Chapitre 1 : Rappel sur les processus aléatoires

I. Rappel sur les processus aléatoires :

_Notions de variable aléatoire :

déterministe → expression analytique

$$x(t) = f(t).$$

1) Fonction de répartition :

V.a notée X

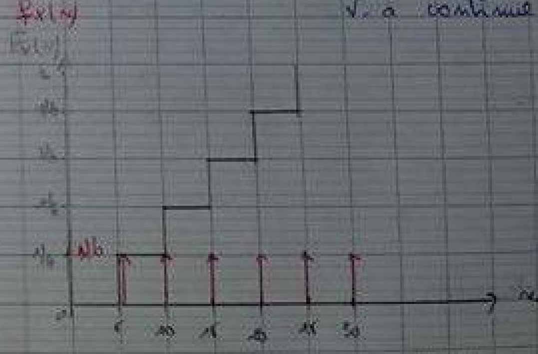
$F_X(x) = P(X \leq x)$. lancé un dé

$F_X(2) = P(X \leq 2)$ $X(f_i) = 5\, f_i$

$= \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ $1/6$

V.a discrète

V.a continue



densité taux d'accroissement

bruit blanc : toutes les composantes fréquentielles sont présentes dans le bruit

Modulation FM : contraires de Am → AM : un peut plus.

Propriétés.

- $F_X(+\infty) = P(X \le +\infty) = 1$
- $f_X(x) \ge 0$
- $F_X(-\infty) = P(X \le -\infty) = 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = F_X(+\infty) = 1$

Fonct non décroissante

- $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$

2) Densité de probabilité

La notée X.

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$$

3) Exemples de densité de probabilité

1) Normale (Gaussienne).

notée $N(\mu, \sigma^2)$

μ = moyenne

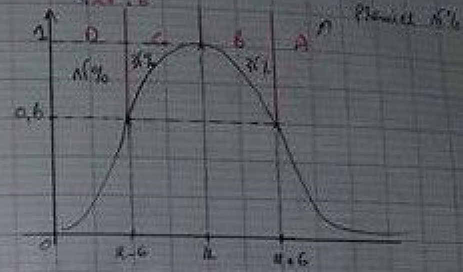
σ^2 = variance

σ = écart type

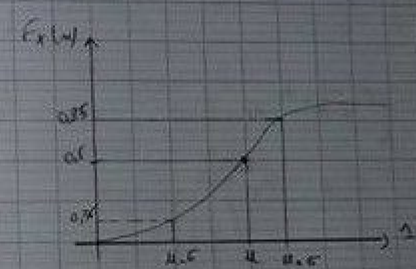
déviation standard.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

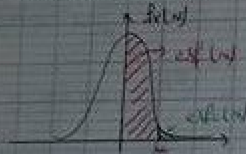
Planche N°6



Traçons la fonc de répartition



En pratique travaillez avec la densité de probabilité que avec fonct de répartition v.a normalisée $N(0,1)$



$X \sim N(\mu,\sigma^2) \rightarrow X' \sim N(0,1)$

$X' = \frac{X-\mu}{\sigma}$ — fonct des tables

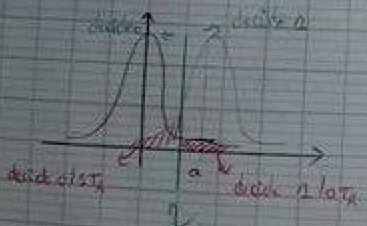
↓

$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du$ — erreur fonction

$erfc(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = f(x)$ — fonct de [illegible]

$H_0 : b(t)$

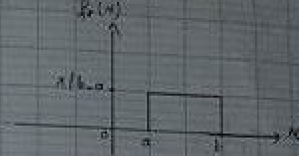
$H_1 : a + b(t)$



→ le filtre adapté trouve le seuil optimale.
utilise l'erreur fonction

• Gaussienne (normale) : (distribution gaussienne).

• Uniforme :

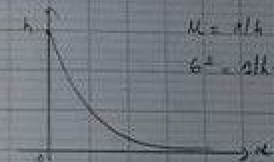


$\mu = \frac{a+b}{2}$

$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

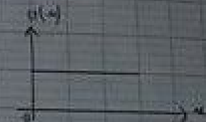
• Exponentielle :

$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot u(x)$



$\mu = 1/\lambda$

$\sigma^2 = 1/\lambda^2$



• Binomiale : discrète

$P(X=k) = C_n^k \, p^k \cdot q^{n-k}$ $\quad C_n^k =$ [illegible]

10 boules | 6 blanches
| 4 noires.

