et (c) que $\begin{cases} \varphi(0) \le \varphi(x) \le \varphi(-b) & \Leftrightarrow \quad 0 \le \varphi(x) \le b \\ f(x) = f(-x) & \Leftrightarrow \quad f(x) = f(\varphi(x)) \end{cases}$

Si on pose $u = \varphi(x)$ on déduit $du = \varphi'(x)dx$ c'est à dire $du = -dx$ l'intégrale I_b^- devient :

$I_b^- = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx \Leftrightarrow I_b^- = -\int_{\varphi(-b)}^{\varphi(0)} f(\varphi(x))\,(-dx) \Leftrightarrow I_b^- = -\int_{b}^{0} f(u)\,du \Leftrightarrow I_b^- = \int_{0}^{b} f(u)\,du.$

Conclusion :

$$I_b = I_b^- + I_b^+ = \int_0^b f(u)\,du + I_b^+ = 2I_b^+, \forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-b}^{+b} f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx, \forall b \in \mathbb{R}$$

4) Citer les différentes méthodes permettant de calculer une primitive ou une intégrale. **(1,5)**

Les méthodes peuvent se résumées à :

Le tableau des primitives ; le tableau des dérivées ; l'intégration par parties ; le changement de variable ; la relation de Chasles ; les propriétés des intégrales ; les relations trigonométriques ; la règle de Bioche ; la décomposition de fraction rationnelle en éléments simples. Compléter un carré cas où $(\Delta < 0)$...

Corrigé-03. (06 points)

1) Trouver les primitives des fonctions suivantes avec leurs domaines de définition :

$f_1(x) = \frac{x-1}{(x^2-x-2)}; f_2(x) = \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}; f_3(x) = e^x \cos x$ **(3x1)**

Primitive de : $f_1(x) = \frac{x-1}{(x^2-x-2)}$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 3^2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = +2 \end{cases}$; D'où : $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ ce qui donne : $f_1(x) = \frac{x-1}{(x-2)(x\mp1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x\mp1)} = \frac{(A+B)x+(A-2B)}{(x-2)(x\mp1)}$

ce qui donne, par identification, un système de 2 équations à 2 inconnues A et B :

$\begin{cases} A+B = +1 \\ A-2B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} +A+B = 1 \\ -A+2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2/3 \\ A = 2B-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2/3 \\ A = 1/3 \end{cases}$

$$F_1(x) = \int f_1(x)\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-2)}dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{(x+1)}dx = \frac{1}{3}\ln|x-2| + \frac{2}{3}\ln|x+1| + C$$

Ce qui peut s'écrire : $\boxed{F_1(x) = \frac{1}{3}\ln[|x-2|\,(x+1)^2] + C; C \in \mathbb{R}; x \in \begin{cases}]-\infty;-1[\\ \vee\,]-1;2[\\ \vee\,]2;+\infty[\end{cases}}$

Primitive de : $f_2(x) = \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}$ (1)

On remarque : $f_2(x) = \frac{\cos x}{2-\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1+(1-\cos^2 x)} = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

Faisant le changement de variable : $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\,dx$ on arrive à :

$F_2(x) = \int f_2(x)\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{du}{1+u^2} \Leftrightarrow \boxed{F_2(x) = C + Arctg\,(\sin x), C \in \mathbb{R}}$ **(1)**

Primitive de : $f_3(x) = e^x \cos x$

$F_3(x) = \int f_3(x)\,dx = \int e^x \cos x\,dx$; en utilisant la méthode I.P.P. on pose :

$u' = e^x; v = \cos x \Longrightarrow u = e^x; v' = -\sin x$ ce qui donne :

$F_3(x) = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx$ (1)

On continue avec I.P.P pour calculer $\int e^x \sin x\,dx$ et on pose :

$w' = e^x; y = \sin x \Longrightarrow w = e^x; y' = \cos x$ ce qui donne :

$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx \Leftrightarrow \int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - F_3(x)$ (2)

$(1) \wedge (2) \Longrightarrow F_3(x) = e^x \cos x + e^x \sin x - F_3(x)$ (3)

Ce qui peut s'écrire : $\boxed{F_1(x) = \frac{1}{3}\ln[|x-2|\,(x+1)^2] + C; C \in \mathbb{R}; x \in \begin{cases} \vee\ ]-1;2[\\ \vee\ ]2;+\infty[\end{cases}}$

Primitive de : $f_2(x) = \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}$ (1)

On remarque : $f_2(x) = \frac{\cos x}{2-\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1+(1-\cos^2 x)} = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

Faisant le changement de variable : $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\, dx$ on arrive à :

$F_2(x) = \int f_2(x)\,dx = \int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{du}{1+u^2} \Leftrightarrow \boxed{F_2(x) = C + Arctg\,(\sin x), C \in \mathbb{R}}$ (1)

Primitive de : $f_3(x) = e^x \cos x$

$F_3(x) = \int f_3(x)\,dx = \int e^x \cos x\, dx$; en utilisant la méthode I.P.P, on pose :

$u' = e^x; v = \cos x \Longrightarrow u = e^x; v' = -\sin x$ ce qui donne :

$F_3(x) = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx$ (1)

On continue avec I.P.P pour calculer $\int e^x \sin x\, dx$ et on pose :

$w' = e^x; y = \sin x \Longrightarrow w = e^x; y' = \cos x$ ce qui donne :

$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx \Leftrightarrow \int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - F_3(x)$ (2)

(1) $\wedge$ (2) $\Longrightarrow F_3(x) = e^x \cos x + e^x \sin x - F_3(x)$ (3)

(3) $\Leftrightarrow 2F_3(x) = e^x \cos x + e^x \sin x \Leftrightarrow \boxed{F_3(x) = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C, C \in \mathbb{R}}$ (1)

2) Calculer les intégrales suivantes.

