

Introduction Aux Groupes Des Tresses

Support de Cours Présenté Par

Abderrahmane BOUCHAIR

Maître de Conférences - Département de Mathématiques

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Université de Jijel

Table des matières

Introduction	2
1 Construction d'espaces	3
1.1 Espaces quotients et applications quotients	3
1.2 Relation d'équivalence qui identifier une partie à un point	6
1.3 Compatibilité d'une application et continuité	7
1.4 Recollements	8
2 Homotopie et Groupe fondamental	11
2.1 Homotopie des applications continues	11
2.2 Homotopie des chemins	14
2.3 Groupe fondamental	15
2.4 Changement de point base	16
2.5 Applications continues et groupes fondamentaux	18
2.6 Groupe fondamental du cercle \mathbb{S}^1	21
2.7 Exercices	26
3 Groupes des tresses	27
3.1 Générateurs et relations	27
3.2 Tresses géométriques	30
3.3 Espaces des configurations	37
3.4 Automorphismes de tresses de groupe libre	38
3.5 Groupe de difféotopies	48

Introduction

Le groupe de tresses a été explicitement introduit et étudié par Emile Artin en 1925. C'est un outil pour étudier les noeuds et les entrelacs. En dehors des mathématiques, la notion de tresse est apparue en d'autres sciences telles que la physique, la biologie et l'informatique.

Les groupes des tresses peuvent être définis de différentes manières équivalentes : comme groupe donné par générateurs et relations, groupes des tresses (géométriques), groupe fondamental de l'espace des configurations de points distincts dans le plan, groupe d'automorphismes de groupe libre, et groupe de difféotopies. La diversité de ces différentes approches fait l'intérêt des groupes des tresses.

Ce cours est destiné aux étudiants de master (M1 et M2) de mathématiques. C'est une introduction à la théorie des tresses et les groupes des tresses. Ils trouveront des (rappels des) cours de topologie algébrique qui permettent d'initier les étudiants au domaine de la topologie de basse dimension.

Ce support pédagogique vise à :

1. Apprendre quelques méthodes de construction d'espaces.
2. Introduire quelques concepts de bases de la topologie algébrique.
3. Initiation à la théorie des tresses et les groupes des tresses.

Pré-requis : On supposera connues les notions de bases de la topologie générale, la géométrie différentielle et d'algèbre.

Chapitre 1

Construction d'espaces

1.1 Espaces quotients et applications quotients

Soit (E, τ) un espace topologique et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E . On a donc l'ensemble quotient $E/\mathcal{R} = \{\hat{x} : x \in E\}$ et considérons la surjection canonique $s : E \rightarrow E/\mathcal{R}$. On veut introduire sur E/\mathcal{R} une topologie déduite de celle de E .

Une partie $U \subseteq E/\mathcal{R}$ est dite ouverte dans E/\mathcal{R} si et seulement si $s^{-1}(U)$ est un ouvert de E . L'ensemble $\tau_{E/\mathcal{R}}$ constitué des parties ouvertes de E/\mathcal{R} est une topologie sur E/\mathcal{R} appelée topologie quotient. L'ensemble E/\mathcal{R} muni de cette topologie est dit espace quotient.

On note que la topologie quotient est la plus fine parmi celles définies sur E/\mathcal{R} pour lesquelles la surjection canonique $s : E \rightarrow E/\mathcal{R}$ est continue.

Proposition 1.1.1 *Une partie F dans l'espace quotient E/\mathcal{R} est fermée si et seulement si $s^{-1}(F)$ est un fermé de E .*

Démonstration. La proposition découle du fait que

$$s^{-1}((E/\mathcal{R}) \setminus F) = E \setminus s^{-1}(F).$$

■

Proposition 1.1.2 *Une application f d'un espace quotient E/\mathcal{R} dans un espace topologique Y est continue si et seulement si $f \circ s$ est continue.*

Démonstration. Il est clair que si f est continue, alors $f \circ s$ est aussi continue.

Inversement, supposons que $f \circ s$ est continue et prenons un ouvert U de Y . On a

$$s^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ s)^{-1}(U)$$

est un ouvert de E . Donc, par définition, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E/\mathcal{R} . ■

Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application donnée. Alors

$$\Sigma_f = \{f^{-1}(y) : y \in f(X)\}$$

est une partition de X . Il existe donc une relation d'équivalence unique \mathcal{R}_{Σ_f} sur X associé à Σ_f définie par

$$(\forall x, x' \in X)(x\mathcal{R}_{\Sigma_f}x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')),$$

telle que $X/\mathcal{R}_{\Sigma_f} = \Sigma_f$. De plus, il existe une application bijective

$$\begin{aligned} \hat{f} : \Sigma_f &\longrightarrow f(X) \\ \hat{x} &\longmapsto \hat{f}(\hat{x}) = f(x'), x' \in \hat{x} \end{aligned}$$

telle que $f = i \circ \hat{f} \circ s$, où i est l'inclusion naturelle de $f(X)$ dans Y . D'où, on a la décomposition suivante

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ s \downarrow & & \uparrow i \\ \Sigma_f & \xrightarrow{\hat{f}} & f(X) \end{array}$$

Lemme 1.1.3 *Si $f : X \rightarrow Y$ est continue, alors l'application $f : X \rightarrow f(X)$ est aussi continue.*

Démonstration. Prenons Ω un ouvert arbitraire de $f(X)$ et montrons que $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de X . Il existe un ouvert V dans Y telle que $\Omega = V \cap f(X)$. Donc

$$f^{-1}(\Omega) = f^{-1}(V \cap f(X)) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V),$$

qui est un ouvert de X . ■

Proposition 1.1.4 *Si f est continue, alors \hat{f} est une application continue.*

Démonstration. Supposons que f est continue. Comme $f = i \circ \hat{f} \circ s$, alors d'après la proposition 1.1.2 l'application $i \circ \hat{f} : \Sigma_f \rightarrow Y$ est continue. Donc l'application $i \circ \hat{f} : \Sigma_f \rightarrow \text{Im}(i \circ \hat{f}) = f(X) \subseteq Y$ est continue. Mais $(i \circ \hat{f})(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x})$, pour tout $\hat{x} \in \Sigma_f$, i.e.,

$$\hat{f} = i \circ \hat{f} : \Sigma_f \rightarrow f(X).$$

D'où \hat{f} est une application continue. ■

Définition 1.1.1 Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. f est dite application quotient s'il existe un couple (\mathcal{R}, g) constitué d'une relation d'équivalence sur X et d'un homéomorphisme $g : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$ telle que $f = g \circ s$, où $s : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ est la surjection canonique.

Il découle de la définition que toute application quotient est continue surjective.

Théorème 1.1.5 Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application surjective. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (1) L'application $f : X \rightarrow Y$ est quotient.
- (2) U est ouvert dans Y si et seulement si $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X , pour tout $U \subseteq Y$.
- (3) F est fermé dans Y si et seulement si $f^{-1}(F)$ est fermé dans X , pour tout $F \subseteq Y$.
- (4) L'application $\hat{f} : X/\mathcal{R}_{\Sigma_f} \rightarrow Y$ est un homéomorphisme.

Démonstration. (1) \Rightarrow (2). Supposons que f est quotient. Donc la continuité de f nous conduit au fait que si U est un ouvert de Y alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X . Maintenant, soit U une partie de Y tel que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X . Puisque $f = g \circ s$, alors $s^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ s)^{-1}(U)$ est ouvert dans X . Donc $g^{-1}(U)$ est ouvert dans X/\mathcal{R}_{Σ_f} . Comme g est un homéomorphisme, alors $U = g(g^{-1}(U))$ est un ouvert de Y .

(2) \Rightarrow (3). Il suffit d'utiliser la propriété $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$, pour tout $U \subseteq Y$.

(3) \Rightarrow (4). On a \hat{f} est continue car f est continue. Montrons que \hat{f}^{-1} est continue. Soit F un fermé de X/\mathcal{R}_{Σ_f} , et montrons que $\hat{f}(F)$ est fermé dans Y . On a

$$f^{-1}(\hat{f}(F)) = (\hat{f} \circ s)^{-1}(\hat{f}(F)) = s^{-1}(F)$$

qui est fermé dans X . Donc d'après (4), $\hat{f}(F)$ est fermé dans Y .

(4) \Rightarrow (1). Il suffit de prendre $(\mathcal{R}, g) = (\mathcal{R}_{\Sigma_f}, \hat{f})$. ■

Corollaire 1.1.6 La composition de deux applications quotients est une application quotient.

Proposition 1.1.7 Soient X, Y, Z trois espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications. Alors

- (1) Si $g \circ f$ et f sont quotients, alors g est quotient.
- (2) Si f et g sont continues tel que $g \circ f$ quotient, alors g est quotient.
- (3) Si f est continue et s'il existe une partie A de X telle que $f(A) = Y$ et $f|_A$ est quotient,

alors f est une application quotient.

(4) Toute application bijective quotient est un homéomorphisme.

(5) Toute application continue surjective ouverte (fermée) est quotient.

(6) Si f est quotient et si Ω est un ouvert de Y , alors l'application $f| : f^{-1}(\Omega) \rightarrow \Omega$ est quotient.

1.2 Relation d'équivalence qui identifier une partie à un point

Soit E un espace topologique et X une partie non vide de E . La famille

$$\Sigma_X = \{\{x\} : x \in E \setminus X\} \cup \{X\}$$

est une partition de E . Alors, il existe une relation d'équivalence \mathcal{R}_X associé à cette partition définie sur E par :

$$\forall x, x' \in E, x\mathcal{R}_X x' \Leftrightarrow (x, x' \in X \text{ ou bien } x = x' \text{ et } x \in E \setminus X).$$

Définition 1.2.1 L'espace quotient $E/\mathcal{R}_X = \Sigma_X$ est appelé l'espace obtenu à partir de E en identifiant X à l'un de ses points.

On écrit souvent $E/\mathcal{R}_X = E/X$.

Proposition 1.2.1 Si X est une partie fermée (ouverte) dans E , alors la surjection canonique $s : E \rightarrow E/X$ est une application fermée (ouverte).

Démonstration. Supposons que X est fermé dans E et montrons que s est une application fermée. Soit B un fermé de E . Montrons que $s(B)$ est fermé dans E/X . Il suffit de montrer que $s^{-1}(s(B))$ est fermé dans E . On a $s(B) = \{\bar{x} : x \in B\}$. On distingue donc deux cas :

Cas 1 : Si $X \cap B = \emptyset$, alors $s(B) = \{\{x\} : x \in B\}$. Donc $s^{-1}(s(B)) = B$

Cas 2 : Si $X \cap B \neq \emptyset$, alors $s(B) = \{\{x\} : x \in B \setminus X\} \cup \{X\}$. D'où $s^{-1}(s(B)) = B \cup X$.

Dans les deux cas $s^{-1}(s(B))$ est un fermé de E .

De la même manière, on montre que s est ouverte. ■

Corollaire 1.2.2

(1) Si X est une partie ouverte de E , alors la surjection canonique $s : E \rightarrow E/X$ est une application continue surjective ouverte.

(2) Si X est une partie fermée de E , alors la surjection canonique $s : E \rightarrow E/X$ est une application continue surjective fermée.

1.3 Compatibilité d'une application et continuité

Soient X, Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application donnée et $\mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Y$ deux relations d'équivalences sur X et Y , respectivement.

Définition 1.3.1 On dit que f est compatible avec \mathcal{R}_X et \mathcal{R}_Y si

$$\forall x, x' \in X, x\mathcal{R}_X x' \Rightarrow f(x)\mathcal{R}_Y f(x').$$

Si f est compatible avec les relations d'équivalences définies sur X et Y , alors elle induit une application $\hat{f} : X/\mathcal{R}_X \rightarrow Y/\mathcal{R}_Y$ définie par $\hat{f}(\bar{x}) = \overline{f(x')}$, où $x' \in \bar{x}$. Il est naturel de voir sous quelles conditions \hat{f} est bijective.

Définition 1.3.2 Soit f une application compatible avec les relations d'équivalences \mathcal{R}_X et \mathcal{R}_Y . On dit que f conserve l'injection si pour tous $y, y' \in Y$ tels que $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, $f^{-1}(y') \neq \emptyset$ et $y \mathcal{R}_Y y'$, alors pour tout $(x, x') \in f^{-1}(y) \times f^{-1}(y')$ on a $x\mathcal{R}_X x'$.

Définition 1.3.3 Une application bijective f est dite bicompatible avec \mathcal{R}_X et \mathcal{R}_Y , si pour tous $x, x' \in X$ on a

$$x\mathcal{R}_X x' \Leftrightarrow f(x)\mathcal{R}_Y f(x').$$

Proposition 1.3.1

Soit f une application compatible avec les relations d'équivalences \mathcal{R}_X et \mathcal{R}_Y .

- (1) Si f est surjective, alors \hat{f} est une application surjective.
- (2) Si f conserve l'injection, alors \hat{f} est une application injective.
- (3) Si f est bijective bicompatible, alors \hat{f} est une application bijective.

Démonstration. (Exercice). ■

Proposition 1.3.2 Si f est une application continue compatible avec les relations d'équivalences \mathcal{R}_X et \mathcal{R}_Y , alors \hat{f} est continue.