Tirage 3 fois, Prob d'avoir x boules noires

$n = 10$

$k = 2$

C_n^k = nbr de combinaisons d'avoir k quand j'ai n

• Poisson :

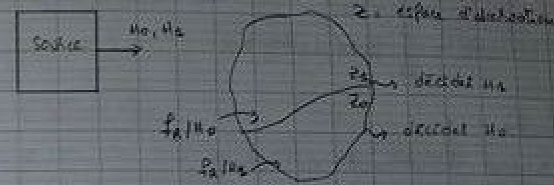
$$P(x=k) = \frac{e^{-a} \cdot a^k}{k!}$$

$$\begin{cases} \mu = a \\ \sigma^2 = a \end{cases}$$

chapitre 2 : théorie de la décision

hypothèse binaire

H_0, H_1 → observation → prendre une décision.



décide H_0 sachant H_0 vraie ✓

" H_0 " H_1 " ✗

" H_1 " H_1 " ✓ → proba de détection

" H_1 " H_0 " ✗ fausse alarme

1. Critère de Bayes :

probabilité a priori $P_0 = P(H_0)$

$P_1 = P(H_1)$ $\qquad P_0 + P_1 = 1$

je n'ai pas encore tenu compte de mes observations.

on peut affecter un coût à chaque décision.

C_{ij} : coût décide H_i / H_j est vraie

→ minimiser le coût moyen : Risque R

risque   prob   decision   coût de décision

$\mathcal{R} = P_0 P(H_0|H_0) \cdot C_{00} + P_0 P(H_1|H_0) \cdot C_{10} + P_1 P(H_0|H_1) \cdot C_{01} + P_1 P(H_1|H_1) \cdot C_{11}$

$\hookrightarrow 1 - \int_{Z_0} f_{R|H_0}(\lambda|H_0)\, d\lambda$

$\int_{Z_0} f_{R|H_1}(\lambda|H_1)\, d\lambda$

$1 - \int_{Z_0} f_{R|H_1}(\lambda|H_1)\, d\lambda$

$P(H_0|H_0) = \int_{Z_0} f_{R|H_0}(\lambda|H_0)\, d\lambda$

densité de R

$P(H_i|H_j) = \int_{Z_i} f_{R|H_j}(\lambda|H_j)\, d\lambda$

$Z = Z_0 + Z_1$.

Z_0 et Z_1 sont mutuellement exclusifs.

$R_i \begin{cases} Z_0 \\ Z_1 \end{cases}$ R : vecteur d'observation

$Z = Z_0 \cup Z_1$ $Z_0 \cap Z_1 = \phi$

$\underbrace{\mathcal{R} = P_0 C_{10} + P_1 C_{11}}_{\text{coût fixe}}$ +

$\int_{Z_0} \{ P_1 \cdot C_{01} \cdot f_{R|H_1}(\lambda|H_1) - P_1 C_{11} \cdot f_{R|H_1}(\lambda|H_1) - P_0 \cdot C_{10} \cdot f_{R|H_0}(\lambda|H_0)$

$- P_0 \cdot C_{00} \cdot f_{R|H_0}(\lambda|H_0) \}\, d\lambda$

$\int_{Z_0} \{ P_1 (\underbrace{C_{01} - C_{11}}_{>0}) \cdot f_{R|H_1}(\lambda|H_1) - P_0 (C_{10} - C_{00}) \cdot f_{R|H_0}(\lambda|H_0) \}\, d\lambda$

≥ 0

disjoint = sont indépendant $P_R = 1$ = événement certain

si je veux minimiser le risque ou le coût moyen, donc le coût fixe reste

$P_1 \cdot (C_{01} - C_{11}) \cdot f_{R|H_1}(\lambda|H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P_0 \cdot (C_{10} - C_{00}) \cdot f_{R|H_0}(\lambda|H_0) \to$ décide H_0

$$\boxed{\frac{f_{R|H_1}(\lambda|H_1)}{f_{R|H_0}(\lambda|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0 \cdot (C_{10} - C_{00})}{P_1 \cdot (C_{01} - C_{11})}}$$

rapport de vraisemblance

PAM

$H_0 : R = N \to N(0, \sigma^2)$

$H_1 : R = m + N$ $N(m, \sigma^2)$ m : scalaire

$f_{R|H_0}(\lambda|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\lambda^2}$

$f_{R|H_1}(\lambda|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\lambda - m)^2}$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\lambda - m)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\lambda^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta \quad \text{seuil}$$

$\exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}(\lambda^2 - (\lambda - m)^2)\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$

$a < b$

$\ln(a) < \ln(b)$

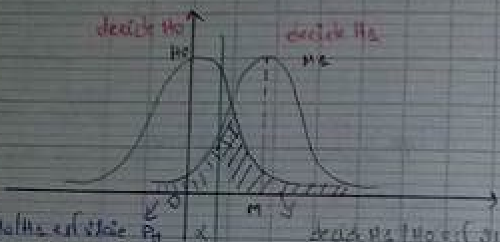
donc on applique log

$C_{01} > C_{11}$

coût d'une mauvaise décision   coût de bonne décision

$$\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2-(x-m)^2\right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

$$\boxed{x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \alpha}$$



décide H0/H1 est vraie P_M | α — décide H1/H0 est vraie → Fausse alarme P_F

(miss — raté) → il y a une cible mais j'ai dit qu'il n'y en a pas.

$$P_F = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}\, dx$$

Prob de Fausse Alarme

→ une Q(x) tabulée.