$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{7}}^{\frac{\pi}{7}} e^{x^2} \sin^{2k+1}(x)\ln(x^2+1)\cos^{4k}(x)\,dx; I_2 = \int_{-1}^{+1} e^{\tan x}\,dx - \int_{+1}^{-1} \tan^2(x)\,e^{\tan x}\,dx.$

$I_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{1-\sin x}\,dx.$ (3x1)

Calcul de l'intégrale : $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{7}}^{\frac{\pi}{7}} e^{x^2} \sin^{2k+1}(x)\ln(x^2+1)\cos^{4k}(x)\,dx \rightarrow$ **(1)**

Erreur : e^{x^2} au lieu de e^{2x} rendant la fonction à intégrer non-impaire ! Donc : $I_1 \neq 0$

Calcul de l'intégrale : $I_2 = \int_{-1}^{+1} e^{\tan x}\,dx - \int_{+1}^{-1} \tan^2(x)\,e^{\tan x}\,dx.$ 1 pt

On sait que $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ donc on peut écrire :

$I_2 = \int_{-1}^{+1} e^{\tan x}\,dx + \int_{-1}^{+1} \tan^2(x)\,e^{\tan x}\,dx = \int_{-1}^{+1}(1+\tan^2(x))e^{\tan x}\,dx$ or on sait que :

$(\tan x)' = 1 + \tan^2(x)$ ce qui donne pour $I_2 = \int_{-1}^{+1}(\tan x)'\,e^{\tan x} = [e^{\tan x}]_{-1}^{+1}$ la fonction tangente étant impaire on trouve : $\boxed{I_2 = e^{\tan 1} - e^{-\tan 1}}$

Calcul de l'intégrale : $I_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{1-\sin x}\,dx.$ 1 pt

<u>Méthode</u> 1 : Remarquons que :

$\frac{1}{1-\sin x} = \frac{1}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, d'où :

$I_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = [\tan x]_{-\pi/2}^{0} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(-\cos x)'}{(-\cos x)^2}\,dx$

En posant $u = -\cos x \Rightarrow du = \sin x\, dx$ et on a :

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(-\cos x)'}{(-\cos x)^2}\,dx = \int_{\cos(-\frac{\pi}{2})}^{\cos(0)}\frac{1}{u^2}\,du = \frac{1}{-2+1}[u^{-2+1}]_0^1 = [\cos x]_{-\pi/2}^{0}$.

d'où le résultat : $I_3 = [\tan x + \cos x]_{-\pi/2}^{0}$ mais la tangente n'est pas définie en $-\pi/2$

Il y a une indétermination à lever à l'aide des Développements Limités et des limites …

<u>Méthode</u> 2 : changement de variable classique.

On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Longrightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$ ce qui donne : $\frac{1}{1-\sin x}\,dx = \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{2}{(1-t)^2}\,dt$

$I_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{1-\sin x}\,dx = 2\int_{\tan -\frac{\pi}{4}}^{\tan 0}\frac{1}{(1-t)^2}\,dt = 2\left[\frac{1}{1-t}\right]_{-1}^{0} = 2\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1$, d'où $\boxed{I_3 = 1}$.

Exercice-01. (G2 / 12 pts = 2 x 6 pts ;conclusions : 2pts=2x0.5pt +1pt ; Présent : 1pt)

Résoudre sur $I \subseteq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, l'équation différentielle suivante :

$$y' + 2y = (2x+1) - 3e^x + 5\cos x \qquad (E)$$

Exercice-02. (G6 / 12 pts = 2 x 6 pts ;conclusions : 2pts=2x0.5pt +1pt ; Présent : 1pt)

Résoudre sur $I \subseteq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, l'équation différentielle suivante :

$$y' - 5y(x-3) - 3e^{2x} = a\sin x \qquad (E_0)$$

1) Ecrire l'équation différentielle (E_0) sous la forme canonique : $m_1(y) = m_2(x) \qquad (E)$
2) Ecrire l'équation différentielle homogène associée à (E).
3) Résoudre sur I l'équation différentielle (E).

Exercice-03. (G1 / 12 pts = 2 x 6 pts ;conclusions : 2pts=2x0.5pt +1pt ; Présent : 1pt)

Résoudre sur $I \subseteq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, l'équation différentielle suivante :

$$3y' + 2\cos x - e^x = x - y + 4\sin x \qquad (E_1)$$

1) Peut-on écrire l'équation différentielle (E_1) sous la forme : $f(y)y' = g(x)$. Si oui, comment se nomme, alors, une telle équation différentielle.
2) Ecrire l'équation différentielle homogène associée à (E_1).
3) Ecrire le second membre de l'équation différentielle (E_1).
4) Résoudre sur I l'équation différentielle (E_1).