Démonstration. Considérons les surjections canoniques $s_X : X \rightarrow X/\mathcal{R}_X$ et $s_Y : Y \rightarrow Y/\mathcal{R}_Y$. Pour montrer que \hat{f} est continue il suffit de montrer que $\hat{f} \circ s_X$ est continue. Mais $\hat{f} \circ s_X = s_Y \circ f$. Donc $\hat{f} \circ s_X$ est continue puisque f et s_Y sont continues. ■

Corollaire 1.3.3 Si f est un homéomorphisme bicompatible, alors \hat{f} est un homéomorphisme.

Exercice 1.3.4 Soient X un espace topologique et $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ deux relations d'équivalences sur X . Si, pour tous $x, x' \in X$, $x\mathcal{R}_1 x'$ implique $x\mathcal{R}_2 x'$, alors montrer qu'il existe une application quotient $\hat{f} : X/\mathcal{R}_1 \rightarrow X/\mathcal{R}_2$.

1.4 Recollements

Soient X, Y deux espaces topologiques disjoints, A une partie non vide de X et $f : A \rightarrow Y$ une application continue. La famille

$$\Sigma = \{\{x\} : x \in (X \setminus A) \cup (Y \setminus f(A))\} \cup \{\{y\} \cup f^{-1}(y) : y \in f(A)\},$$

est une partition de $X \cup Y$. Donc il existe une relation d'équivalence \mathcal{R}_f sur $X \cup Y$ tel que $(X \cup Y)/\mathcal{R}_f = \Sigma$.

Remarque 1.4.1 *Tout élément de $X \cup Y$ a une classe d'équivalence de type $\{x\}$ ou $\{f^{-1}(x) \cup \{x\}\}$. En particulier, si $x \in A$ alors sa classe est $\{f(x)\} \cup f^{-1}(f(x))$.*

On introduit sur $X \cup Y$ la topologie somme définie comme suit :

Une partie U est ouverte dans $X \cup Y$ si et seulement si $U \cap X$ est ouverte dans X et $U \cap Y$ est ouverte dans Y .

Définition 1.4.1 *L'espace Σ muni de la topologie quotient est appelé le recollement des espaces X et Y grâce à f à partir de A et $f(A)$. On écrit $\Sigma = X \cup_f Y$.*

Considérons les inclusions naturelles suivantes :

$$\begin{aligned} i_X : X &\rightarrow X \cup Y \\ i_Y : Y &\rightarrow X \cup Y \\ q : X \cup Y &\rightarrow X \cup_f Y \end{aligned}$$

et posons $j = q \circ i_X$ et $k = q \circ i_Y$. Les propositions suivantes caractérisent les ouverts et les fermés de l'espace $X \cup_f Y$.

Proposition 1.4.1 *Une partie U de $X \cup_f Y$ est ouverte si et seulement si $j^{-1}(U)$ est un ouvert de X et $k^{-1}(U)$ est un ouvert de Y .*

Démonstration. Soit U une partie de $X \cup_f Y$. On a U ouvert de $X \cup_f Y$ si et seulement si $q^{-1}(U)$ est un ouvert de $X \cup Y$. Ceci est équivalent à $X \cap q^{-1}(U)$ est un ouvert de X et $Y \cap q^{-1}(U)$ est un ouvert de Y . Mais

$$X \cap q^{-1}(U) = i_X^{-1}(q^{-1}(U)) = (q \circ i_X)^{-1}(U) = j^{-1}(U),$$

et

$$Y \cap q^{-1}(U) = i_Y^{-1}(q^{-1}(U)) = (q \circ i_Y)^{-1}(U) = k^{-1}(U).$$

■

Proposition 1.4.2 *Une partie U de $X \cup_f Y$ est fermée si et seulement si $j^{-1}(U)$ est un fermé de X et $k^{-1}(U)$ est un fermé de Y .*

Proposition 1.4.3 *Soient X, Y deux espaces topologiques disjoints, A une partie non vide de X et $f : A \rightarrow Y$ une application continue. Alors*

- (1) *k est une application injective.*
- (2) *$j|_{(X \setminus A)}$ est une application injective.*

Démonstration.

(1). Soient y_1, y_2 deux éléments de Y tel que $k(y_1) = k(y_2)$. Donc $q \circ i_Y(y_1) = q \circ i_Y(y_2)$. Ceci est équivalent à $\overline{y_1} = \overline{y_2} \Leftrightarrow \{\{y_1\} \cup f^{-1}(y_1)\} = \{\{y_2\} \cup f^{-1}(y_2)\}$. D'où $y_1 = y_2$.

(2). Soient $x_1, x_2 \in X \setminus A$ telle que $j(x_1) = j(x_2)$. Alors $\overline{x_1} = \overline{x_2}$. Ceci nous donne $\{x_1\} = \{x_2\}$. D'où $x_1 = x_2$. ■

Lemme 1.4.4 *Si $B \subseteq Y$ et $C \subseteq X$, alors*

$$\begin{aligned} j^{-1}(k(B)) &= f^{-1}(B), \\ k^{-1}(k(B)) &= B, \\ j^{-1}(j(C)) &= C \cup f^{-1}(f(A \cap C)), \\ k^{-1}(j(C)) &= f(A \cap C). \end{aligned}$$

Dans tout le reste du paragraphe, on suppose que A est un fermé de X . La proposition suivante montre que l'application k est un homéomorphisme sur son image.

Proposition 1.4.5

- (1). *$k : Y \rightarrow X \cup_f Y$ est une application fermée.*
- (2). *$k : Y \rightarrow k(Y) \subset X \cup_f Y$ est un homéomorphisme.*

Démonstration.

(1) Soit B une partie fermée de Y . Pour montrer que $k(B)$ est fermé dans $X \cup_f Y$, il suffit de

montrer que $j^{-1}(k(B))$ est un fermé de X et $k^{-1}(k(B))$ est un fermé de Y . D'après le Lemme 1.4.4, on a $j^{-1}(k(B)) = B$ qui est fermé par hypothèse et $k^{-1}(k(B)) = f^{-1}(B)$ est fermé dans X car f est continue et A fermé dans X .

(2) Il suffit de voir que toute application continue fermée bijective est un homéomorphisme. ■

D'après la proposition ci-dessus, $k(Y)$ est un sous espace fermé de $X \cup_f Y$ et donc on peut voir Y comme un sous espace fermé de l'espace recollement.

Proposition 1.4.6

- (1) $j|_{(X \setminus A)} : X \setminus A \rightarrow X \cup_f Y$ est une application ouverte.
- (2) $j|_{(X \setminus A)} : X \setminus A \rightarrow j(X \setminus A) \subseteq X \cup_f Y$ est un homéomorphisme.

Démonstration.

(1) Soit U un ouvert de $X \setminus A$. Comme A est une partie fermée de X , alors U est un ouvert de X . La nature topologique de $j|_U = j(U)$ dans $X \cup_f Y$ dépend de la nature de $j^{-1}(j(U))$ dans X et de celle de $k^{-1}(j(U))$ dans Y . D'après le Lemme 1.4.4, on a $k^{-1}(j(U)) = f^{-1}(U \cap A) = \emptyset$ ouvert de Y . D'autre part, $j^{-1}(j(U)) = U \cap f^{-1}(f(U \cap A)) = U$ ouvert de X . D'où $j(U)$ est un ouvert de $X \cup_f Y$.

(2) Toute application continue bijective ouverte est un homéomorphisme. ■

D'après ci-dessus, $j(X \setminus A)$ est un sous espace ouvert de $X \cup_f Y$. Donc on peut considérer $X \setminus A$ comme un sous espace ouvert du recollement.

Remarque 1.4.2 On a

- (1) $k(Y)$ est le complémentaire de $j(X \setminus A)$ dans $X \cup_f Y$.
- (2) $\{k(Y), j(X \setminus A)\}$ est une partition de $X \cup_f Y$.

Exercice 1.4.7 Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie fermée de X , et $f : A \rightarrow Y$ une application continue. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

- (1) f est une application fermée.
- (2) $j : X \rightarrow X \cup_f Y$ est une application fermée.
- (3) $q : X \cup Y \rightarrow X \cup_f Y$ est une application fermée.

Chapitre 2

Homotopie et Groupe fondamental

Dans tout le reste de ce cours, on note $I = [0, 1]$. Le théorème suivant sera souvent utilisé par la suite.

Théorème 2.0.8 (Lemme de continuité)

Soient $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ un recouvrement fermé de X , et $f_i : F_i \rightarrow Y$ une application continue, pour tout $1 \leq i \leq n$. Si f_i et f_j coïncident sur $F_i \cap F_j$, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, alors il existe une et une seule application continue $f : X \rightarrow Y$ telle que $f|_{F_i} = f_i$ pour tout i .

Si $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ et $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ sont deux applications. On note par $f_1 \times f_2$ l'application définie de $X_1 \times X_2$ dans $Y_1 \times Y_2$ par

$$(x_1, x_2) \mapsto (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

Proposition 2.0.9 *Si f_1 et f_2 sont continues alors $f_1 \times f_2$ est une application continue.*

2.1 Homotopie des applications continues

Définition 2.1.1 *Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues. On dit que f et g sont homotopes s'il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$, pour tout $x \in X$. On notera alors $f \sim g$, et on dira que H est une homotopie entre f et g .*

Soit A une partie de X . On dit que f et g sont homotopes relativement à A s'il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$, pour tout

$x \in X$, et $H(a, t) = f(a) = g(a)$ pour tout $a \in A$ et $t \in [0, 1]$. On notera $f \sim g$ rel A et on dira que H est une homotopie relative à A entre f et g .

Exemple 2.1.1 Considérons dans \mathbb{R}^2 le cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) : 0 \leq s \leq 1\}$. Soient $f = id_{\mathbb{S}^1}$ et $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ l'application définie par

$$g(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) = (\cos(2\pi s + \frac{\pi}{2}), \sin(2\pi s + \frac{\pi}{2})).$$

Autrement dit, l'application g fait tourner le cercle par un angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Alors l'application

$$\begin{aligned} H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ ((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), t) &\longmapsto (\cos(2\pi s + \frac{\pi}{2}t), \sin(2\pi s + \frac{\pi}{2}t)) \end{aligned}$$

est une homotopie entre $id_{\mathbb{S}^1}$ et g .

Proposition 2.1.1

La relation binaire " \sim " est une relation d'équivalence sur $C(X, Y)$, l'ensemble des applications continues définies de X dans Y .

Démonstration.

(1) La relation " \sim " est réflexive. Pour tout $f \in C(X, Y)$, on a $f \sim f$ par l'homotopie donnée par

$$\begin{aligned} H : X \times I &\longrightarrow Y \\ (x, t) &\longmapsto H(x, t) = f(x) \end{aligned}$$

(2) " \sim " est symétrique. Si $f \sim g$ par une homotopie

$$\begin{aligned} H : X \times I &\longrightarrow Y \\ (x, t) &\longmapsto H(x, t) \end{aligned}$$

alors $g \sim f$ par l'homotopie

$$\begin{aligned} \bar{H} : X \times I &\longrightarrow Y \\ (x, t) &\longmapsto \bar{H}(x, t) = H(x, 1 - t) \end{aligned}$$

(3) Transitivité. Si $f \sim g$ par une homotopie H_1 et $g \sim h$ par une homotopie H_2 , alors $f \sim h$ par l'homotopie composée H_3 donnée par

$$H_3(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H_2(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

■

Définition 2.1.2 *Un espace topologique X est dit contractile si l'application identique id_X est homotope à une application constante de X dans X .*

Exemple 2.1.2

(1) \mathbb{R}^n est un espace contractile. En effet, l'application continue $H : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $H(x, t) = tx$ est une homotopie entre $id_{\mathbb{R}^n}$ et l'application constante $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par $f_0(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(2) Un convexe X dans un espace vectoriel topologique est contractile. Si $x_0 \in X$, alors

$$\begin{aligned} H : X \times I &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longmapsto H(x, t) = (1 - t)x + tx_0 \end{aligned}$$

est une homotopie entre id_X et l'application $f : X \rightarrow X$ définie par $f(x) = x_0$, pour tout $x \in X$.

Définition 2.1.3 *Soient X, Y deux espaces topologiques. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ est dite équivalence d'homotopie s'il existe une application continue $g : Y \rightarrow X$ telle que $f \circ g \sim id_Y$ et $g \circ f \sim id_X$. S'il existe une équivalence d'homotopie entre X et Y , on dit qu'ils ont même type d'homotopie.*

Exemple 2.1.3

Pour $n \geq 1$, l'inclusion naturelle $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ est une équivalence d'homotopie. En effet, prenons l'application $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ définie par $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Alors $r \circ i = id_{\mathbb{S}^{n-1}}$. De plus, l'application $(x, t) \mapsto tx + (1 - t)\frac{x}{\|x\|}$ est une homotopie entre $i \circ r$ et $id_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$.

Deux espaces topologiques homéomorphes ont même type d'homotopie, mais la réciproque est fautive en général comme le montre le contre exemple suivant.