$$P_M = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}\, dx$$

Prob de miss

$$\mathrm{erfc}(x) = Q(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

⇓ gaussienne normalisée

variance = 1 et moyenne = 0

$x' = x/\sigma \qquad dx = \sigma\, dx'$

$$P_F = \int_{\alpha/\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x'^2}\, dx' = Q(\alpha/\sigma)$$

$$x' = \frac{x-m}{\sigma} \qquad dx = \sigma\, dx'$$

$$P_M = \int_{-\infty}^{\frac{\alpha-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x'^2}\, dx' = 1 - \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\infty} \cdots = 1 - Q\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

$$P_F = Q(\alpha/\sigma)$$

$$P_M = 1 - Q\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

$$\begin{cases} C_{00} = C_{11} = 0 & \text{le coût d'une bonne décision} = 0 \\ C_{01} = C_{10} = 1 & \text{le coût d'une mauvaise décision} = 1 \text{ (sont identiques)} \end{cases}$$

$$R = P_0 \cdot \underbrace{P(H_1/H_0)}_{P_F} + P_1 \cdot \underbrace{P(H_0/H_1)}_{P_M}$$

$$\boxed{R = P_0 \cdot P_F + P_1 \cdot P_M}$$

⇓ l'expression de "l'erreur moyenne".

→ je trouve ce qui va minimiser l'erreur moyenne.

si m est important, la valeur de chevauchement est grande.

$R\uparrow \to P_{\text{réel}}\downarrow$

$\sigma\uparrow \to P_{err}\uparrow$

k observations $R \begin{cases} r_2 \\ r_k \end{cases}$

$$F_R(r) = P(R \leq r) = P(R_1 \leq r, R_2 \leq r \ldots\ldots R_k \leq r)$$
$$= P(R_1 \leq r_1) \cdot P(R_2 \leq r_2) \ldots\ldots P(R_k \leq r_k)$$

$$f_R(r) = \frac{\partial F_R(r)}{\partial R} = \frac{\partial F_R(r)}{\partial R_1} \cdot \frac{\partial F_R(r)}{\partial R_2} \ldots\ldots \frac{\partial F_R(r)}{\partial R_k}$$
$$= f_{R_1}(r_1) \cdot f_{R_2}(r_2) \ldots\ldots f_{R_k}(r_k)$$

$$f_{R|H_0}(r|H_0) = \prod_{i=1}^{\ell} f_{R_i|H_0}(r_i|H_0)$$

[illegible]

$$f_{R|H_1}(r|H_1) = \prod_{i=1}^{k} f_{R_i|H_1}(r_i|H_1)$$

$$f_{R_i|H_0}(r_i|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r_i^2}$$

$$f_{R_i|H_1}(r_i|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r_i - m)^2}$$

Puissance importante $\rightarrow$ performance moindre.

critère de Bayes = on peut affecter un coût pour chaque décision, sachant qu'on ne connaît pas les probabilités a priori.

$$f_{R|H_0}(r|H_0) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r_i^2}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^{\ell} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\ell} r_i^2}$$

$$f_{R|H_1}(r|H_1) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r_i - m)^2}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^{\ell} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\ell}(r_i - m)^2}$$

$$\frac{f_{R|H_1}(r|H_1)}{f_{R|H_0}(r|H_0)} = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum (r_i - m)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum r_i^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

$$\frac{m}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{\ell} r_i - \frac{\ell m^2}{2\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ell$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\ell} r_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \alpha}$$

$\sum_{i=1}^{\ell} r_i$ statistique suffisante (elle suffit pour prendre une décision).

2. critère du minimax :

P_0 et P_1 sont inconnues.

→ choisir P_1 pour le cas le plus défavorable → essayer de minimiser.

P_F = Prob fausse alerte.

$$P(H_1/H_0) = P_F \qquad P(H_0/H_0) = 1 - P_F.$$

P_M = Prob pour que je rate ma cible.

$$P_M = P(H_0/H_1) \qquad P(H_1/H_1) = 1 - P_M.$$

$$R = \underbrace{P_0}_{1-P_1} \cdot C_{00} \cdot (1-P_F) + \underbrace{P_0}_{1-P_1} \cdot C_{10} \cdot P_F + P_1 \cdot C_{11} \cdot (1-P_M) + P_1 C_{01} \cdot P_M$$