Exercice-04. (G4 / 12 pts = 2 x 6 pts ;conclusions : 2pts=2x0.5pt +1pt ; Présent : 1pt)

Résoudre sur $I \subseteq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, l'équation différentielle suivante :

$$4y' - \sin x - e^x = xe^x - 2y + 4\cos x \qquad (E_2)$$

1) (E_2), est-ce une équation différentielle à coefficients variables ? Donner ses coefficients.
2) (E_2), est-ce une équation différentielle à variables séparées ? Si oui l'écrire sous la forme qui le prouve.
3) Ecrire l'équation différentielle homogène associée à (E_2), puis son second membre.
4) Résoudre sur I l'équation différentielle (E_2).

Indications :

Veuillez annoncer et distinguer les étapes de raisonnement, justifier les modifications à l'aide de procédés, raisonnements logiques, définitions, théorèmes, propriétés ou règles répertoriés, et conclure en répondant à la question posée. Ne pas oublier de mentionner le numéro de chaque exercice ou question traitée.

Exercice-01. (G2 / 20 pts = (14 pts +1 pt) +3 pts +2 pts)

Résoudre sur $I \subseteq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, l'équation différentielle suivante :

$$y' + 2y = (2x+1) - 3e^{x} + 5\cos x \qquad (E)$$

Corrigé-01. Exo-01/G2 ; Exo-03/G1 ; Exo-04/G4

Résoudre sur $I \subseteq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, l'équation différentielle suivante :

$$y' + 2y = \overbrace{(2x+1) - 3e^{x} + 5\cos x}^{g(x)} \qquad (E)$$

On prendra, comme forme générale du second membre de (E) la fonction de référence « g » définie par trois parties matérialisées par un polynôme, un polynôme fois une exponentielle, une combinaison linéaire en $\cos x$ et $\sin x$ de paramètres réels fixés comme suit :

$$g(x) = (D_1x + D_0) + (E_1x + E_0)e^{Lx} + T_1\cos x + T_0\sin x \qquad (E_g)$$

Pour l'exemple (E)

Les exercices 01, 02, 03, 04 traite de la famille d'équations différentielles ayant les propriétés :

- Equation différentielle linéaire : voir (m_1), à coefficients constants : voir (m_1), de second membre de la forme générale : voir (m_2) :

$$\overbrace{y' + ay}^{(m_1)} = \overbrace{(d_1x + d_0) + (e_1x + e_0)e^{lx} + t_1\cos x + t_0\sin x}^{(m_2)} \quad (E_g).$$

Le procédé de résolution de l'équation différentielle (E) se déroulera en trois étapes : 1.5 pt

a. Trouver la solution générale y_h de l'équation homogène (E_h) associée à (E). 0.5 pt
b. Trouver une solution particulière y_p de l'équation avec 2e membre (E). 0.5 pt
c. Conclure en donnant la solution générale $y_G = y_p + y_h$ du problème (E). 0.5 pt

Résolution selon les trois étapes a.) b.) et c.)

a. L'équation homogène (E_h) associée à (E) s'écrit :

$$y' + ay = 0 \quad (E_h)$$

La solution générale de (E_h) s'écrit sous la forme suivante :

$$\boxed{y = ke^{-ax}, k \in \mathbb{R}; x \in I;\ I \subseteq \mathbb{R} \quad (S_h)}$$

b. Une solution particulière y_p de l'équation différentielle (E_g).

Le principe de superposition impose, la forme du 2ième membre que y_p soit :

1. $y_p = y_{1p} + y_{2p} + y_{3p}$ (P) avec l'identification :
2. $\begin{cases} y_{1p}(x) &= d_1x + d_0 \\ y_{2p}(x) &= (e_1x + e_2)e^{lx} \\ y_{3p}(x) &= t_1\cos x + t_0\sin x \end{cases}$

D'où le système (S) d'inconnues $d_0, d_1, l, e_0, e_1, t_1, t_0$ à résoudre :

$$(S)\begin{cases} y_{1p}' + ay_{1p} = ad_1x + ad_0 + d_1 = D_1x + D_0 \\ y_{2p}' + ay_{2p} = (ae_1x + ae_0 + e_1)e^{lx} = (E_1x + E_0)e^{Lx} \\ y_{3p}' + ay_{3p} = (at_0 + t_1)\cos x + (at_0 - t_1)\sin x = T_1\cos x + T_0\sin x \end{cases}$$

Les systèmes (S_i) d'inconnues $d_0, d_1 / l, e_0, e_1 / t_1, t_0$ issues de (S) s'écrivent :

$s_1\begin{cases} ad_1 = D_1 \\ ad_0 + d_1 = D_0 \end{cases}$	$s_2\begin{cases} l = L \\ ae_1 = E_1 \\ ae_0 + e_1 = E_0 \end{cases}$	$s_3\begin{cases} at_1 + t_0 = T_1 \\ at_0 - t_1 = T_0 \end{cases}$

La solution est :