Exemple 2.1.4

Considérons dans \mathbb{R}^2 les sous espaces $X = \mathbb{S}^1$ et $Y = \mathbb{S}^1 \cup ([1, 2] \times \{0\})$. Alors X et Y ont même type d'homotopie mais ne sont pas homéomorphes. En effet, notons x_0 le point de coordonnées $(1, 0)$. Considérons l'inclusion naturelle $i : X \rightarrow Y$ et l'application $g : Y \rightarrow X$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{S}^1, \\ x_0 & \text{si } x \in [1, 2] \times \{0\}. \end{cases}$$

On a $g \circ i = id_X$ et $i \circ g \sim id_Y$ par l'homotopie $H : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ donnée par

$$H(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{S}^1, \\ tx + (1 - t)x_0 & \text{si } x \in [1, 2] \times \{0\}. \end{cases}$$

Cependant, il n'existe pas d'homéomorphisme $f : Y \rightarrow X$ car $X - \{f(x_0)\}$ est connexe alors que $Y - x_0$ ne l'est pas.

Définition 2.1.4 Soient X un espace topologique et A une partie non vide de X . On dit que A est un rétracte de X s'il existe une application continue $r : X \rightarrow A$ telle que $r \circ i = id_A$. Si, de plus, $i \circ r \sim id_X$ on dit que A est un rétracte de X par déformation.

On dit que r est respectivement une rétraction, rétraction par déformation.

Il découle de la définition que si A est un rétracte par déformation de X , alors A et X ont le même type d'homotopie.

2.2 Homotopie des chemins

Soit X un espace topologique et x, y deux points de X .

Définition 2.2.1

Un chemin dans X joignant x à y est une application continue α de $[0, 1]$ dans X telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$. On dit aussi que α est un chemin dans X d'origine x et d'extrémité y .

Notons qu'un chemin est une application continue est non le graphe de α ni son image. On dira que le chemin est contenu dans un sous ensemble A de X si $\alpha([0, 1]) \subset A$.

(1) On appelle chemin constant en x le chemin C_x avec $C_x(t) = x$, pour tout $t \in [0, 1]$.

(2) Soit α un chemin dans X joignant x à y . On appelle chemin inverse de α le chemin $\bar{\alpha}$

joignant y à x défini par $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$.

(3) Soient α, β deux chemins dans X telle que $\alpha(1) = \beta(0)$. On appelle chemin composé (produit) de α et β , et on note $\alpha.\beta$, le chemin donné par

$$(\alpha.\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \beta(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Définition 2.2.2 Soit α, β deux chemins dans X joignant x à y . On dit que α et β sont homotopes (relativement aux extrémités), et on note $\alpha \sim \beta$, si les applications $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ sont homotopes relativement à la partie $\{0, 1\}$ dans $[0, 1]$, .i.e., il existe une application continue $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \alpha(t) \text{ pour tout } t \in [0, 1], \\ H(t, 1) &= \beta(t) \text{ pour tout } t \in [0, 1], \\ H(0, s) &= x \text{ pour tout } s \in [0, 1], \\ H(1, s) &= y \text{ pour tout } s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

On notera $[\alpha]$ la classe d'homotopie du chemin α .

Propriétés 2.2.1 Soient X un espace topologique et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, et ζ des chemins dans X .

- (1) Si $\alpha \sim \beta$, alors $\bar{\alpha} \sim \bar{\beta}$.
- (2) Si $\zeta \sim \alpha$, $\delta \sim \beta$, $\zeta(1) = \delta(0)$ et $\alpha(1) = \beta(0)$, alors $\zeta.\delta \sim \alpha.\beta$.
- (3) Si α est un chemin joignant x à y , β est un chemin joignant y à z , et γ un chemin joignant z à w , alors les chemins $\alpha.(\beta.\gamma)$ et $(\alpha.\beta).\gamma$ sont homotopes.
- (4) Si α est un chemin joignant x à y , alors $C_x.\alpha \sim \alpha$ et $\alpha \sim \alpha.C_y$.
- (5) Si α est un chemin joignant x à y , alors $\bar{\alpha}.\alpha \sim C_y$ et $\alpha.\bar{\alpha} \sim C_x$.

2.3 Groupe fondamental

Soit X un espace topologique et x_0 un point de X . On appelle lacet de X basé en x_0 tout chemin α de X commençant et finissant en x_0 , i.e., $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. l'ensemble des lacets de X basés en x_0 est noté $\mathcal{L}(X, x_0)$. C'est donc un sous ensemble de $C([0, 1], X)$, l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans X . On considérera $\mathcal{L}(X, x_0)$ comme un sous espace topologique de $C([0, 1], X)$.

La composition des chemins restreinte aux lacets basés en x_0 est une loi de composition interne sur $\mathcal{L}(X, x_0)$. La relation " \sim " est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}(X, x_0)$. Une classe

d'équivalence d'un lacet basé en x_0 s'appellera classe d'homotopie et l'ensemble des classes d'homotopies détermine l'ensemble quotient $\mathcal{L}(X, x_0)/\sim$, qu'on notera $\pi_1(X, x_0)$.

La propriété de compatibilité de la relation \sim avec le produit des lacets (voir Propriétés 2.2.1) nous permet d'introduire dans l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ la loi de composition interne induite par celle des chemins en définissant

$$[\alpha].[\beta] = [\alpha.\beta], \forall [\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0).$$

Théorème 2.3.1 *Soit X un espace topologique et x_0 un point de X . $\pi_1(X, x_0)$, muni du produit des classes ci-dessus défini, est un groupe qu'on appelle groupe fondamental d'homotopie de X basé en x_0 . On l'appelle aussi groupe de Poincaré de X basé en x_0 .*

Démonstration. Il suffit d'utiliser les propriétés 2.2.1. La classe $[C_{x_0}]$ est l'élément neutre du groupe. Si $[\alpha]$ est une classe dans $\pi_1(X, x_0)$, alors $[\bar{\alpha}]$ est son inverse pour la loi de $\pi_1(X, x_0)$. ■

2.4 Changement de point base

Le point base du lacet comme nous l'avons constaté joue un rôle primordial dans la définition du groupe. Toutefois, dans des cas bien particuliers on peut omettre le point base. C'est dans ce contexte qu'intervient la propriété suivante.

Théorème 2.4.1 *Soient X un espace topologique, x_0 et y_0 deux points de X . S'il existe un chemin dans X qui lie x_0 et y_0 , alors les groupes fondamentaux $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, y_0)$ sont isomorphes.*

Démonstration.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin joignant x_0 à y_0 . Considérons l'application

$$\Phi_f : \mathcal{L}(X, x_0) \rightarrow \mathcal{L}(X, y_0)$$

définie par $\Phi_f(\alpha) = \bar{f}.\alpha.f$, pour tout lacet α basé en x_0 , où

$$(\bar{f}.\alpha.f)(t) = \begin{cases} \bar{f}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \alpha(4t - 2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ f(4t - 3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

L'application Φ_f est compatible avec la relation d'homotopie. En effet, soit $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ est une homotopie entre deux lacets α_0 et α_1 de $\mathcal{L}(X, x_0)$. Alors l'application $H_1 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ définie par

$$H_1(t, s) = \begin{cases} \bar{f}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H(4t - 2, s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ f(4t - 3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

est une homotopie qui lie les lacets, basés en y_0 , $\bar{f} \cdot \alpha_0 \cdot f$ et $\bar{f} \cdot \alpha_1 \cdot f$. Donc $\Phi_f(\alpha_0) \sim \Phi_f(\alpha_1)$ dans $\mathcal{L}(X, y_0)$.

Donc Φ_f induit une application, notée aussi Φ_f , de $\pi_1(X, x_0)$ dans $\pi_1(X, y_0)$ donnée par $\Phi_f([\alpha]) = [\bar{f} \cdot \alpha \cdot f]$. Montrons que cette dernière application est un isomorphisme de groupes.

On a pour tout $[\alpha_0], [\alpha_1] \in \pi_1(X, x_0)$,

$$\begin{aligned} \Phi_f([\alpha_0] \cdot [\alpha_1]) &= [\bar{f} \cdot \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot f] \\ &= [\bar{f} \cdot \alpha_0 \cdot C_{x_0} \cdot \alpha_1 \cdot f] \\ &= [\bar{f} \cdot \alpha_0 \cdot f \cdot \bar{f} \cdot \alpha_1 \cdot f] \\ &= [\bar{f} \cdot \alpha_0 \cdot f] \cdot [\bar{f} \cdot \alpha_1 \cdot f] \\ &= \Phi_f([\alpha_0]) \cdot \Phi_f([\alpha_1]). \end{aligned}$$

Donc Φ_f est un homomorphisme de groupes. De plus elle est bijective d'inverse $(\Phi_f)^{-1} : \pi_1(X, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ donnée par $(\Phi_f)^{-1}([\beta]) = [f \cdot \beta \cdot \bar{f}]$. ■

Rappelons qu'un espace topologique est connexe par arcs si deux points quelconques peuvent être joints par un chemin dans cet espace.

Corollaire 2.4.2

Si X est un espace connexe par arcs, alors pour tout $x, y \in X$ les groupes fondamentaux $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, y)$ sont isomorphes. On écrit alors $\pi_1(X, x) = \pi_1(X)$.

Définition 2.4.1 *Soit X un espace topologique et $x \in X$. Un lacet α dans X basé en x est dit peut être contracté en x si α est homotope au chemin constant C_x .*

Définition 2.4.2 *Un espace X est dit simplement connexe par rapport à x , si tout lacet dans X basé en x peut être contracté en x . On dit que X est simplement connexe s'il est simplement connexe par rapport à tous ses points.*

Corollaire 2.4.3 *Un espace topologique X connexe par arcs est simplement connexe si et seulement si $\pi_1(X) = \{[C_x]\}$, $\forall x \in X$. On note dans ce cas $\pi_1(X) = \{1\}$.*

On note \mathbb{B}^2 la boule unité fermée de \mathbb{R}^2 .

Exemple 2.4.1

- (1) \mathbb{B}^2 est simplement connexe.
- (2) La sphère \mathbb{S}^n est simplement connexe pour $n \geq 2$.

Proposition 2.4.4 *Soit X espace topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (1) X est simplement connexe.
- (2) Toute application continue $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ se prolonge continuellement à une application $\tilde{f} : \mathbb{B}^2 \rightarrow X$.
- (3) Deux chemins dans X qui ont même origine et même extrémité sont homotopes.

Proposition 2.4.5 *Tout espace contractile est simplement connexe.*

Démonstration. (Exercice). ■

2.5 Applications continues et groupes fondamentaux

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Si α est un lacet dans X basé en x , alors $f \circ \alpha$ est un lacet dans Y basé en $y = f(x)$. On a donc une application

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathcal{L}(X, x) &\longrightarrow \mathcal{L}(Y, y) \\ \alpha &\longmapsto \tilde{f}(\alpha) = f \circ \alpha \end{aligned}$$

Lemme 2.5.1 *L'application \tilde{f} est compatible avec les relations d'homotopies définies sur $\mathcal{L}(X, x)$ et $\mathcal{L}(Y, y)$, i.e., si $\alpha_1 \sim \alpha_2$ alors $\tilde{f}(\alpha_1) \sim \tilde{f}(\alpha_2)$.*

Démonstration. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{L}(X, x)$ telle que $\alpha_1 \sim \alpha_2$. Soit H une homotopie entre α_1 et α_2 , alors $f \circ H$ est une homotopie entre $f \circ \alpha_1$ et $f \circ \alpha_2$ dans $\mathcal{L}(Y, y)$. D'où $[f \circ \alpha_1] = [f \circ \alpha_2]$. ■

Théorème 2.5.2

L'application $f : X \rightarrow Y$ induit un homomorphisme de groupes $f_ : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ défini par $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$.*

Démonstration.

Soient $[\alpha_1], [\alpha_2] \in \pi_1(X, x)$. On a $f_*([\alpha_1] \cdot [\alpha_2]) = f_*([\alpha_1 \cdot \alpha_2]) = [f \circ (\alpha_1 \cdot \alpha_2)]$. Mais $f \circ (\alpha_1 \cdot \alpha_2) = (f \circ \alpha_1) \cdot (f \circ \alpha_2)$ puisque

$$(f \circ (\alpha_1 \cdot \alpha_2))(t) = \begin{cases} f \circ \alpha_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f \circ \alpha_2(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

D'où $f_*([\alpha_1] \cdot [\alpha_2]) = f_*([\alpha_1]) \cdot f_*([\alpha_2])$. ■

Propriétés 2.5.3 Soient $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ deux applications continues, et x, y, z trois points de X, Y et Z , respectivement, avec $f(x) = y$ et $g(y) = z$. Alors

(1) $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x)}$.

(2) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, où $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ et $g_* : \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(Z, z)$.

Il est naturel de se demander sous quelles conditions f_* sera-t-il un isomorphisme.

Lemme 2.5.4 Si f est bijective, alors \tilde{f} est une application bijective.

Démonstration.

Injection. Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{L}(X, x)$ telle que $\tilde{f}(\alpha_1) = \tilde{f}(\alpha_2)$. Alors

$$\begin{aligned} f \circ \alpha_1 = f \circ \alpha_2 &\Leftrightarrow f(\alpha_1(t)) = f(\alpha_2(t)), \forall t \in [0, 1] \\ &\Leftrightarrow \alpha_1(t) = \alpha_2(t), \forall t \in [0, 1] \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2. \end{aligned}$$

D'où \tilde{f} est injective.