$P_0 + P_1 = 1$

$$R = \underbrace{C_{00}(1-P_F) - C_{10} \cdot P_F}_{\text{coût fixe}} + P_1\left[P_F(C_{00} - C_{10}) + P_M(C_{01} - C_{11}) + C_{11} - C_{00}\right]$$

$$\frac{\partial R}{\partial P_1} = 0$$

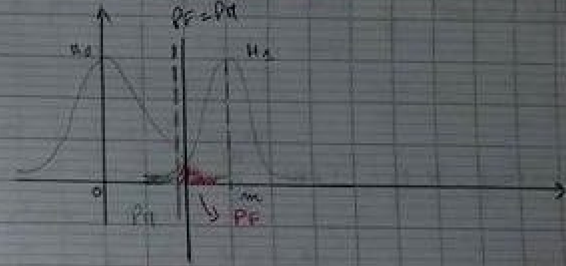
$$(C_{11} - C_{00}) + P_M(C_{01} - C_{11}) - P_F(C_{10} - C_{00}) = 0$$

je minimise le risque pour prendre la situation la plus pire

→ je fixe P_0, P_1 ⇒ pour avoir le cas le plus défavorable → minimax

si le coût d'une bonne décision est nul : $C_{ii} = 0$

$$\boxed{C_{01} \cdot P_M = P_F \cdot C_{10}}$$ → l'équation du minimax



3. critère de Neyman Pearson :

P_0 et P_1 inconnues

C_{ij} sont inconnues.

je fixe P_F à une valeur fixe (α)

je cherche à avoir P_D maximum ou P_M minimum.

→ problème d'optimisation avec contrainte

fonction objectif J

$$J = P_M + h(P_F - \alpha) \quad \text{à minimiser}$$

h : paramètre de Lagrange.

critère du minimax → je prends un P_1 qui me donne un risque max et je vais essayer de minimiser le risque max, sachant que je connais pas P_0 et P_1

$$J = \int_{Z_0} f_{R|H_1}(R|H_1)\,dR + \lambda\Big[\int_{Z_1} \underbrace{f_{R|H_0}(R|H_0)\,dR}_{1-\int_{Z_0}} - \alpha\Big]$$

$$J = \int_{Z_0} \underbrace{\big(f_{R|H_1}(R|H_1) - \lambda f_{R|H_0}(R|H_0)\big)\,dR}_{\text{fonct. intégrable}} + \underbrace{\lambda(1-\alpha)}_{\text{cste fixe}}$$

désire minimiser J

$$\Rightarrow \quad f_{R|H_1}(R|H_1) - \lambda f_{R|H_0}(R|H_0) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

$$\boxed{\frac{f_{R|H_1}(R|H_1)}{f_{R|H_0}(R|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda}$$

effet de la valeur α j'ai fixé pour la proba de fausse alerte.

Test du rapport de vraisemblance.

Test d'hypothèses complexes

Paramètres aléatoires :

Sous H_0 → paramètres θ

Sous H_1 → — ϕ

Hyp simples : $\dfrac{f_{R|H_1}(R|H_1)}{f_{R|H_0}(R|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda$

$\mathbb{E}\{x\} = \int x \, f_x(x)\,dx$

rapport de vraisemblance

$\mathbb{E}\{g(x)\} = \int g(x) \cdot f(x)\,dx$

$$\frac{\int f_{R|H_1}(R|\phi, H_1) \cdot f_\phi(\phi)\,d\phi}{\int f_{R|H_0}(R|\theta, H_0) \cdot f_\theta(\theta)\,d\theta}$$

rapport de vraisemblance généralisé

Exemple :

$H_0 \quad R = N \qquad N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$H_1 \quad R = m + N \qquad m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_m^2)$

Sous $H_0 \quad R \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$H_1 \quad R \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

gaussienne $\in N(m, \sigma^2)$ $\nearrow$ $N(0, \sigma_m^2)$ $\nearrow$

$$\Lambda = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{R|H_1}(r|m, H_1) \cdot f_M(m)\, dm}{f_{R|H_0}(r|H_0)}$$

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r-m)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_m} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_m^2} \cdot m^2} \cdot dm$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma\cdot\sigma_m} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -\left(\frac{1}{2\sigma^2}(r-m)^2 + \frac{1}{2\sigma_m^2} m^2\right) \cdot dm$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma\cdot\sigma_m} \quad \frac{1}{2\sigma^2}(r^2 - 2mr + m^2) - \frac{1}{2\sigma_m^2} m^2$$

$$\left(\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma_m^2}\right) m^2 - \frac{2rm}{2\sigma^2} - \frac{r^2}{2\sigma^2} \quad \frac{\sigma_m^2 + \sigma^2}{2\sigma^2\sigma_m^2}$$

$$\left(m^2 - \frac{2r\sigma_m^2}{\sigma_m^2 + \sigma^2}\right) \frac{\sigma_m^2 + \sigma^2}{2\sigma^2\sigma_m^2} \left(m - \frac{r \cdot \sigma_m^2}{\sigma_m^2 + \sigma^2}\right)^2 - \frac{\sigma^4}{(\sigma_m^2 + \sigma^2)}$$

$$+ \frac{r^2}{2\sigma^2}.$$

$$(m^2 - 2\alpha m) = (m - \alpha)^2 - \alpha^2$$

$$N = \frac{1}{2\pi\sigma\cdot\sigma_m} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_m^2 + \sigma^2)}\right) \cdot r^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{\sigma_m^2 + \sigma^2}{2\sigma^2\sigma_m^2} \cdot \left(m - \frac{\sigma_m^2}{\sigma^2 + \sigma_m^2}\right)^2 \cdot dm\right]$$