$s_1\begin{cases} d_1 = a^{-1}D_1 \\ d_0 = a^{-1}(D_0 - d_1) \end{cases}$	$s_2\begin{cases} l = L \\ e_1 = a^{-1}E_1 \\ e_0 = a^{-1}(E_0 - e_1) \end{cases}$	$s_3\begin{cases} t_0 = (1+a^2)^{-1}(aT_0 + T_1) \\ t_1 = at_0 - T_0 \end{cases}$

Les données individualisant chacun des quatre exercices proposés sont :

	(m_1)		$g(x)$ (E_g)							
Exercice	$y' + ay$		$D_1x + D_0$		$(E_1x + E_0)e^{Lx}$			$T_1\cos x + T_0\sin x$		(E_g)
Exo-ref		a	D_1	D_0	E_1	E_0	L	T_1	T_0	(E_g)

$s_1\begin{cases} ad_1 &= D_1 \\ ad_0 + d_1 &= D_0\end{cases}$	$s_2\begin{cases} ae_1 &= E_1 \\ ae_0 + e_1 &= E_0\end{cases}$	$s_3\begin{cases} at_1 + t_0 &= T_1 \\ at_0 - t_1 &= T_0\end{cases}$

La solution est :

$s_1\begin{cases} d_1 &= a^{-1}D_1 \\ d_0 &= a^{-1}(D_0 - d_1)\end{cases}$	$s_2\begin{cases} l &= L \\ e_1 &= a^{-1}E_1 \\ e_0 &= a^{-1}(E_0 - e_1)\end{cases}$	$s_3\begin{cases} t_0 &= (1+a^2)^{-1}(aT_0 + T_1) \\ t_1 &= at_0 - T_0\end{cases}$

Les données individualisant chacun des quatre exercices proposés sont :

	(m_1)		$g(x)$ (E_g)							
Exercice	$y' + ay$		$D_1x + D_0$		$(E_1x + E_0)e^{Lx}$			$T_1\cos x + T_0 \sin x$		(E_g)
Exo-ref		a	D_1	D_0	E_1	E_0	L	T_1	T_0	(E_g)
Exo-01		2	2	1	0	-3	1	5	0	(E)
Exo-02		-5	-1	3	0	-1	2	0	A	(E_0)
Exo-03		$1/3$	$1/3$	0	0	$1/3$	1	$-2/3$	$4/3$	(E_1)
Exo-04		$1/2$	0	0	$1/4$	$1/4$	1	1	$1/4$	(E_2)

Valeurs obtenues pour chaque exercice :

$s_1\begin{cases} d_1 &= a^{-1}D_1 \\ d_0 &= a^{-1}(D_0 - d_1)\end{cases}$	$s_2\begin{cases} l &= L \\ e_1 &= a^{-1}E_1 \\ e_0 &= a^{-1}(E_0 - e_1)\end{cases}$	$s_3\begin{cases} t_0 &= (1+a^2)^{-1}(aT_0 + T_1) \\ t_1 &= at_0 - T_0\end{cases}$

Pour l'exercice-01 :

Exo-ref		a	D_1	D_0	E_1	E_0	L	T_1	T_0	(E_g)
Exo-01		2	2	1	0	-3	1	5	0	(E)

$s_1\begin{cases} d_1 &= a^{-1}D_1 = 1 \\ d_0 &= 2^{-1}(1-1) = 0\end{cases}$	$s_2\begin{cases} l &= L \\ e_1 &= a^{-1}E_1 \\ e_0 &= a^{-1}(E_0 - e_1)\end{cases}$	$s_3\begin{cases} t_0 &= (1+a^2)^{-1}(aT_0 \\ t_1 &= at_0 - T_0\end{cases}$

$$y_p = \overbrace{b_{11}x + b_{10}}^{y_{1p}} + \overbrace{(c_{21}x + c_{20})e^{\delta_2 x}}^{y_{2p}} + \overbrace{d_{3c}\cos x + d_{3s}\sin x}^{y_{3p}}$$

$$y_p = 1x + 0 + (0x - 3/2)e^{1x} + 5/2\cos x + 5/4 \sin x$$

Exo-ref		a	d_{11}	d_{10}	d_{21}	d_{20}	δ	d_c	d_s	(E_g)
Exo-02		-5	-1	3	0	-1	2	0	a	(E_0)

$s_1\begin{cases} b_{11} &= -1/-5 \\ b_{10} &= (3 - 1/5)/-5\end{cases}$	$s_2\begin{cases} c_{21} &= 0/-5 = 0 \\ c_{20} &= (-1-0)/-5 \\ \delta_2 &= 1\end{cases}$	$s_3\begin{cases} d_{3s} &= (0+a)/-10 \\ d_{3c} &= (0-a)/2a\end{cases}$

$$y_p = \overbrace{b_{11}x + b_{10}}^{y_{1p}} + \overbrace{(c_{21}x + c_{20})e^{\delta_2 x}}^{y_{2p}} + \overbrace{d_{3c}\cos x + d_{3s}\sin x}^{y_{3p}}$$

$$y_p = (1/5)x + \left(-\tfrac{7}{5}\right) + \left(0x + \tfrac{1}{5}\right)e^{1x} - (a/2)\cos x - (a/10)\sin x$$