Surjection. Soit $\beta \in \mathcal{L}(Y, y)$. Alors

$$(f^{-1} \circ \beta)(0) = f^{-1}(\beta(0)) = f^{-1}(y) = x = (f^{-1} \circ \beta)(1).$$

Donc $f^{-1} \circ \beta$ est un lacet dans X basé en x avec $\tilde{f}(f^{-1} \circ \beta) = \beta$. D'où \tilde{f} est une application surjective. ■

Il est facile de vérifier que si \tilde{f} est surjective, alors l'homomorphisme f_* est surjectif. Néanmoins même si \tilde{f} est bijective on peut pas conclure que f_* est bijectif, il faut donc que \tilde{f} soit bijective doublement compatible. Cette dernière condition sera assuré par la continuité

des applications \tilde{f} et $(\tilde{f})^{-1}$. Le théorème ci-dessous nous garantira la bijection de f_* sous une condition plus faible que l'homéomorphisme.

Proposition 2.5.5 *Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues homotopes. Alors pour tout $x \in X$, il existe un isomorphisme de groupes $\Phi : \pi_1(Y, g(x)) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ telle que le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x)) \\ & \searrow g_* & \uparrow \Phi \\ & & \pi_1(Y, g(x)) \end{array}$$

Si, de plus, f et g sont homotopes relativement $\{x\}$, alors $f_ = g_*$.*

Démonstration.

Soit $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ une homotopie de g à f . Pour $x \in X$, l'application $t \mapsto c(t) = H(x, t)$ est un chemin dans Y d'origine $g(x)$ et d'extrémité $f(x)$. D'après le Théorème 2.4.1, il existe un isomorphisme de groupes $\Phi_c : \pi_1(Y, g(x)) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ défini par $\Phi_c([\alpha]) = [\bar{c}.\alpha.c]$.

Pour établir la commutativité du diagramme, il suffit de montrer que $\bar{c}.(g \circ \beta).c$ est homotope à $f \circ \beta$ pour tout lacet β de X basé en x .

Si f et g sont homotopes relativement $\{x\}$, alors le chemin c choisi est constant. Donc $\Phi_c = id$, ce qui implique que $f_* = g_*$. ■

La proposition précédente nous donne le résultat suivant.

Théorème 2.5.6

Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie, l'homomorphisme induit $f_ : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ est un isomorphisme. En conséquence, si X est contractile alors leur groupe fondamental est trivial, i.e., $\pi_1(X) = \{1\}$.*

Corollaire 2.5.7

Si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors les groupes fondamentaux $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(Y, f(x))$ sont isomorphes.

2.6 Groupe fondamental du cercle \mathbb{S}^1

Le but de cette section est de montrer que le groupe fondamental du cercle est isomorphe au groupe additif \mathbb{Z} . Nous considérons \mathbb{S}^1 comme le cercle unité du plan \mathbb{R}^2 , identifié à \mathbb{C} .

$$\mathbb{S}^1 = \{e^{i2\pi t} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Considérons aussi l'application exponentielle $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ définie par $\exp(t) = e^{i2\pi t}$, et choisissons deux points $m_1 = (1, 0)$ et $m_2 = (-1, 0)$ de \mathbb{S}^1 . Alors l'ensemble \mathbb{S}^1 est recouvert par les ouverts $\Omega_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{m_1\}$ et $\Omega_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{m_2\}$. De plus, on a

$$\begin{aligned}\exp^{-1}(\Omega_1) &= \cup_{n \in \mathbb{Z}}]n - 1, n[, \\ \exp^{-1}(\Omega_2) &= \cup_{n \in \mathbb{Z}}]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[.\end{aligned}$$

Nous avons besoin des propositions suivantes.

Proposition 2.6.1 *Un espace topologique X est connexe si et seulement si toute application continue de X dans un espace discret $D = \{0, 1\}$ est constante.*

Proposition 2.6.2 *(Nombre de Lebesgue d'un recouvrement)*

Soit (X, d) un espace métrique compact muni d'un recouvrement ouvert $(U_i)_i$. Alors pour tout point $x \in X$, il existe $\epsilon \in \mathbb{R}_+^$ telle que toute boule ouverte $B(x, \epsilon)$ est contenue dans un membre de cet recouvrement.*

Lemme 2.6.3 *Pour toute application continue $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ telle que $\alpha(a) = \alpha(b) = m_1$ et tout $k \in \mathbb{R}$ avec $\exp(k) = m_1$, il existe une unique application continue $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\exp \circ \tilde{\alpha} = \alpha \text{ et } \tilde{\alpha}(a) = k.$$

Une telle application $\tilde{\alpha}$ est appelée relèvement de α .

Démonstration.

Notons que $(\alpha^{-1}(\Omega_1), \alpha^{-1}(\Omega_2))$ est un recouvrement ouvert de $[a, b]$. Soit ϵ le nombre de Lebesgue de cet recouvrement. On décompose l'intervalle $[a, b]$ en intervalles d'extrémités les points

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

telles que la longueur de chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, pour $0 \leq i \leq n-1$, soit strictement inférieur à ϵ . On a pour tout i , $\alpha([x_i, x_{i+1}])$ est contenu soit dans Ω_1 soit dans Ω_2 .

Maintenant, on a $\alpha([a, x_1]) \subseteq \Omega_2$ puisque $\alpha(a) = m_1 \notin \Omega_1$. Posons $V_1 =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et définissons $\tilde{\alpha}$ sur l'intervalle $[a, x_1]$ par

$$\tilde{\alpha}(t) = ((\exp|_{V_1})^{-1} \circ \alpha)(t).$$

Supposons avoir construit $\tilde{\alpha} : [a, x_{k-1}] \rightarrow \mathbb{R}$ qui relève α sur cet intervalle. Donc $\alpha([x_{k-1}, x_k]) \subseteq \Omega$ où $\Omega = \Omega_1$ ou bien $\Omega = \Omega_2$. Supposons $\Omega = \Omega_2$. On a donc le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \{x_{k-1}\} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \exp^{-1}(\Omega_2) \\ i \downarrow & & \downarrow \exp \\ [x_{k-1}, x_k] & \xrightarrow{\alpha} & \Omega_2 \end{array}$$

On a

$$\tilde{\alpha}(x_{k-1}) \in V_k =]n_k - \frac{1}{2}, n_k + \frac{1}{2}[\subseteq \exp^{-1}(\Omega_2).$$

Donc l'application $\exp|_{V_k} : V_k \rightarrow \Omega_2$ est un homéomorphisme. On peut donc étendre $\tilde{\alpha}$ de $\{x_{k-1}\}$ à $[x_{k-1}, x_k]$ par la formule

$$\tilde{\alpha}(t) = ((\exp|_{V_k})^{-1} \circ \alpha)(t).$$

La continuité de $\tilde{\alpha}$ est garantie par le lemme de continuité. Cette induction étend la définition de $\tilde{\alpha}$ sur $[a, b]$.

Pour montrer l'unicité de $\tilde{\alpha}$, supposons que $\tilde{\beta}$ est un autre relèvement de α , i.e.,

$$\exp \circ \tilde{\beta} = \alpha \text{ et } \tilde{\beta}(a) = k.$$

Posons $\gamma = \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}$. Comme $\exp \circ \tilde{\beta} = \exp \circ \tilde{\alpha}$, alors l'application

$$\exp \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \{1\}$$

est constante. Mais γ est continue, donc elle prend des valeurs dans \mathbb{Z} , i.e., $\gamma(t) \in \mathbb{Z}$, pour tout $t \in [a, b]$. La connexité de $[a, b]$ nous conduit au fait que γ est constante. Mais $\gamma(a) = \tilde{\alpha}(a) - \tilde{\beta}(a) = 0$. D'où $\gamma(t) = 0$, pour tout $t \in [a, b]$. ■

On a $\exp(\tilde{\alpha}(b)) = \exp(\tilde{\alpha}(a)) = m_1$ implique que $\tilde{\alpha}(b) - \tilde{\alpha}(a) \in \mathbb{Z}$.

Définition 2.6.1

Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ est une application continue telle que $\alpha(a) = \alpha(b)$ et si $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est un relèvement de α , alors le nombre entier $\tilde{\alpha}(b) - \tilde{\alpha}(a)$ est appelé le degré de α et est noté $\deg(\alpha)$.

Lemme 2.6.4 Soit $h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ une application continue et $k \in \mathbb{R}$ telle que $\exp(k) = h(a, 0)$. Alors il existe une unique application continue $\tilde{h} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\exp \circ \tilde{h} = h$ et $\tilde{h}(a, 0) = k$.

Lemme 2.6.5 Deux lacets α_1, α_2 dans \mathbb{S}^1 basés en $m_1 = (1, 0)$ sont homotopes si et seulement si $\deg(\alpha_1) = \deg(\alpha_2)$.

Démonstration.

Supposons que α_1 et α_2 sont homotopes par une homotopie H . Soient $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ des relevés de α_1 et α_2 respectivement telle que $\tilde{\alpha}_1(0) = \tilde{\alpha}_2(0) = 0$. Notons $\tilde{H} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ le relevé de H telle que $\exp \circ \tilde{H} = H$ et $\tilde{H}(0, 0) = 0$. On a

$$\exp(\tilde{H}(0, s)) = H(0, s) = 1 \in \mathbb{C}, \forall s \in [0, 1]$$

et

$$\exp(\tilde{H}(1, s)) = H(1, s) = 1, \forall s \in [0, 1].$$

Donc $\tilde{H}(\{1\} \times [0, 1]) \subseteq \mathbb{Z}$. Comme $\{1\} \times [0, 1]$ est connexe, alors l'application $\tilde{H}(1, \cdot)$ est constante. D'où

$$\deg(\alpha_1) = \tilde{\alpha}_1(1) = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{H}(1, 1) = \tilde{\alpha}_2(1) = \deg(\alpha_2).$$

Inversement, supposons que α_1 et α_2 ont le même degré. Soient $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ les relevés de α_1 et α_2 , respectivement, d'origine 0 dans \mathbb{R} . Donc $\tilde{\alpha}_1(1) = \tilde{\alpha}_2(1)$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \tilde{H} : [0, 1]^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, s) &\longmapsto \tilde{H}(t, s) = (1 - s)\tilde{\alpha}_1(t) + s\tilde{\alpha}_2(t) \end{aligned}$$

\tilde{H} est une homotopie entre $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$. Donc l'application composée $\exp \circ \tilde{H}$ est une homotopie entre α_1 et α_2 . ■

Théorème 2.6.6

L'application

$$\begin{aligned} \deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{Z}, +) \\ [\alpha] &\longmapsto \deg(\alpha) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration.

Le Lemme 2.6.4 assure que \deg est une application bien définie et qu'elle est injective.

Montrons que l'application \deg est surjective. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Le lacet

$$\begin{aligned} \alpha_m : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\longmapsto \alpha_m(t) = e^{2im\pi t} \end{aligned}$$

a comme relèvement l'application $t \mapsto \tilde{\alpha}_m(t) = mt$. Donc $\deg(\alpha_m) = \tilde{\alpha}_m(1) = m$. D'où $\deg([\alpha_m]) = m$.

Il nous reste à montrer que \deg est un homomorphisme. Soient $[\alpha_1], [\alpha_2] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$, et montrons que

$$\deg([\alpha_1] \cdot [\alpha_2]) = \deg(\alpha_1) + \deg(\alpha_2).$$

Soient $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ les relevés de α_1 et α_2 , respectivement, d'origine 0. Alors l'application continue $\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\exp \circ (\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2) = \alpha_1 \alpha_2$ et $(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2)(0) = 0$, i.e., $\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2$ est le relevé de $\alpha_1 \alpha_2$ d'origine 0. Considérons l'application $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{\alpha}_2(2t - 1) + \deg(\alpha_1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Alors $\exp \circ \Phi = \alpha_1 \cdot \alpha_2$ avec $\Phi(0) = 0$. Donc $\widetilde{\alpha_1 \alpha_2} = \Phi$. Il résulte que

$$\deg(\alpha_1 \alpha_2) = (\widetilde{\alpha_1 \alpha_2})(1) = \Phi(1) = \tilde{\alpha}_1(1) + \tilde{\alpha}_2(1) = \deg(\alpha_1) + \deg(\alpha_2).$$

■

Théorème 2.6.7

Soit X un espace topologique connexe par arcs. Si U_1 et U_2 sont deux ouverts simplement connexes telle que $X = U_1 \cup U_2$ et $U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs, alors X est simplement connexe.

Théorème 2.6.8

La sphère \mathbb{S}^n est simplement connexe pour $n \geq 2$.

Démonstration.