on sait bien que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} (m - \mu)^2 \cdot dm = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp - \frac{1}{2\theta^2} (m - \mu)^2 \cdot dm = \sqrt{2\pi}\cdot\theta$$

$$\frac{1}{\theta^2} = \frac{\sigma_m^2 + \sigma^2}{\sigma_m^2 - \sigma^2} \Rightarrow \theta = \frac{\sigma\cdot\sigma_m}{(\sigma^2 - \sigma_m^2)^2}$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma\sigma_m} \cdot \sqrt{2\pi}\, \frac{\sigma\cdot\sigma_m}{(\sigma^2 + \sigma_m^2)^{1/2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \sigma_m^2}}$$

$$1/\sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma_m^2 + \sigma^2}} \cdot \exp\left(\frac{1}{2(\sigma^2 + \sigma_m^2)} \cdot r^2\right)$$

$$\Lambda(R) = \frac{}{1/\sqrt{2\pi}\cdot\sigma \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$\int$ densité de prob $= 1$

$$r^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{2\sigma^2(\sigma_m^2+\sigma^2)}{\sigma_m^2} \cdot \left(\ln(\eta) + 1/2 \ln\left(1+\frac{\sigma_m^2}{\sigma^2}\right)\right)$$

Paramètre déterministe

$H_1 \rightarrow \phi$

$H_0 \rightarrow \theta$

partir des observations, estimer θ et ϕ $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$.

$$\Lambda(R) = \frac{f_{R|H_1}(R|\hat{\phi}, H_1)}{f_{R|H_0}(R|\hat{\theta}, H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

max de la fct de vraisemblance

estimateur de maximum de vraisemblance

étection séquentielle

s alors d'observations.

observations arrivent de manière séquentielle.

de H_0

cide H_1

ne peut pas décider → j'ai besoin de plus d'observations.

la variance est une mesure de l'écart ou de l'incertitude

le max de la densité de prob est la valeur la plus probable.

Pic situé au niveau de la moyenne.

je vais avoir k observations. $R\{r_1, r_2 \dots r_k\}$.

$$\Lambda(R) = \frac{f_{R|H_1}(R|H_1)}{f_{R|H_0}(R|H_0)}$$

$\Lambda(R) > \eta_1 \rightarrow$ décide H_1

$\Lambda(R) < \eta_0 \rightarrow$ décide H_0

c'est ce qui se passe généralement à la pratique.

$\eta_0 < \Lambda(R) < \eta_1$ prendre nouvelle observation, et refaire test.

$P_F = \alpha$ (fausse alerte) $\rightarrow P(H_1|H_0)$

$P_M = \beta$ (miss. rate) $\rightarrow P(H_0|H_1)$

$$P_D = P(H_1|H_1) = \int_{Z_1} f_{R|H_1}(R|H_1) \cdot dR$$

$$= \Lambda(R) \cdot \underbrace{\int_{Z_1} f_{R|H_0}(R|H_0) \cdot dR}_{P(H_1|H_0) = P_F = \alpha}$$

$P_0 > \zeta_1 - \alpha$ $\qquad P_0 + P_1 = 1 \rightarrow P_0 = 1 - P_1$

$1 - \beta > \zeta_1 - \alpha \rightarrow \boxed{\zeta_1 < \frac{1-\beta}{\alpha}}$

$\boxed{\zeta > \frac{\beta}{1-\alpha}}$

Chapitre II. Méthodes d'estimation.

I. Paramètre aléatoire.

$a \rightsquigarrow$ observation $R = \{ r_1, \ldots, r_N \} \rightsquigarrow \hat{a}$

N observations indépendantes.

Critère de Bayes.

↳ on suppose que $p_a(a)$ est connue

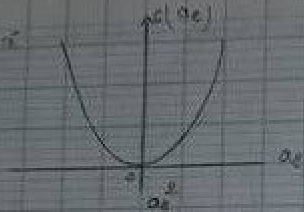
erreur $= a_e = a - \hat{a}$.

Fnct coût $c(a_e)$

Priori ← → a priori (on a l'inf sur nos observations)

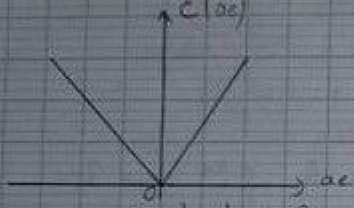
Ici : souvent utilisé

coût quadratique

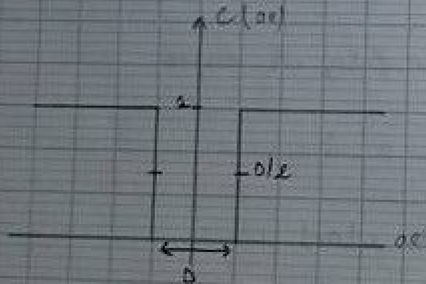


erreur par excès ou par défaut soit =

coût absolu



$|\varepsilon| \rightarrow$ valeur absolue



coût uniforme

définir le risque : $\mathcal{R} = \mathbb{E}\{C(\varepsilon)\}$ (espérance)

minimiser $\mathcal{R}$.