Les équations ou systèmes d'équations obtenus donne pour (E) :

$$\boxed{y_p(x) = x - e^x + \tfrac{9}{5}\cos x + \tfrac{7}{5}\sin x \ ; x \in I; I = \mathbb{R} \ \ (S_p)}$$

c. Une solution générale de l'équation différentielle (E) s'écrivant sous la forme : $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

On en déduit le résultat final : La solution de l'équation différentielle (E) s'écrit :

$$\boxed{y(x) = ke^{-2x} + x - e^x + \tfrac{9}{5}\cos x + \tfrac{7}{5}\sin x \ ; k, x \in I; I = \mathbb{R}}$$

Vérification :

$$y'(x) = -2ke^{-2x} + 1 \quad - e^x + \tfrac{7}{5}\cos x - \tfrac{9}{5}\sin x$$

$$2y(x) = +2ke^{-2x} + 2x \quad - 2e^x + \frac{18}{5}\cos x + \frac{14}{5}\sin x$$

$$y'(x) + 2y(x) = \quad 0 \quad + (2x+1) - 3e^x + \ 5\cos x \ + \sin x$$

Vérification :

$$\begin{array}{rcl} y'^{(x)} &=& -2ke^{-2x} + 1 \quad - e^{x} + \frac{7}{5}\cos x - \frac{9}{5}\sin x \\ 2y(x) &=& +2ke^{-2x} + 2x \quad - 2e^{x} + \frac{18}{5}\cos x + \frac{14}{5}\sin x \\ \hline y'^{(x)} + 2y(x) &=& 0 \quad + (2x+1) - 3e^{x} + 5\cos x \quad + \sin x \end{array}$$

L'équation (E) est donc vérifiée! (Procéder de la même manière pour (E_1) et (E_2)).

Exercice-02. (G6 / 20 pts = (14 pts +1 pt) +3 pts +2 pts)

Résoudre sur $I \subseteq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, l'équation différentielle suivante :

$$y' - 5y(x-3) - 3e^{2x} = a\sin x \qquad (E_0)$$

1) Ecrire l'équation différentielle (E_0) sous la forme canonique : $m_1(y) = m_2(x)$ (E)
2) Ecrire l'équation différentielle homogène associée à (E).
3) Résoudre sur I l'équation différentielle (E).

Corrigé-02.

Résoudre sur $I \subseteq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, l'équation différentielle suivante :

$$y' - 5y(x-3) - 3e^{2x} = a\sin x \qquad (E_0)$$

Remarquons qu'il s'agit d'une équation différentielle linéaire, d'ordre 1 à coefficients variables

1) Ecrire l'équation différentielle (E_0) sous la forme canonique : $m_1(y) = m_2(x)$ (E)

$$(E_0) \Leftrightarrow y' - 5(x-3)y = 3e^{2x} + a\sin x \;\; (E) \Leftrightarrow \begin{cases} m_1(y) &= y' - 5(x-3)y \\ m_2(x) &= 3e^{2x} + a\sin x \end{cases}$$

2) Ecrire l'équation différentielle homogène associée à (E).

$$(E_h) \Leftrightarrow y' - 5(x-3)y = 0$$

3) Résoudre sur I l'équation différentielle (E).

Le procédé de résolution d'une telle équation différentielle se déroulera en trois étapes :
   a. Trouver, sur I, la solution générale y_h de l'équation homogène (E_h) associée à (E).
   b. Trouver une solution particulière y_p de l'équation différentielle (E).
   c. Conclure en donnant la solution générale du problème (E)

   a. La solution générale y_h de l'équation homogène (E_h) s'écrit :

$$y' - 5(x-3)y = 0 \qquad (E_h)$$

La solution générale de (E_h) s'écrit sous la forme suivante :

En posant $a(x) = -5(x-3)$. Si A est la primitive de a on déduit que :

$$A(x) = \int a(x)dx + c_0 = -5\int (x-3)dx + c_0 \Rightarrow A(x) = -5\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right) + c_0$$

$$(E_h) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 5(x-3) \Leftrightarrow \ln y = -\int a(x)dx + c = -A(x) + c \text{ d'où :}$$

$$y = e^{-A(x)+c} \Leftrightarrow y = Ke^{-A(x)} \Leftrightarrow y = Ke^{-A(x)} \Leftrightarrow y = Ke^{5x(x-3)}; K = \pm e^{c}$$

$$\boxed{y = Ke^{\frac{5}{2}(x^2-6x)}, K \in \mathbb{R}; x \in I;\; I = \mathbb{R} \quad (S_h)}$$

Vérification :

$$y' = K\left(\frac{5}{2}(x^2-6x)\right)' e^{\frac{5}{2}(x^2-6x)} \Leftrightarrow y' = 5K(x-3)\, e^{\frac{5}{2}(x^2-6x)} \text{ d'où :}$$

$$\left.\begin{array}{r} y' = 5K(x-3)\, e^{\frac{5}{2}(x^2-6x)} \\ -5(x-3)y = -5K(x-3)e^{\frac{5}{2}(x^2-6x)} \end{array}\right\} \Rightarrow y' - 5(x-3)y = 0. \text{ Donc } (E_h) \text{ Vérifiée !}$$

   b. Une solution particulière y_p de l'équation différentielle (E).