Posons

$$U_1 = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} > -\frac{1}{2}\}$$

et

$$U_2 = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} < \frac{1}{2}\}$$

L'ouvert U_1 se retracte par déformation sur $\{N = (0, \dots, 0, 1)\}$, le pôle nord de \mathbb{S}^n , et U_2 sur le pôle sud $\{S = (0, \dots, 0, -1)\}$. Ceci implique que U_1 et U_2 sont contractiles. En effet, on définit l'application

$$\begin{aligned} G_1 : U_1 \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ ((x_1, \dots, x_{n+1}), t) &\longmapsto (tx_1, \dots, tx_{n+1} + (1-t)) \end{aligned}$$

On a alors $G_1((x_1, \dots, x_{n+1}), t) \neq 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$, pour tout $((x_1, \dots, x_{n+1}), t) \in U_1 \times [0, 1]$. L'application

$$\begin{aligned} H_1 : U_1 \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ (x, t) &\longmapsto \frac{G_1(x, t)}{\|G_1(x, t)\|} \end{aligned}$$

est continue. De plus $H_1(x, 0) = N$ et $H_1(x, 1) = id_{U_1}(x)$, pour tout $x \in U_1$.

De la même façon, on définit

$$\begin{aligned} G_2 : U_2 \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ ((x_1, \dots, x_{n+1}), t) &\longmapsto (tx_1, \dots, tx_{n+1} + (t-1)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_2 : U_2 \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ (x, t) &\longmapsto \frac{G_2(x, t)}{\|G_2(x, t)\|} \end{aligned}$$

H_2 est continue avec $H_2(x, 0) = S$ et $H_2(x, 1) = id_{U_2}(x)$, pour tout $x \in U_2$.

De plus $U_1 \cap U_2$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times]0, 1[$ qui est connexe par arcs. Donc, d'après le théorème précédent, \mathbb{S}^n est simplement connexe. ■

Corollaire 2.6.9

Le groupe fondamental de \mathbb{S}^n est trivial pour $n \geq 2$.

2.7 Exercices

Exercice 2.7.1 Soient X, Y, Z trois espaces topologiques.

- (a) Soit $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des équivalences d'homotopies. Montrer que $g \circ f$ est encore une équivalence d'homotopie. En déduire que l'équivalence d'homotopie entre espaces topologiques est une relation d'équivalence.
- (b) Soit $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues homotopes. Vérifier alors que f est une équivalence d'homotopie si g en est une.
- (c) Vérifier que si $f, f' : X \rightarrow Y$ sont homotopes et $g, g' : Y \rightarrow Z$ sont homotopes, alors $g \circ f$ et $g' \circ f'$ sont aussi homotopes.
- (d) Montrer que deux applications définies d'un espace topologique arbitraire dans un espace contractile seront homotopes.

Exercice 2.7.2

- (a) Montrer que $[0, 1]$ est contractile.
- (b) Montrer qu'un espace topologique est contractile si et seulement s'il a le même type d'homotopie qu'un point.
- (c) Montrer que tout espace contractile est connexe par arcs.
- (d) Montrer que tout espace contractile est simplement connexe.

Exercice 2.7.3 Soient X et Y deux espaces topologiques ayant même type d'homotopie. Montrer que l'un est connexe par arcs, alors en est de même pour l'autre.

Exercice 2.7.4 1- Soient X, Y deux espaces topologiques, $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. Montrer que $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ est isomorphe à $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Exercice 2.7.5

Considérons la sphère \mathbb{S}^n dans \mathbb{R}^{n+1} et $x_0 = (0, \dots, 0, 1)$.

- (1) Montrer que \mathbb{R}^n est homéomorphe à $\mathbb{S}^n - \{x_0\}$. En déduire $\pi_1(\mathbb{S}^n - \{x_0\})$.
- (2) Soit y_0 un point de \mathbb{R}^n . Montrer que $\mathbb{R}^n - \{y_0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.
- (3) Déterminer $\pi_1(\mathbb{R}^n - \{y_0\})$.

Chapitre 3

Groupes des tresses

3.1 Générateurs et relations

Dans cette section, on donne la définition du groupe de tresses par générateurs et relations.

Définition 3.1.1 *On appelle groupe de tresses d'Artin B_n , $n \in \mathbb{N}^*$, le groupe engendré par $n - 1$ générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, et les relations entre les générateurs sont :*

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |j - i| \geq 2 \quad (3.1)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ pour } i = 1, \dots, n - 2. \quad (3.2)$$

Les deux relations (3.1) et (3.2) sont appelées relations d'Artin (ou de tresses). par définition on a

- B_1 est un groupe trivial.
- $B_2 = \langle \sigma_1 \rangle$ est un groupe infini cyclique isomorphe au groupe \mathbb{Z} des entiers relatifs. L'ensemble des relations est vide

Exemple 3.1.1

On a $\sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2$. En utilisant les relations d'Artin, on trouve

$$\begin{aligned} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 &= \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \\ &= \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \\ &= \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2. \end{aligned}$$

Soit F un groupe, X un sous-ensemble non vide de F , et $i_X : X \rightarrow F$ l'inclusion canonique.

Définition 3.1.2

On dit que F est libre sur X si pour toute application $f : X \rightarrow G$, où G est un groupe arbitrairement donné, se prolonge à un (unique) homomorphisme de groupes $\bar{f} : F \rightarrow G$ telle que $f = \bar{f} \circ i$; cette dernière égalité exprime la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & F \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & G \end{array}$$

Un groupe qui est libre sur une partie génératrice est dit **groupe libre**

Exemple 3.1.2

Le groupe $(\mathbb{Z}, +)$ est libre sur $\{1\}$. En effet, toute application f de $\{1\}$ dans un groupe quelconque $(G, .)$ se prolonge à un homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \bar{f} : \mathbb{Z} &\longrightarrow G \\ n &\longmapsto \bar{f}(n) = f(1).f(1)...f(1)(n \text{ fois}) \end{aligned}$$

Théorème 3.1.1 Soit G un groupe engendré par n éléments. Alors G est l'image épimorphe d'un groupe libre sur une partie à n éléments.

Remarquons que si $(G, .)$ est un groupe arbitraire et f est un homomorphisme de groupes, alors les éléments $\{s_i = f(\sigma_i) : 1 \leq i \leq n-1\}$ vérifient les relations de tresses. Pour la situation inverse, on a la proposition suivante.

Proposition 3.1.2 (Lemme clé)

Soit $G = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ un groupe donné. Si les éléments $\{s_i : i = 1, \dots, n-1\}$ vérifient les relations de tresses, alors il existe un unique homomorphisme de groupes $f : B_n \rightarrow G$ telle que $s_i = f(\sigma_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Démonstration.

Soit F_n le groupe libre engendré par $\{\sigma_i : 1 \leq i \leq n-1\}$. D'après le Théorème 3.1.1, il existe un unique homomorphisme de groupes $\bar{f} : F_n \rightarrow S_n$ telle que $\bar{f}(\sigma_i) = s_i$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$. Les relations de tresses (3.1) et (3.2) permettront à \bar{f} d'induire un homomorphisme $f : B_n \rightarrow S_n$. f est l'homomorphisme recherché. ■

Soit $G = \mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et considérons, pour chaque i , la transposition $s_i = (i, i + 1)$, où s_i permute i et $i + 1$ et laissant fixe les autres éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Exercice 3.1.3 *Montrer que les transpositions vérifient les relations de tresses.*

Ceci nous permet de définir un homomorphisme de groupes surjectif $\pi : B_n \longrightarrow \mathcal{S}_n$, appelé projection, telle que $\pi(\sigma_i) = s_i$ pour tout $i = 1, \dots, n - 1$.

Proposition 3.1.4 *Le groupe B_n est non commutatif pour $n \geq 3$.*

Démonstration.

Supposons que B_n est commutatif. Alors $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$. Il résulte que

$$s_1s_2 = \pi(\sigma_1).\pi(\sigma_2) = \pi(\sigma_1\sigma_2) = \pi(\sigma_2\sigma_1) = s_2s_1$$

ce qui est impossible. Donc B_n n'est pas abélien pour $n \geq 3$. ■

Pour tout n , on peut définir un homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} i_n : B_n &\longrightarrow B_{n+1} \\ \sigma_i &\longmapsto i_n(\sigma_i) = \sigma_i \end{aligned}$$

appelé inclusion naturelle (ou injection). Donc B_n peut être vu comme un sous groupe de B_{n+1} , et

$$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$$

Exercices

Exercice 3.1.5 *On sait que $B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 / \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle$. Posons $x = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$ et $y = \sigma_1\sigma_2$.*

(1) Montrer que $x^2 = y^3$ et que $B_3 = \langle x, y / x^2 = y^3 \rangle$.

(2) Montrer que $x^2 \in C(B_3)$, le centre de B_3 .

Exercice 3.1.6 *Démontrer les égalités suivantes, en utilisant les relations d'Artin :*

(1) $(\sigma_1\sigma_2)^3 = (\sigma_2\sigma_1)^3$

(2) $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3$

(3) $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4 = (\sigma_3\sigma_2\sigma_1)^4$

Exercice 3.1.7 Démontrer les égalités suivantes, en utilisant les relations d'Artin :

- (1) $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2$.
- (2) $\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}$.
- (3) $\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}$.

Exercice 3.1.8 (1) Montrer que pour tout $n > 1$, le groupe B_n est engendré par les deux éléments σ_1 et $\alpha = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$. (indication : $\sigma_i = \alpha^{i-1} \sigma_1 \alpha^{1-i}$).

(2) Montrer qu'il existe un homomorphisme de groupes $f : B_n \rightarrow \mathbb{Z}$ tel que $f(\sigma_i) = 1$, pour tout $i = 1, \dots, n-1$. Montrer que f induit un isomorphisme de $B_n/[B_n, B_n]$ dans \mathbb{Z} .

3.2 Tresses géométriques

Dans cette section, nous donnons une définition géométrique du groupe des tresses.

Définition 3.2.1 On appelle tresse géométrique à n brins b la réunion de n courbes disjointes dans $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$, appelées brins de b , reliant les points $(1, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)$ aux points $(1, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)$ et coupant en n points chaque plan horizontal $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ avec $t \in [0, 1]$.

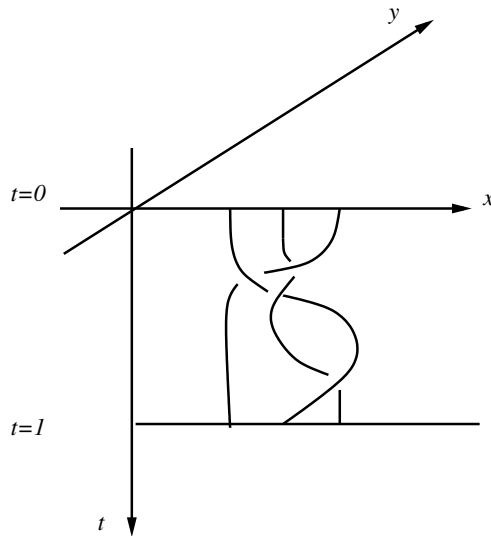


FIG. 3.1 – Tresse géométrique à 3 brins

Définition 3.2.2 Soient b et b' deux tresses géométriques à n brins. On dit qu'ils sont isotopes s'il existe une suite continue de tresses géométriques à n brins b_s ($s \in [0, 1]$) tel que $b_0 = b$ et $b_1 = b'$. D'une manière équivalente, s'il existe une application continue $F : b \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$

telle que, pour tout $s \in [0, 1]$, l'application $F_s : b \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ avec $b \ni x \mapsto F(x, s)$ est un plongement son image est une tresse géométrique à n brins, $F_0 = id$ et $F_1(b) = b'$.

On peut montrer facilement que la relation binaire "être isotope" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des tresses géométriques à n brins.

Définition 3.2.3 *On appelle tresse à n brins une classe d'équivalence de tresses géométriques à n brins vis-à-vis de l'isotopie. Si b est une tresse géométrique, on note sa classe d'équivalence par $[b]$.*

On note par GB_n l'ensemble des tresses à n brins.

Loi de composition sur l'ensemble des tresses

Définition 3.2.4 *Étant donnés deux tresses géométriques b et b' . Le produit (ou la composition) bb' est défini comme étant la tresse géométrique obtenue en plaçant b' au-dessous de b et en comprimant. Plus précisément, bb' est l'ensemble des points $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ telles que $(x, y, 2t) \in b$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $(x, y, 2t - 1) \in b'$ si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.*

Lemme 3.2.1 *Le produit des tresses géométriques est compatible avec la relation d'isotopie, i.e., si b_1 est isotope avec b'_1 et b_2 est isotope avec b'_2 , alors $b_1 b_2$ est isotope avec $b'_1 b'_2$.*

D'après le lemme ci-dessus, le produit des tresses géométriques induit une loi de composition, appelée multiplication des tresses, dans l'ensemble des tresses à n brins donnée par

$$[b].[b'] = [bb'].$$

la multiplication des tresses est associative et admet comme élément neutre la tresse triviale 1_n représenté par la tresse géométrique (voir la Figure 3.2)

$$b = (\{1, 2, \dots, n\} \times \{0\}) \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2 \times [0, 1].$$

Donc $(GB_n, .)$ est un monoïde. On montre plus tard que c'est un groupe isomorphe à B_n .