$$\mathcal{R} = \mathbb{E}\{C(\varepsilon)\} = \iint C(\varepsilon) \cdot f_{a,r}(a,r)\, da\, dr.$$

- coût quadratique : $C(\varepsilon) = \varepsilon^2$

$$\mathcal{R} = \iint \varepsilon^2 \cdot f_{a,r}(a,r) \cdot da\, dr$$

par conditionnel

$$f_{a,r}(a,r) = f_{a|r}(a|r) \cdot f_r(r)$$

$$\mathcal{R} = \int f_r(r) \underbrace{\left[\int (a-\hat{a})^2 \cdot f_{a|r}(a|r) \cdot da \right]}_{\mathcal{R}_{min} \rightarrow min} \cdot dr$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \hat{a}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a-\hat{a})^2 \cdot f_{a|r}(a|r) \cdot da = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2(a-\hat{a})(-1) \cdot f_{a|r}(a|r) \cdot da = 0.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot f_{a|r}(a|r)\, da = \hat{a} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a|r}(a|r) \cdot da}_{=1} = \hat{a}$$

$$\hat{a}_{ms} = \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot \underbrace{f_{a|R}(a|R)}_{\text{densité a posteriori}} \cdot da$$

mean square

moyenne de la

- coût absolu :

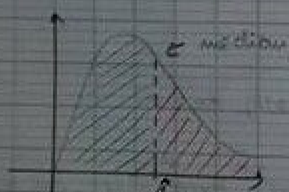
$a_\epsilon = |a - \hat{a}|$

$$R = \int f_R(R) \cdot \int |a - \hat{a}| \cdot f_{a|R}(a|R) \cdot da \cdot dR$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} |a - \hat{a}| \cdot f_{a|R}(a|R) \cdot da = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\hat{a}} (\hat{a} - a) f_{a|R}(a|R) da + \int_{\hat{a}}^{\infty} (a - \hat{a}) \cdot f_{a|R}(a|R) \cdot da$$

$$\int_{-\infty}^{\hat{a}} f_{a|R}(a|R) da = \int_{\hat{a}}^{\infty} f_{a|R}(a|R) \cdot da$$



ms : quand on a un coût quadratique.

médian : c'est qq chose qui sépare en 2.

a_{ms} = valeur moyenne de la densité de prob a posteriori

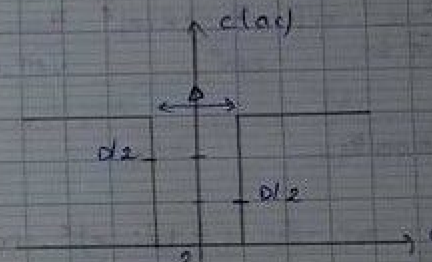
pour le quadratique →

$\hat{a}_{abs}$ = médian de la densité de prob a posteriori.

pour un coût absolu →

- coût uniforme.

$$R_u = \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(R) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} c(a_\epsilon) \cdot f_{a|R}(a|R) \cdot da \cdot dR$$



$$\left[1 - \int_{\hat{a} - \Delta/2}^{\hat{a} + \Delta/2} f_{a|R}(a|R) \cdot da \right] \Rightarrow \max f_{a|R}(a|R)$$

$\simeq f_{\hat{a}|R}(\hat{a}|R)$

$\hat{a}_{map}$ = max de la densité de prob a posteriori.

pour un coût uniforme →

Exemples

a aléatoire $a \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a^2)$

N observations indépendantes.

$R_i = a + n_i \qquad n_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2) \qquad R$

$$f_{a|R}(a|R) = \frac{f_{a,R}(a,R)}{f_R(R)} = \frac{f_{R|a}(R|a)\cdot f_a(a)}{f_R(R)} \qquad f_{R|a} \nearrow \mathcal{N}(a, \sigma_n^2) \qquad f_a \nearrow \mathcal{N}(0, \sigma_a^2)$$

$$= \frac{1}{f_R(R)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp -\frac{1}{2\sigma_n^2}(R-a)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_a} \exp -\frac{1}{2\sigma_a^2}\,a^2$$

N observation indépendantes.

$$\prod_{i=1}^{N} \to \underbrace{\qquad}_{g(R)} \exp -\frac{1}{2\sigma_n^2} \cdot \sum (R_i - a)^2 \cdot \exp -\frac{a^2}{2\sigma_a^2}$$

$$g(R) \cdot \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{\sum (R_i - a)^2}{\sigma_n^2} + \frac{a^2}{\sigma_a^2}\right)$$

a posteriori = après nos observations.