Le principe de superposition impose, conformément au second membre que y_p soit composée $x \mapsto y_{1p}(x) = ce^{2x}$; $x \mapsto y_{2p}(x) = ce^{x}$; $x \mapsto y_{3p}(x) = \mu\cos x + \beta\sin x$, de sorte que $y_p = y_{1p} + y_{2p} + y_{3p}$ (P)

Ainsi on arrive au système d'inconnues a, b, c, μ et β suivant à résoudre :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} y_{1p}' + 2y_{1p} &= 2x+1 \\ y_{2p}' + 2y_{2p} &= -3e^{x} \end{cases}$$

$(E_h) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 5(x-3) \Leftrightarrow \ln y = -\int a(x)dx + c = -A(x) + c$ d'où :

$y = e^{-A(x)+c} \Leftrightarrow y = Ke^{-A(x)} \Leftrightarrow y = Ke^{-A(x)} \Leftrightarrow y = Ke^{5x(x-3)}; K = \pm e^c$

$\boxed{y = Ke^{\frac{5}{2}(x^2-6x)}, K \in \mathbb{R}; x \in I;\ I = \mathbb{R} \quad (S_h)}$

Vérification :

$y' = K(\frac{5}{2}(x^2-6x))'\ e^{\frac{5}{2}(x^2-6x)} \Leftrightarrow y' = 5K(x-3)\ e^{\frac{5}{2}(x^2-6x)}$ d'où :

$$\left.\begin{array}{r} y' = 5K(x-3)\ e^{\frac{5}{2}(x^2-6x)} \\ -5(x-3)y = -5K(x-3)e^{\frac{5}{2}(x^2-6x)} \end{array}\right\} \Rightarrow y' - 5(x-3)y = 0.$$ Donc (E_h) Vérifiée !

b. Une solution particulière y_p de l'équation différentielle (E).

Le principe de superposition impose, conformément au second membre que y_p soit composée $x \mapsto y_{1p}(x) = ce^{2x}$; $x \mapsto y_{2p}(x) = ce^x$; $x \mapsto y_{3p}(x) = \mu \cos x + \beta \sin x$, de sorte que $y_p = y_{1p} + y_{2p} + y_{3p}$ (P)

Ainsi on arrive au système d'inconnues a, b, c, μ et β suivant à résoudre :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} y_{1p}' + 2y_{1p} &= 2x+1 \\ y_{2p}' + 2y_{2p} &= -3e^x \\ y_{3p}' + 2y_{3p} &= 5\cos x \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} (ax+b)' + 2(ax+b) &= 2x+1 \\ (ce^x)' + 2(ce^x) &= -3e^x \\ (\mu\cos x + \beta \sin x)' + 2(\mu \cos x + \beta \sin x) &= 5\cos x \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} +2ax + 2b + a &= 2x+1 \quad (1) \\ 3ce^x &= -3e^x \quad (2) \\ (2\mu+\beta)\cos x + (2\beta - \mu)\sin x &= 5\cos x \quad (3) \end{cases}$$

La résolution est ;

(1) 2 polynômes sont égaux si les coefficients d'une même puissance sont égaux.
(2) Les coefficients de $x \mapsto e^x$ sont égaux.
(3) Les coefficients de $x \mapsto \sin x$ ainsi que $x \mapsto \sin x$ sont égaux.

Ce qui donne les équations ou systèmes d'équations suivants :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a &= 2 \\ 2b + a &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a = 1} \\ \boxed{b = 0} \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow 3c = -3 \Leftrightarrow \boxed{c = -1}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu + \beta &= 5 \\ -\mu + 2\beta &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\mu - 2\beta &= -10 \\ -\mu + 2\beta &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\mu = 9/5} \\ \boxed{\beta = 7/5} \end{cases}$$

Conclusion : La solution particulière (P) s'écrit donc :

$$\boxed{y_p(x) = x - e^x + \frac{9}{5}\cos x + \frac{7}{5}\sin x\ ; x \in I; I = \mathbb{R} \quad (S_p)}$$

c. Une solution générale de l'équation différentielle (E) s'écrivant sous la forme :
$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

On en déduit le résultat final comme suit :

Conclusion :

La solution générale de l'équation différentielle (E) s'écrit :

$$\boxed{y(x) = ke^{-2x} + x - e^x + \frac{9}{5}\cos x + \frac{7}{5}\sin x\ ; k, x \in I; I = \mathbb{R}}$$

Vérification :

$$\begin{array}{rlllll} y'^{(x)} = & -2ke^{-2x} + 1 & - e^x + & \frac{7}{5}\cos x & - \frac{9}{5}\sin x \\ 2y(x) = & +2ke^{-2x} + 2x & - 2e^x + & \frac{18}{5}\cos x & + \frac{14}{5}\sin x \\ \hline y'^{(x)} + 2y(x) = & 0 \quad + (2x+1) & - 3e^x + & 5\cos x & + \sin x \end{array}$$

L'équation différentielle(E) est donc bien vérifiée !