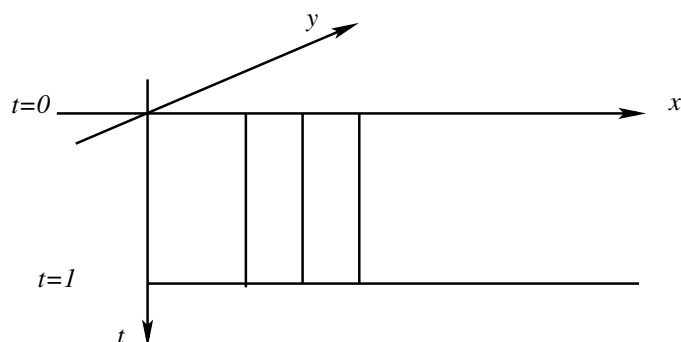


FIG. 3.2 – Tresse géométrique triviale à 3 brins

Diagramme de tresse

Un diagramme de tresse à n brins est un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times [0, 1]$ qui est la réunion de n courbes appelées les brins de \mathcal{D} et qui vérifient les trois conditions suivantes :

1. Chaque brin est homéomorphe à l'image de l'intervalle $[0, 1]$ par la projection $\mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
2. Chaque point de l'ensemble $\{1, \dots, n\} \times \{0, 1\}$ est l'extrémité d'un seul brin.
3. Chaque point de $\mathbb{R} \times [0, 1]$ appartient à au plus deux brins. A chaque point d'intersection de deux brins qu'on appelle "point double ou de croisement", ces brins sont transverses. On indique le brin passant sous l'autre par une légère discontinuité du trait.

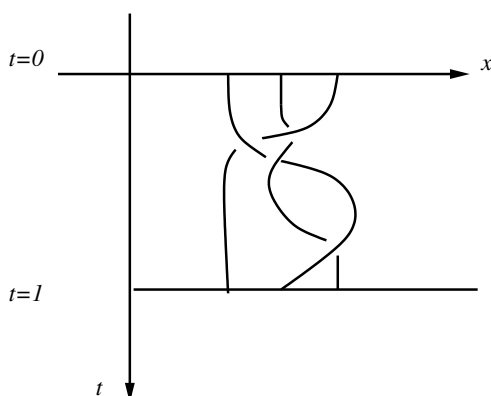


FIG. 3.3 – Un diagramme de tresse à 3 brins.

Remarque 3.2.1

(1) *Trois brins d'un diagramme \mathcal{D} ne se croisent en aucun point.*

(2) Dans la condition (3), la transversabilité signifie que dans un petit voisinage du point de croisement le diagramme \mathcal{D} se voit, à un homéomorphisme près, comme l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.

(3) La compacité des brins implique que le nombre des points de croisement de \mathcal{D} est fini.

Chaque diagramme de tresse \mathcal{D} représente une classe d'isotopie de tresses géométriques comme suit : à chaque diagramme \mathcal{D} on lui associe une tresse $\beta(\mathcal{D})$ en utilisant l'identification $\mathbb{R} \times [0, 1] \subset \mathbb{R} \times \{0\} \times [0, 1]$. On peut supposer

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \{0\} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \times [0, 1].$$

Dans un petit voisinage d'un point double de \mathcal{D} on pousse légèrement le brin dessous dans $\mathbb{R} \times]0, +\infty[\times [0, 1]$ en augmentant la seconde coordonnée et en laissant fixes la première et la troisième. cela transforme \mathcal{D} en une tresse géométrique à n brins. Sa classe d'isotopie est une tresse bien définie présentée par \mathcal{D} . On note $\beta(\mathcal{D})$ la tresse obtenue.

Il est facile de voir que chaque tresse peut être présentée par un diagramme \mathcal{D} (il suffit de prendre la projection sur $\mathbb{R} \times \{0\} \times [0, 1]$).

Définition 3.2.5

On définit l'isotopie et le produit dans l'ensemble des diagrammes de tresses de la même façon que dans le cas des tresses géométriques.

Il est évident que si \mathcal{D} est isotope à \mathcal{D}' alors $\beta(\mathcal{D}) = \beta(\mathcal{D}')$ et $\mathcal{D}\mathcal{D}'$ représente $\beta(\mathcal{D})\beta(\mathcal{D}')$.

Définition 3.2.6

(1) On appelle mouvements de Reidemeister toute transformation de type I, II ou III comme dans la Figure 3.4.

(2) Deux diagrammes de tresses sont dits R-équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements de Reidemeister.

Il est clair que si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont R-équivalents alors $\beta(\mathcal{D}) = \beta(\mathcal{D}')$.

Théorème 3.2.2 Deux diagrammes de tresses représentent deux tresses géométriques isotopes si et seulement s'ils sont R-équivalents.

Démonstration. Pour une preuve détaillée, voir [12]. ■

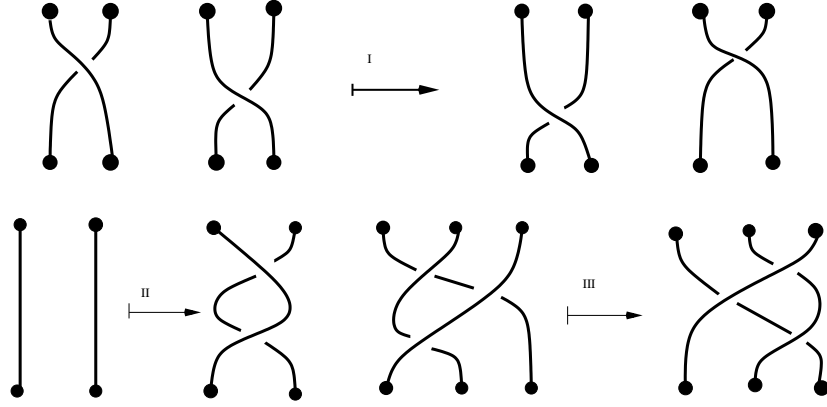


FIG. 3.4 – Mouvements de Reidemeister

Le groupe GB_n

Nous montrons que l'ensemble des tresses GB_n muni de la multiplication définie avant a une structure de groupe. Pour tout $i = 1, \dots, n-1$, nous définissons deux tresses élémentaires σ_i^+ (resp. σ_i^-) où les brins sont tous verticaux sauf pour les brins i et $i+1$ qui se croisent, le brin $i+1$ passant sur (resp. sous) le brin i (voir la Figure 3.5). Alors GB_n est engendré, comme un monoïde, par les tresses $\sigma_1^+, \sigma_1^-, \dots, \sigma_{n-1}^+, \sigma_{n-1}^-$.

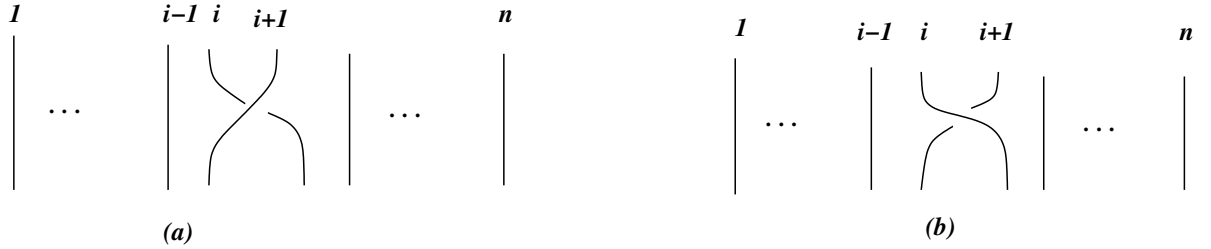


FIG. 3.5 – (a) le générateur σ_i^+ , (b) le générateur σ_i^- .

Lemme 3.2.3 *Toute tresse $\sigma \in GB_n$ admet un élément inverse $\sigma^{-1} \in GB_n$.*

Démonstration. Supposons $\sigma = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$, avec $\epsilon_i = \pm$. Il est clair que $\sigma_i^+ \sigma_i^- = \sigma_i^- \sigma_i^+ = 1$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n-1$. Posons $\sigma^{-1} = \sigma_{i_k}^{-\epsilon_k} \sigma_{i_{k-1}}^{-\epsilon_{k-1}} \dots \sigma_{i_1}^{-\epsilon_1}$. Alors $\sigma \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \sigma = 1_n$ (avec la convention $-+ = - = +-$ et $-- = +$). ■

Corollaire 3.2.4 *GB_n a une structure de groupe.*

Lemme 3.2.5 *Les générateurs $\sigma_1^+, \sigma_2^+, \dots, \sigma_{n-1}^+$ vérifient les relations de tresses.*

Démonstration.

La première relation se découle du mouvement (I). La deuxième relation se découle de (III) (puisque deux diagrammes isotopes représentent la même tresse). ■

Théorème 3.2.6 *Il existe un unique homomorphisme de groupes $\varphi : B_n \rightarrow GB_n$ telle que $\varphi(\sigma_i) = \sigma_i^+$, pour tout $i = 1, \dots, n-1$. De plus φ est un isomorphisme.*

Démonstration.

L'existence et l'unicité de φ sont garantie par le Lemme 3.2.5 et la Proposition 3.1.2. De plus φ est surjectif car $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{n-1}^+$ engendrent GB_n et ils sont dans l'image de φ . Il nous reste donc que de montrer que φ est injectif. Pour ce faire, on définit une application $\psi : GB_n \rightarrow B$ telle que $\psi \circ \varphi = id_{B_n}$.

Chaque $\sigma \in GB_n$ peut être représenté par un diagramme de tresse \mathcal{D} dont les croisements ont des coordonnées seconde distinctes et

$$\sigma = \sigma(\mathcal{D}) = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k},$$

où ϵ_j égale $+$ ou $-$ et $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. On définit

$$\psi(\sigma) = \psi(\mathcal{D}) = (\sigma_{i_1})^{\epsilon_1} (\sigma_{i_2})^{\epsilon_2} \dots (\sigma_{i_k})^{\epsilon_k},$$

où

$$(\sigma_i)^+ = \sigma_i \text{ et } (\sigma_i)^- = \sigma_i^{-1}.$$

L'application ψ est correctement définie et, par construction, vérifie $\psi \circ \varphi = id_{B_n}$. ■

Groupe de tresses pures

Rappelons qu'on a défini, dans la première section, un homomorphisme de groupes π de B_n dans le groupe symétrique \mathcal{S}_n .

Définition 3.2.7

On appelle groupe de tresses pures le noyau de la projection naturelle $\pi : B_n \rightarrow \mathcal{S}_n$. On note ce groupe par P_n et un élément de P_n sera appelé tresse pure à n brins. Donc $P_n = \ker(\pi : B_n \rightarrow \mathcal{S}_n)$.

D'après la définition, une tresse géométrique à n brins représente un élément de P_n si et seulement si, pour tout $i = 1, \dots, n$, le brin de cette tresse attaché au point $(i, 0, 0)$ a comme extrémité le point $(i, 0, 1)$.

Pour tout $1 \leq i < j \leq n$, on définit la tresse pure à n brins $A_{i,j}$, voir la Figure 3.6, par la formule

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}.$$

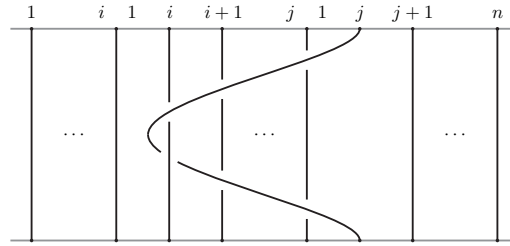


FIG. 3.6 – La tresse $A_{i,j}$.

Théorème 3.2.7

Le groupe P_n est engendré par $\frac{n(n-1)}{2}$ générateurs $\{A_{i,j} : 1 \leq i < j \leq n\}$. Les relations entre ces générateurs sont

$$A_{r,s}^{-1}A_{i,j}A_{r,s} = \begin{cases} A_{i,j} & \text{si } r < s < i < j \text{ ou } i < r < s < j, \\ A_{r,j}A_{i,j}A_{r,j}^{-1} & \text{si } s = i, \\ A_{i,j}A_{s,j}A_{i,j}A_{s,j}^{-1}A_{i,j}^{-1} & \text{si } r = i < s < j, \\ A_{r,j}A_{s,j}A_{r,j}^{-1}A_{s,j}^{-1}A_{i,j}A_{s,j}A_{r,j}A_{s,j}^{-1}A_{r,j}^{-1} & \text{si } r < i < s < j. \end{cases}$$

Théorème 3.2.8

Pour $n \geq 3$, $C(B_n) = C(P_n)$, le centre de B_n , est un groupe infini cyclique engendré par Δ_n^2 , où

$$\Delta_n = (\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1})(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-2})\dots(\sigma_1\sigma_2)\sigma_1.$$

3.3 Espaces des configurations

Dans cette section, on donne la définition d'une tresse comme mouvements des points dans une variété. Soit M un espace topologique et

$$M^n = M \times M \times \dots \times M$$

l'espace produit de $n \geq 1$ copies de M muni de la topologie produit. On pose

$$\mathcal{F}_n(M) = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in M^n \mid u_i \neq u_j \text{ pour tout } i \neq j\}.$$

Cet sous espace de M^n est appelé l'**espace de configuration** de n -uplets ordonnés de n points distincts de M .

Soit M une variété connexe de dimension $\dim(M) \geq 2$ éventuellement à bord.

Définition 3.3.1 On appelle **groupe de tresses pures** à n brins de M le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{F}_n(M))$.