$$\frac{1}{\sigma_n^2}\left[\sum_{i=1}^{N} R_i^2 - 2a\sum R_i + Na^2\right] + \frac{a^2}{\sigma_a^2}$$

$$= \left(\frac{N}{\sigma_n^2} + \frac{1}{\sigma_a^2}\right)a^2 - 2a \cdot \frac{\sum R_i}{\sigma_n^2} + \frac{\sum R_i^2}{\sigma_n^2}$$

$$\frac{N\sigma_a^2 + \sigma_n^2}{\sigma_n^2 \cdot \sigma_n^2}\left[a^2 - \frac{2a\sum R_i}{\sigma_n^2 \cdot \sigma_p^2}\right] + \frac{\sum R_i^2}{\sigma_n^2}.$$

σ_p

$$\left(a - \frac{\sum R_i}{\sigma_n^2 \cdot \sigma_p^2}\right) - \left(\frac{\sum R_i}{\sigma_n^2 \sigma_p^2}\right)^2 + \frac{\sum R_i}{\sigma_n^2}$$

$$= g(R) \cdot \exp -\frac{1}{2\sigma_p^2}\left(a - \frac{\sum R_i}{\sigma_n^2 \cdot \sigma_p^2}\right)^2 \cdot \exp(\ldots)$$

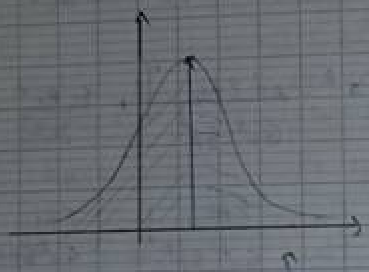
$$= h(R) \cdot \exp -\frac{1}{2\sigma_p^2}\left(a - \frac{\sum R_i}{\sigma_n^2 \sigma_p^2}\right)^2$$

$a + u \to$ gaussienne.

$$= h(R) \cdot \exp -\frac{1}{2\sigma_p^2}\left(a - \frac{\sigma_a^2}{N\sigma_a^2 + \sigma_n^2} \cdot \sum R_i\right)^2$$

$$f_{a|R}(a|R) \sim \mathcal{N}\left(\frac{\sigma_a^2}{N\sigma_a^2 + \sigma_n^2} \cdot \sum R_i,\ \sigma_p^2\right).$$

$$N\left(\frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2+\frac{\sigma_n^2}{N}}\cdot\sum\frac{R_i}{N}\,,\ \sigma_p^2\right).$$



si la densité a posteriori est gaussienne

donc :

$$\hat{a}_{ms}=\hat{a}_{abs}=\hat{a}_{map}$$

$$=\frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2+\frac{\sigma_n^2}{N}}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N}R_i}{N}$$ moyenne de mes observations

symétrique = est par erreur = est par défaut

• Paramètres non-aléatoires

$a \rightarrow \hat{a}$ $\quad a_e = a-\hat{a}$

minimiser le risque, coût moyen $C(e)$.

$$\mathcal{R}=\mathbb{E}\{C(a_e)\}=\int C(a_e)\cdot f_{R|a}(R|a)\cdot dR$$

si le coût quadratique on prend :

$$C(a_e)=(a-\hat{a})^2$$

$$\mathcal{R}=\int_{-\infty}^{+\infty}(a-\hat{a})^2\cdot f_{R|a}(R|a)\cdot dR$$

$$\left.\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}}=0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}2(a-\hat{a})\cdot f_{R|a}(R|a)\,dR=0$$

$$(a-\hat{a})\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f_{R|a}(R|a)\cdot dR=0 \Rightarrow a=\hat{a}$$

ne dépend même pas des observations.

fonct de vraisemblance

$\hat{a}_{MLE}$ = maximum likelihood estimator.

$\max(f_{R/a}(R/a))$.

$$\left.\frac{\partial f_{R/a}(R/a)}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}_{MLE}} = 0$$

comment estimer la qualité d'un estimateur ?

$a \rightsquigarrow \hat{a}$

biais $\mathbb{E}\{\hat{a} - a\}$

si $\mathbb{E}\{\hat{a}\} = a$ → on dit que l'estimateur est sans biais.

variance $\mathrm{Var}(\hat{a} - a)$ → mesure de dispersion de l'erreur
- variance minimale

- Inégalité de Cramer Rao : il donne une limite aux variances.

si $\hat{a}$ est un estimateur sans biais de a.

fonct de vraisemblance

$$\mathrm{Var}(\hat{a} - a) \geq \left(\mathbb{E}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{R/a}(R/a)\right]^2\right\}\right)^{-1}$$

$$= \left(-\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln f_{R/a}(R/a)\right\}\right)^{-1}$$

on cherche à avoir un estimateur non biaisé et de variance minimale

hypothèse bonne. Ce qui n'est pas tout à fait juste.

variance : mesure la dispersion de l'erreur.

si nous avons égalité :
→ la variance est minimale
→ meilleur estimateur

on dit que l'estimateur est efficace

on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln(f_{R/a}(R/a)) = (\hat{a} - a) \cdot \underbrace{k(a)}_{\text{une fonct qui dépend de a (pas des obs)}}.$$

exemples

a inconnu $\qquad R_i = a + n_i$

$n_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$

$i = 1, \ldots, N$ obs indépendantes.