Indications :

Veuillez annoncer et distinguer les étapes de raisonnement, justifier les modifications à l'aide de procédés, raisonnements logiques, définitions, théorèmes, propriétés ou règles répertoriés, et conclure en répondant à la question posée. Ne pas oublier de mentionner le numéro de chaque exercice ou question traitée.

Corrigé-01. (15 pts dont 1 pt/présent et 5 pts dont 2 p/ présence, 3p/ participation)

1) Qu'appelle-t-on intégrale indéfinie. Qu'appelle-t-on primitive d'une fonction f définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}; I \neq \emptyset$?

Une intégrale indéfinie est une fonction connue à une constante près.
Une primitive d'une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est une intégrale de f notée $F: I \to \mathbb{R}$ qui vérifie :
$F'(x) = f(x); \forall x \in I$.

Donner une condition sur f qui garantit l'existence de la primitive de f sur I.

Si $f: I \to \mathbb{R}$ continue, $F: I \to \mathbb{R}$ primitive, existe et $(C + F)$ est aussi primitive de $f, \forall C \in \mathbb{R}$.

2) Calculer les primitives des fonctions suivantes.

$f_1(x) = \ln x ; f_2(x) = \frac{7(x^2-1)}{(3-3x)} e^{x(1-x)}; f_3(x) = 1 + tg\, x; f_4(x) = \frac{\sin x + x \cos x}{x^2 \sin^2(x)}$.

- Calcul de $F_1(x) = \int \ln x \, dx$:

  Intégration par parties, avec le changement de variable : $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ v' = 1/x \end{cases}$

  On a : $\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx \Rightarrow \int \ln x \, dx = x\ln x - \int x.\frac{1}{x} dx = x\ln x - x + C$

  Conclusion :

  $F_1(x) = x(-1 + \ln x) + C, C \in \mathbb{R}$.

- Calcul de $F_2(x) = -\frac{7}{3}\int \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} e^{-x^2+x} \, dx$:

  Ce qui donne : $F_2(x) = -\frac{7}{3}\int (x+1)e^{-x^2+x} \, dx$

  Sachant qu'on peut écrire : $x + 1 = -\frac{1}{2}[(-2x+1) - 3]$ l'intégrale $F_2(x)$ devient :

  $F_2(x) = \frac{7}{6}\int [(-2x+1) - 3]e^{-x^2+x} \, dx$, ce qui montre que :

  $\frac{6}{7}F_2(x) = \int (-2x+1)e^{-x^2+x} \, dx - 3\int e^{-x^2+x} \, dx$.

  En posant $u = -x^2 + x$ on trouve $du = (-2x+1)dx$ et par suite a :
  $\int (-2x+1)e^{-x^2+x} \, dx = \int e^u du = e^{-x^2+x}$.
  La fonction $f_c(x) = e^{-x^2+x}$ est une fonction composée des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 :

  $x \mapsto f_1(x) = x \qquad x \mapsto f_2(x) = x^2$

  $x \mapsto f_3(x) = x - x^2 \qquad x \mapsto f_4(x) = e^x$

  $x \longmapsto f_c(x) = f_4(f_1(x) - f_2(x))$, fonction composée donc difficile à intégrer d'où :
  Conclusion :
  On a le résultat partiel : $F_2(x) = \frac{7}{6}e^{-x^2+x} - \frac{7}{2}\int e^{-x^2+x} \, dx + C, C \in \mathbb{R}$.

- Calcul de : $F_3(x) = \int (1 + tg\, x) \, dx$:

  On peut écrire $F_3(x) = \int 1 \, dx + \int tg\, x \, dx = x + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. En posant $u = \cos x$, on a :
  $du = -\sin x \, dx$ d'où : $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin x \, dx) = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u|$
  Conclusion : $F_3(x) = x - \ln|\cos x| + C, C \in \mathbb{R}; x \in \left](2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[, k \in \mathbb{Z}$.

- Calcul de : $F_4(x) = \int \frac{\sin x + x \cos x}{x^2 \sin^2(x)} \, dx$

  Si $u = x \sin x$ alors on a
  $du = \frac{du}{dx} dx = (x' \sin(x) + x\sin'(x))dx = (\sin x + x \cos x)dx$ d'où à l'aide de ce changement de variable $F_4(x) = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C, C \in \mathbb{R}$.

Conclusion : $F_4(x) = -\frac{1}{x \sin(x)} + C; C \in \mathbb{R}$.

3) Soit la fonction impaire $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit l'intégrale définie : $I_a = \int_{-a}^{+a} f(x) \, dx$ où $a \in \mathbb{R}$.
En utilisant le théorème de changement de variable, démontrer que : $I_a = 0; \forall a \in \mathbb{R}$.

Remarquons que I_a peut s'écrire $I_a = \int_{-a}^{0} f(x) \, dx + \int_{0}^{+a} f(x) \, dx$. En posant :
$I_a^- = \int_{-a}^{0} f(x) \, dx$, et $I_a^+ = \int_{0}^{a} f(x) \, dx$, on a $I_a = I_a^- + I_a^+$.
Calculons I_a^- en fonction de I_a^+ :
On a : (f est impaire)$\Leftrightarrow$ ($\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x)$) donc on peut écrire :
$I_a^- = \int_{-a}^{0} f(-x)(-dx)$ (E1) .