Si on prend $M = \mathbb{R}^2$ on obtient le groupe de tresses pure P_n .

Théorème 3.3.1 $P_n = \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2))$.

Démonstration.

Définissons une application Φ de l'ensemble des tresses géométriques pures dans l'ensemble des lacets de $\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$ basé en $q_n = ((1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0))$ comme suit : à chaque tresse géométrique pure $b \subset \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ on associe le chemin (lacet) $\alpha : I = [0, 1] \longrightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$ défini par $\alpha(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ où le i^{em} brin de b intersecte le plan $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ au point $(u_i(t), t)$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Ce chemin a comme origine et extrémité le point $q_n = ((1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0))$. Posons $\Phi(b) = \alpha$.

L'application Φ est bijective d'inverse l'application Ψ définie comme suit : de tout lacet $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : I = [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$ basé en q_n , on associe la tresse géométrique pure

$$b = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{t \in I} (\alpha_i(t), t).$$

L'application Φ est bi-compatible avec la relation d'équivalence d'isotopie définie sur l'ensemble des tresses géométriques pures et d'homotopie définie sur l'ensemble des lacets de $\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$ basé

en $q_n = ((1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0))$; donc b et b' sont isotopes si et seulement si $\Phi(b) = \alpha$ et $\Phi(b') = \alpha'$ sont homotopes. D'où P_n est isomorphe à $\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2), q_n)$. ■

Fixons un ensemble fini de points Q_m dans l'intérieur de M , avec $m \in \mathbb{N}$. Posons

$$\mathcal{F}_{m,n}(M) = \mathcal{F}_n(M - Q_m).$$

Il est clair que $\mathcal{F}_{0,n}(M) = \mathcal{F}_n(M)$ et $\mathcal{F}_{m,1}(M) = M - Q_m$.

Le groupe symétrique \mathcal{S}_n agit sur $\mathcal{F}_{m,n}(M)$ par permutation des coordonnées, i.e.,

$$\forall x, y \in \mathcal{F}_{m,n}(M), xRy \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathcal{S}_n : x = \mu(y).$$

L'espace quotient

$$\mathcal{C}_{m,n}(M) = \mathcal{F}_{m,n}(M)/\mathcal{S}_n = \mathcal{F}_{m,n}(M)/R$$

est appelé l'**espace de configuration** de n -uplets non-ordonnés de n points distincts de $M - Q_m$.

Définition 3.3.2

On appelle groupe de tresses de $M - Q_m$ à n brins le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{C}_{m,n}(M))$.

Théorème 3.3.2

Le groupe GB_n est isomorphe à $\pi_1(\mathcal{C}_{0,n}(\mathbb{R}^2), q)$ où q est le point de $\mathcal{C}_{0,n}(\mathbb{R}^2)$ représenté par l'ensemble $\{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$.

Démonstration. L'isomorphisme est défini comme suit : à chaque tresse géométrique b on associe le lacet $\alpha_b : I \longrightarrow \mathcal{C}_{0,n}(\mathbb{R}^2)$ défini par $\alpha_b(t) = b_t$ où $b_t \times \{t\} = b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{t\})$. ■

3.4 Automorphismes de tresses de groupe libre

Nous donnons la définition du groupe de tresses comme groupe d'automorphismes d'un groupe libre sur n générateurs. Soit F_n un groupe libre sur x_1, x_2, \dots, x_n .

Définition 3.4.1

On dit qu'un automorphisme φ de F_n est un automorphisme de tresses s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- (i) Il existe une permutation μ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que $\varphi(x_k)$ est conjugué dans F_n à $x_{\mu(k)}$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- (ii) $\varphi(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$.

On note l'ensemble des automorphismes de tresses de F_n par \tilde{B}_n . Remarquons qu'un automorphisme de F_n est totalement déterminé par son action sur les générateurs x_1, x_2, \dots, x_n . D'après la définition, il est facile de vérifier que l'inverse d'un automorphisme de tresses et la composition des automorphismes de tresses sont aussi des automorphismes de tresses. D'où on a le théorème suivant.

Théorème 3.4.1 *L'ensemble \tilde{B}_n muni de la composition des applications, notée multiplicativement, $\varphi\psi = \varphi \circ \psi$ pour tout $\varphi, \psi \in \tilde{B}_n$, a une structure de groupe.*

Exemple 3.4.1

Pour tout $i = 1, 2, \dots, n-1$, les deux automorphismes de F_n suivants

$$\tilde{\sigma}_i(x_k) = \begin{cases} x_{k+1} & \text{si } k = i, \\ x_k^{-1} x_{k-1} x_k & \text{si } k = i+1, \\ x_k & \text{sinon.} \end{cases} \quad ; \quad \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) = \begin{cases} x_k x_{k+1} x_k^{-1} & \text{si } k = i, \\ x_{k-1} & \text{si } k = i+1, \\ x_k & \text{sinon.} \end{cases}$$

sont des automorphismes de tresses de F_n .

Démonstration.

• $k = i$:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i \circ \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) &= \tilde{\sigma}_i(\tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k)) = \tilde{\sigma}_i(x_k x_{k+1} x_k^{-1}) = \tilde{\sigma}_i(x_k) \tilde{\sigma}_i(x_{k+1}) [\tilde{\sigma}_i(x_k)]^{-1}. \\ &= x_{k+1} x_{k+1}^{-1} x_k x_{k+1} x_{k+1}^{-1} = x_k. \\ \tilde{\sigma}_i^{-1} \circ \tilde{\sigma}_i(x_k) &= \tilde{\sigma}_i^{-1}(\tilde{\sigma}_i(x_k)) = \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_{k+1}) = x_k. \end{aligned}$$

• $k = i+1$:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i \circ \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) &= \tilde{\sigma}_i(\tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k)) = \tilde{\sigma}_i(x_{k+1}) = x_k. \\ \tilde{\sigma}_i^{-1} \circ \tilde{\sigma}_i(x_k) &= \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k^{-1} x_{k-1} x_k) = [\tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k)]^{-1} \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_{k-1}) \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k). \\ &= x_{k-1}^{-1} x_{k-1} x_k x_{k-1}^{-1} x_{k-1} = x_k. \end{aligned}$$

• $k \neq i, k \neq i + 1$:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_i \circ \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) &= \tilde{\sigma}_i(\tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k)) = \tilde{\sigma}_i(x_k) = x_k. \\ \tilde{\sigma}_i^{-1} \circ \tilde{\sigma}_i &= \tilde{\sigma}_i^{-1}(\tilde{\sigma}_i(x_k)) = \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) = x_k.\end{aligned}$$

■

Rappelons la définition suivante.

Définition 3.4.2

Soient X, B deux espaces topologiques, et $P : X \rightarrow B$ une application continue. On dit que P est un fibré localement trivial de fibre F si pour tout $y \in B$, il existe un voisinage V de y , et un homéomorphisme $h : V \times F \rightarrow P^{-1}(V)$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V \times F & \xrightarrow{h} & P^{-1}(V) \\ & \searrow pr_1 & \downarrow P \\ & & V \end{array}$$

Il est clair que F est homéomorphe à $P^{-1}(b)$, pour tout $b \in B$.

Théorème 3.4.2

Soit M une variété connexe de dimension $\dim(M) \geq 2$ éventuellement à bord. L'application $P : \mathcal{F}_{m,n}(M) \longrightarrow \mathcal{F}_{m,r}(M)$ définie par $P(u_1, u_2, \dots, u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ où $1 \leq r < n$, est un fibré localement trivial de fibre $\mathcal{F}_{m+n-r,n-r}(M)$.

Démonstration.

Fixons un point base $u^0 = (u_1^0, \dots, u_r^0)$ dans $\mathcal{F}_{m,r}(M)$, et considérons la fibre $P^{-1}(u^0) = \{(u_1^0, \dots, u_r^0, y_{r+1}, \dots, y_n) \in \mathcal{F}_{m,n}(M) /$

$$u_1^0, \dots, u_r^0, y_{r+1}, \dots, y_n \text{ sont distincts et dans } M - Q_m\}.$$

Choisissons Q_{m+r} égale à $Q_m \cup \{u_1^0, \dots, u_r^0\}$ alors, on obtient

$$\mathcal{F}_{m+r,n-r}(M) = \{(y_{r+1}, \dots, y_n) / y_{r+1}, \dots, y_n \text{ sont distincts et dans } M - Q_{m+r}\}.$$

Donc il existe un homéomorphisme

$$h : \mathcal{F}_{m+r,n-r}(M) \longrightarrow P^{-1}(u_1^0, \dots, u_r^0)$$

défini par

$$h(y_{r+1}, \dots, y_n) = (u_1^0, \dots, u_r^0, y_{r+1}, \dots, y_n).$$

Nous donnons la preuve de la trivialisation locale de P seulement dans le cas $r = 1$ (pour les autres cas voir [12]). Fixons un point $x_0 \in M - Q_m = \mathcal{F}_{m,1}(M) = \mathcal{F}_{m,r}(M)$. Ajoutons un autre point q_{m+1} à l'ensemble Q_m pour former Q_{m+1} . Prenons un homéomorphisme $f : M \longrightarrow M$ qui fixe Q_m comme ensemble (i.e., $f(Q_m) = Q_m$), telle que $f(q_{m+1}) = x_0$. Soit U un voisinage de x_0 dans $M - Q_m$ homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^{\dim(M)}$ et soit \bar{U} la fermeture de U . Définissons une application continue $\theta : U \times \bar{U} \longrightarrow \bar{U}$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $\theta_u : \bar{U} \longrightarrow \bar{U}$ définie par $\theta_u(y) = \theta(u, y)$ est un homéomorphisme qui fixe le bord $\partial\bar{U}$ point par point.

(ii) $\theta_u(u) = x_0$.

Selon (i), l'application θ se prolonge à une application, notée aussi $\theta : U \times M \longrightarrow M$, définie par

$$\theta(u, y) = \begin{cases} \theta(u, y) & \text{si } (u, y) \in U \times U \\ y & \text{si } (u, y) \in U \times (M - U). \end{cases}$$

L'homéomorphisme recherché $\varphi : U \times \mathcal{F}_{m+1,n-1}(M) \rightarrow P^{-1}(U)$ est donné par

$$\varphi(u, u_2, \dots, u_n) = (u, \theta_u^{-1}(f(u_2)), \dots, \theta_u^{-1}(f(u_n))).$$

On a donc $P \circ \varphi = Pr_1$. L'homéomorphisme inverse φ^{-1} est donné par :

$$\varphi^{-1}(u, u_2, \dots, u_n) = (u, f^{-1}(\theta_u(u_2)), \dots, f^{-1}(\theta_u(u_n))).$$

■

Définition 3.4.3

On appelle **homomorphisme oubliant** toute application $f_n : P_n \longrightarrow P_{n-1}$, pour $n \geq 2$, définie comme suit : à chaque élément de P_n représenté par une tresse géométrique b , où le i^{me} brin de b relie $(i, 0, 0)$ à $(i, 0, 1)$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, on associe la tresse $f_n(b)$ à $n - 1$ brins obtenue à partir de b en oubliant le $n^{\text{ième}}$ brin.

L'application f_n est bien définie puisque si b et b' sont deux tresses géométriques isotopes, alors $f_n(b)$ et $f_n(b')$ sont aussi isotopes.

Proposition 3.4.3

- (1) f_n est un homomorphisme de groupes surjectif.
(2) $f_n \circ i = id_{P_{n-1}}$ où i est l'inclusion naturelle $i : P_n \longrightarrow P_{n-1}$.

Pour $n \geq 2$, on pose

$$U_n = \ker(f_n : P_n \longrightarrow P_{n-1}).$$

Notons que f_n a une section alors, on a le resultat suivant.

Proposition 3.4.4 P_n est isomorphe au produit semi-direct de P_{n-1} par U_n .

Chaque tresse pure $\beta \in P_n$ peut être développer uniquement sous la forme $\beta = i(\beta')\beta_n$ avec $\beta' \in P_{n-1}$ et $\beta_n \in U_n$. Ici $\beta' = f_n(\beta)$ et $\beta_n = i(\beta')^{-1}\beta$. En appliquant ce développement inductivement, on conclut que β peut être écrite d'une manière unique sous la forme

$$\beta = \beta_2\beta_3\beta_4\ldots\beta_n \tag{3.3}$$

où $\beta_j \in U_j \subset P_j \subset P_n$ pour $j = 2, 3, \dots, n$. L'écriture (3.3) est appelée la forme *normale* de β . Rappelons que, pour $1 \leq i < j \leq n$,

$$A_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\ldots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\ldots\sigma_{j-1}^{-1}.$$

Alors $A_{i,n} \in U_n$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Définition 3.4.4 Une variété connexe M est asphérique si son revêtement universel est contractile.

D'une façon équivalente, une variété connexe M est asphérique si ses groupes d'homotopies $\pi_i(M)$ sont triviaux pour tout $i \geq 2$.

Proposition 3.4.5

Pour tout $m \geq 0$; $n \geq 1$ la variété $\mathcal{F}_{m,n}(\mathbb{R}^2)$ est asphérique.

Démonstration.