$$f_{R_i/a}(R_i/a) \sim \mathcal{N}(a, \sigma_n^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp -\frac{1}{2\sigma_n^2}(R_i - a)^2.$$

$$f_{R/a}(R/a) = \prod_{i=1}^{N} f_{R_i/a}(R_i/a) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\right)^N \cdot \exp -\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^{N}(R_i - a)^2$$

$\ln(-) = N\ln(-) + \left(-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum(Ri-a)^2\right).$

max

$\frac{\partial}{\partial a}$ $\frac{\partial}{\partial a}(-) = -\frac{1}{2\sigma_n^2}\left(\sum_{i=1}^{N} 2(Ri-a)(-1)\right)$

com. $= \frac{1}{\sigma_n^2}\left(\sum Ri - \underbrace{\sum a}_{Na}\right) = \frac{N}{\sigma_n^2}\left(\frac{1}{N}\sum Ri - a\right).$

biai $\frac{N}{\sigma_n^2}\left(\frac{1}{N}\sum Ri - a\right)\Big|_{a=\hat{a}_{mLE}} = 0$

si $\frac{1}{N}\sum Ri - \hat{a}_{mLE} = 0 \rightarrow \boxed{\hat{a}_{mLE} = \frac{1}{N}\sum Ri}$

var * sans biais?

$\mathbb{E}\{\hat{a}_{mLE}\} = \mathbb{E}\{\frac{1}{N}\sum Ri\} = \frac{1}{N}\sum\mathbb{E}\{Ri\} = \frac{1}{N}\sum a = a$

$\mathbb{E}\{\hat{a}_{mLE} - a\} = 0$

si → estimateur sans biais

√ * Efficace?

$\frac{\partial}{\partial a}\ln(f_{R|a}(R|a)) = \frac{N}{\sigma_n^2}\left(\underbrace{\frac{1}{N}\sum Ri}_{\hat{a}_{mLE}} - a\right) = \frac{N}{\sigma_n^2}(\hat{a}_{mLE} - a)$ R(a)

→ oui efficace

$\frac{\partial^2}{\partial a^2}(-) = -\frac{N}{\sigma_n^2}$

Variance $= \frac{1}{-\left(-\frac{N}{\sigma_n^2}\right)} = \frac{\sigma_n^2}{N}$

- sans biais
- variance $= \sigma_n^2/N$.

$\hat{a}_{mLE} = 1/N\sum Ri$ = valeur moyenne de mes observations

Exemple 2:

expérience, nombre d'évènements ~ Poisson de paramètre a, a est inconnu.

loi de Poisson:

$P(n) = \frac{a^n}{n!}e^{-a}$ loi discrète.

→ Prob d'avoir n evenements pendant une durée de temps

a → moyenne et la variance.

$P(n|a=A) = \frac{A^n}{n!}e^{-A}$

$\ln(-) = \ln\left(\frac{1}{n!}\right) + n\ln(A) - A$

$\frac{\partial}{\partial A}(-) = \frac{n}{A} - 1 = \frac{1}{A}(n-A) = 0 \rightarrow \boxed{\hat{A}_{mLE} = n}$

N↑ → plus d'obs → plus d'info → estimateur meilleur → variance petite

$\hat{a}_{mLE} = m$

· biais?

$\mathbb{E}\{\hat{a}_{mLE}\} = \mathbb{E}\{m\} = a \Rightarrow$ estimateur sans biais

· efficace? oui

$\frac{\partial}{\partial A}(-) = \frac{m}{A} - 1 = \frac{1}{A}(m - A) = \overbrace{\frac{1}{A}}^{h(a)}(\hat{a}_{mLE} - a)$

→ j'ai égalité pour ICR.

· variance?

[illegible] $= \frac{1}{-\mathbb{E}\{-m/A^2\}} = \frac{A^2}{\mathbb{E}\{m\}} = \frac{A^2}{A} = A$

ICR : nous donne la limite inférieure de la variance.

→ estimés du max de vraissemblance σ et σ^2

estimateurs efficaces ?

$$f_{Y/\sigma}(y/\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2}$$

$$\ln(\cdot) = \sim - \ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(\cdot) = -\frac{1}{\sigma} - \frac{(4\sigma)}{4\sigma^4}(-y^2) = \frac{1}{\sigma^3} y^2 - \frac{1}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sigma^3}(y^2 - \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^3}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)$$

→ est effic ?

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(\cdot) = 0 \qquad y^2 - \sigma^2 = 0 \rightarrow \hat{\sigma}^2 = y^2 \Rightarrow \hat{\sigma} = y$$

→ σ est une variance donc > 0

note $\alpha = \sigma^2$ $\qquad E(\alpha) . (\hat{\alpha} - \alpha)$?

$$f_{Y/\sigma}(y/\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha^{1/2}} e^{-\frac{1}{2\alpha} \cdot y^2}$$

$$\ln(\cdot) = \sim - \frac{1}{2}\ln(\alpha) - y^2/2\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\cdot) = -\frac{1}{2\alpha} - y^2\left(\frac{-2}{4\alpha^2}\right)$$