On peut écrire $F_3(x) = \int 1\,dx + \int tg\,x\,dx = x + \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$. En posant $u = \cos x$, on a :
$du = -\sin x\,dx$ d'où : $\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin x\,dx) = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u|$
Conclusion : $F_3(x) = x - \ln|\cos x| + C, C \in \mathbb{R}; x \in \left](2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[, k \in \mathbb{Z}$

- **Calcul de : $F_4(x) = \int \frac{\sin x + x\cos x}{x^2 \sin^2(x)}\,dx$**

  Si $u = x\sin x$ alors on a
  $du = \frac{du}{dx}dx = (x' \sin(x) + x\sin'(x))dx = (\sin x + x\cos x)dx$ d'où à l'aide de ce changement de variable $F_4(x) = \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + C, C \in \mathbb{R}$.

Conclusion : $F_4(x) = -\frac{1}{x\sin(x)} + C;\ C \in \mathbb{R}$.

3) Soit la fonction impaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit l'intégrale définie : $I_a = \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx$ où $a \in \mathbb{R}$. En utilisant le <u>théorème de changement de variable</u>, démontrer que : $I_a = 0; \forall a \in \mathbb{R}$.

Remarquons que I_a peut s'écrire $I_a = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+a} f(x)\,dx$. En posant :
$I_a^- = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx$, et $I_a^+ = \int_0^a f(x)\,dx$, on a $I_a = I_a^- + I_a^+$.
Calculons I_a^- en fonction de I_a^+ :
On a : (f est impaire)$\Leftrightarrow$ ($\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x)$) donc on peut écrire :
$I_a^- = \int_{-a}^{0} f(-x)\,(-dx)$ $(E1)$.
En faisant, le changement de variable suivant : $(u = \varphi(x) = -x)$,
la dérivée de φ s'écrit : $\varphi'(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$.
Preuve que la fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et par suite on déduit pour (E_1) que :
$$\left.\begin{matrix} -a \le x \le 0 \\ \varphi \searrow \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi(0) \le \varphi(x) \le \varphi(-a) \Leftrightarrow 0 \le u \le a$$
En utilisant le théorème de changement de variable, l'égalité $(E1)$ devient :
$I_a^- = \int_{\varphi(-a)}^{\varphi(0)} f(\varphi(x))\,d\varphi = \int_a^0 f(u)\,du = -\int_0^a f(u)\,du = -I_a^+$, ce qui montre que :
$I_a = -I_a^+ + I_a^+ = 0$.

Conclusion : $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0; \forall a \in \mathbb{R}$.

4) Calculer les intégrales suivantes.
$I_1 = \int_{-11}^{10} \sin^3 x \cos x\,dx$; $I_2 = \int_{-2^2}^{+2^2} \sin^5 x \cos^8 x\,dx$; $I_3 = \int_0^1 \frac{2e^{2(x+1)(x-1)}}{3e^{-2}e^{2x^2}}dx$.

- **Calcul de $I_1 = \int_{-11}^{10} \sin^3 x \cos x\,dx$.**

  Méthode par changement de variable. Soit $u = \sin(x) \Rightarrow du = \cos x\,dx$ et I_1 devient :
  $I_1 = \int_{\sin(-11)}^{\sin(10)} u^3\,du = \frac{1}{4}[u^4]_{u=\sin(-11)}^{u=\sin(+10)} = \frac{1}{4}[\sin^4(10) + \sin^4(11)]$.

  Conclusion $I_1 = \frac{1}{4}[\sin^4(10) + \sin^4(11)]$.

- **Calcul de $I_2 = \int_{-2^2}^{+2^2} \sin^5 x \cos^8 x\,dx$.**

  Le résultat en 3) avec $a = 2^2 \wedge f(x) = \sin^5 x \cos^8 x$, donne de la même manière :
  $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = (-1)^5 \sin^5 x \cos^8(-x) \Leftrightarrow f(x) = -f(-x) \Leftrightarrow f$ impaire sur $\mathbb{R}$.

  Par suite on obtient le même résultat $I_2 = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

  Conclusion : $I_2 = \int_{-2^2}^{+2^2} \sin^5 x \cos^8 x\,dx = 0$.

- **Calcul de $I_3 = \int_0^1 \frac{2e^{2(x+1)(x-1)}}{3e^{-2}e^{2x^2}}dx$.**

  Ici, il s'agit d'un simple calcul sur l'exponentielle, qui donne :
  $I_3 = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{e^{2(x^2-1)}}{e^{-2}e^{2x^2}}dx = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{e^{2(x^2-1)}}{e^{2(x^2-1)}}dx = \frac{2}{3}\int_0^1 1dx = \frac{2}{3}[x]_0^1 = \frac{2}{3}$.
  Conclusion : $I_3 = \frac{2}{3}$.

<u>Indications</u> :
Veuillez <u>annoncer</u> et <u>distinguer les étapes</u> de raisonnement, <u>justifier les modifications</u> à l'aide de procédés, raisonnements logiques, définitions, théorèmes, propriétés ou règles répertoriés, et <u>conclure en répondant à la question posée</u>. Ne pas oublier de <u>mentionner le numéro</u> de chaque <u>exercice</u> ou <u>question</u> traitée.