On considère le fibré $\mathcal{F}_{m,n}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{F}_{m,1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 - Q_m$ de fibre $\mathcal{F}_{m+1,n-1}(\mathbb{R}^2)$ défini, ci-dessus,

dans la preuve du Théorème 3.4.2. La chaîne d'homotopie de ce fibré nous donne une chaîne exacte

$$\dots \longrightarrow \pi_{i+1}(\mathbb{R}^2 - Q_m) \longrightarrow \pi_i(\mathcal{F}_{m+1,n-1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_i(\mathcal{F}_{m,n}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_i(\mathbb{R}^2 - Q_m) \longrightarrow \dots$$

Notons que $\mathbb{R}^2 - Q_m$ se rétracte par déformation à un bouquet de m cercles. Ce bouquet de cercles est asphérique puisque son revêtement universel est un arbre et par conséquent il est contractile. Donc, $\mathbb{R}^2 - Q_m$ est asphérique. Il résulte que le groupe $\pi_i(\mathbb{R}^2 - Q_m)$ est trivial pour $i \geq 2$. On conclut que pour tout $i \geq 2$,

$$\pi_i(\mathcal{F}_{m,n}(\mathbb{R}^2)) \cong \pi_i(\mathcal{F}_{m+1,n-1}(\mathbb{R}^2)).$$

Par induction, on obtient

$$\pi_i(\mathcal{F}_{m,n}(\mathbb{R}^2)) \cong \pi_i(\mathcal{F}_{m+n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \cong \pi_i(\mathbb{R}^2 - Q_{m+n-1}) = \{1\}.$$

■

Théorème 3.4.6

Pour tout $n \geq 2$, le groupe U_n est libre sur les $(n-1)$ générateurs $\{A_{i,n}\}_{i=1,\dots,n-1}$.

Démonstration.

En prenant $M = \mathbb{R}^2$ dans le Théorème 3.4.2, on obtient le fibré localement trivial $P : \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{R}^2)$ de fibre $\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)$. Les groupes $\pi_2(\mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{R}^2))$ et $\pi_0(\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2))$ sont triviaux d'après la Proposition 3.4.5 et le fait que $\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)$ est une variété connexe. Ceci nous donne une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{P_*} \pi_1(\mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow 1 \quad (3.4)$$

Puisque $\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2))$ est isomorphe à P_n et $\pi_1(\mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{R}^2))$ est isomorphe à P_{n-1} , alors on identifie l'homomorphisme P_* avec l'homomorphisme oubliant $f_n : P_n \longrightarrow P_{n-1}$. Donc (3.4) deviendra

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \longrightarrow 1 \quad (3.5)$$

Pour calculer le groupe $\pi_1(\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) = \pi_1(\mathbb{R}^2 - Q_{n-1})$, on prend

$$Q_{n-1} = \{(1, 0), (2, 0), \dots, (n-1, 0)\} \subset \mathbb{R}^2,$$

et on prend $a_0 = (n, 0)$ comme point base de $\mathbb{R}^2 - Q_{n-1}$. Le groupe $\pi_1(\mathbb{R}^2 - Q_{n-1}, a_0)$ est libre de rang $n-1$ engendré par des générateurs x_1, \dots, x_{n-1} .

L'homomorphisme $\pi_1(\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow P_n = \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2))$ dans (3.5) est induit par l'inclusion

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 - Q_{n-1} = \mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2) &\hookrightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2) \\ a \in \mathbb{R}^2 - Q_{n-1} &\longmapsto ((1, 0), (2, 0), \dots, (n-1, 0), a) \end{aligned}$$

Cet homomorphisme envoie x_i sur $A_{i,n}$ pour tout i . Finalement, la suite exacte (3.5) implique que U_n est libre sur $\{A_{i,n}\}_{i=1, \dots, n-1}$. ■

Corollaire 3.4.7

Pour $i = 1, 2, \dots, n$, l'enlèvement du $i^{\text{ème}}$ brin définit un homomorphisme de groupes $f_n^i : P_n \longrightarrow P_{n-1}$. Le noyau de f_n^i est un groupe libre de rang $n-1$ engendré par les générateurs $A_{1,i}, \dots, A_{i-1,i}, A_{i,i+1}, \dots$.

Théorème 3.4.8

L'application $\xi : B_n \longrightarrow \tilde{B}_n$ définie par $\xi(\sigma_i) = \tilde{\sigma}_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$ est un isomorphisme de groupes.

Démonstration.

Soit $\beta \in B_n$. On note par $\tilde{\beta}$ l'image de la tresse β par l'application ξ . Les éléments $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1} \in \tilde{B}_n$ vérifient les relations de tresses, donc il existe un homomorphisme de groupes de B_n dans \tilde{B}_n qui envoie σ_i sur $\tilde{\sigma}_i$ pour tout i . On va donner une autre définition pour cet homomorphisme : Si $\beta \in B_n$ et $u \in U_{n+1} = \ker f_{n+1}$, alors $i(\beta)$ et $i(\beta)^{-1} \in P_{n+1}$ car P_{n+1} est un sous-groupe normal de B_{n+1} . De plus, d'après la définition de f_{n+1} il résulte que $i(\beta)u i(\beta)^{-1} \in U_{n+1}$; par suite la formule

$$u \longmapsto i(\beta)u i(\beta)^{-1}$$

définit un automorphisme de U_{n+1} . On obtient donc un homomorphisme de groupes ξ de B_n dans le groupe, $\text{Aut}(U_{n+1})$, des automorphismes de U_{n+1} .

D'après le Théorème 3.4.6, on peut identifier U_{n+1} avec F_n en posant $x_k = A_{k,n+1} \in U_{n+1}$ pour $k = 1, 2, \dots, n$. Sous cette identification on a $\xi(\beta) = \tilde{\beta}$ pour tout $\beta \in B_n$. En effet, il suffit

de vérifier cette égalité sur les générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ de B_n . Ceci revient à la vérification des égalités

$$i(\sigma_i)A_{k,n+1}i(\sigma_i)^{-1} = \begin{cases} A_{k+1,n+1} & \text{si } k = i, \\ A_{k,n+1}^{-1}A_{k-1,n+1}A_{k,n+1} & \text{si } k = i + 1, \\ A_{k,n+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces égalités sont vérifiées en dessinant leurs diagrammes de tresses et de vérifier que ces deux diagrammes représentent des tresses isotopes.

Montrons l'injection de l'homomorphisme $\xi : B_n \longrightarrow \tilde{B}_n$. Considérons une tresse $\beta \in B_n$ telle que $\tilde{\beta} = 1$; en abélianisant $\tilde{\beta}$ on obtient l'homomorphisme identique de $U_{n+1}/[U_{n+1}, U_{n+1}]$. Donc $\pi(\beta) = 1$. Ainsi $\beta \in P_n \subset B_n$. D'après la formule normale, on a $\beta = \beta_2\beta_3\dots\beta_n$ telle que $\beta_j \in U_j \subset P_j \subset P_n$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$.

Supposons $\beta \neq 1$. Prenons le plus grand $i \leq n$ telle que $\beta_i \neq 1$. Alors $\beta = \beta_2\beta_3\dots\beta_i$. Comme $\tilde{\beta} = 1$, on doit avoir $\xi(\beta) = 1$. Donc $i(\beta) \in P_{n+1}$ commute avec tous les éléments de U_{n+1} et en particulier avec $A_{i,n+1}$. Notons que $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{i-1}$ sont des tresses sur les $i - 1$ brins extrêmement gauches. Donc ils commutent avec $A_{i,n+1}$. D'après le corollaire précédent, les tresses $A_{1,i}, \dots, A_{i-1,i}, A_{i,i+1}, \dots, A_{i,n+1}$ engendrent un sous-groupe libre de P_{n+1} . De plus, on sait que la tresse β_i commute avec $A_{i,n+1}$ et elle est dans le groupe $U_i \subset P_i \subset P_{n+1}$ qui est engendré par $A_{1,i}, \dots, A_{i-1,i}$. Mais ceci est possible que si $\beta_i = 1$, ce qui est contradictoire avec le choix de i . Donc $\beta = 1$.

Montrons maintenant que $\xi : B_n \longrightarrow \tilde{B}_n$ est surjectif. Soit φ un automorphisme de tresses de F_n non-trivial. Supposons que

$$\varphi(x_k) = A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1},$$

où $k = 1, 2, \dots, n$ et A_k est un mot dans l'alphabet $x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}$. On peut toujours choisir A_k de sorte que le produit $A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}$ soit un mot réduit, i.e., ne contient pas des mots de la forme $x_r x_r^{-1}$ ou $x_r^{-1} x_r$. D'après la définition de l'automorphisme de tresses, on a

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 x_2 \dots x_n) &= \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) \\ &= A_1 x_{\mu(1)} A_1^{-1} A_2 x_{\mu(2)} A_2^{-1} \dots A_n x_{\mu(n)} A_n^{-1} \\ &= x_1 x_2 \dots x_n. \end{aligned}$$

Il résulte que

$$A_1 x_{\mu(1)} A_1^{-1} A_2 x_{\mu(2)} A_2^{-1} \dots A_n x_{\mu(n)} A_n^{-1} = x_1 x_2 \dots x_n. \quad (3.6)$$

On appelle terme special le terme $x_{\mu(k)}$ qui apparaît au milieu de $A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}$. Chaque lettre x_1, x_2, \dots, x_n n'apparaîtra comme terme special du côté gauche de (3.6) qu'une seule fois. L'égalité (3.6) implique que le côté droit est obtenu à partir du côté gauche après un certain nombre de simplifications, i.e., simplification de type $x_r x_r^{-1} = x_r^{-1} x_r = 1$. Supposons qu'un terme special $x_{\mu(k)}$ est simplifié avec une lettre $x_{\mu(k)}^{-1}$ pendant ces réductions; ce terme $x_{\mu(k)}^{-1}$ ne peut pas être obtenu du mot $A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}$ lequel supposé réduit. Si $x_{\mu(k)}^{-1}$ vient de A_{k-1}^{-1} , alors on doit avoir

$$A_{k-1}^{-1} = B x_{\mu(k)}^{-1} A_k^{-1}$$

pour un certain mot B . Par suite

$$A_{k-1} = A_k x_{\mu(k)} B^{-1}. \quad (3.7)$$

Si la lettre $x_{\mu(k)}^{-1}$ qui annule le terme special $x_{\mu(k)}$ est obtenu du côté droit du terme special $x_{\mu(k+1)}$. Alors on doit avoir

$$A_{k+1}^{-1} = A_{\mu(k+1)}^{-1} A_{k+1}^{-1} A_k x_{\mu(k)}^{-1} B,$$

pour un certain mot B ; puis $A_k = A_{k+1} x_{\mu(k+1)} A_{k+1}^{-1} B^{-1} x_{\mu(k)}$. On pose $A = A_{k+1}^{-1} B^{-1} x_{\mu(k)}$, alors on aura

$$A_k = A_{k+1} x_{\mu(k+1)} A. \quad (3.8)$$

De même, si $x_{\mu(k)}^{-1}$ vient de A_{k+1} . On obtient

$$A_{k+1} = A_k x_{\mu(k)}^{-1} A, \quad (3.9)$$

pour un certain mot A . Si $x_{\mu(k)}^{-1}$ vient du côté gauche du terme special $x_{\mu(k-1)}$. Alors

$$A_{k-1} = B x_{\mu(k)}^{-1} A_k^{-1} A_{k-1} x_{\mu(k-1)}^{-1};$$

où B est un mot. Donc $A_k = A_{k-1} x_{\mu(k-1)}^{-1} A_{k-1}^{-1} B x_{\mu(k)}^{-1}$. Posons $A = A_{k-1}^{-1} B x_{\mu(k)}^{-1}$. D'où

$$A_k = A_{k-1} x_{\mu(k-1)}^{-1} A. \quad (3.10)$$

Si les termes spéciaux du côté gauche de (3.6) ne se simplifient pas avec d'autres lettres. Alors, on doit avoir $\mu(k) = k$ pour tout k , A_1 et A_n sont des mots vides et chaque paire $A_k^{-1}A_{k+1}$ se simplifie de sorte que $A_k = A_{k+1}$ pour tout k . Donc $\varphi = id$, ce qui est impossible.

D'après ce qui précède, il existe $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et un mot A (peut être vide) dans $x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}$ satisfaisant l'une des deux conditions suivantes :

(a) On a une égalité des mots $A_j = A_{j+1}x_{\mu(j+1)}A$.

(b) On a une égalité des mots $A_{j+1} = A_jx_{\mu(j)}^{-1}A$.

Remarquons que

$$(a) = (3.7) \quad \text{pour} \quad j = k - 1, \quad A = B^{-1}$$

$$(b) = (3.8) \quad \text{pour} \quad j = k$$

$$(b) = (3.9) \quad \text{pour} \quad j = k$$

$$(b) = (3.10) \quad \text{pour} \quad j = k - 1$$

Cette condition implique que φ est dans l'image de l'homomorphisme ξ . Pour justifier cette affirmation, définissons la *longueur* de φ comme étant la somme sur $k = 1, 2, \dots, n$ des longueurs des lettres des mots $A_kx_{\mu(k)}A_k^{-1}$.

Si la condition (a) est vérifiée, alors l'homomorphisme $\varphi\tilde{\sigma}_j = \varphi \circ \tilde{\sigma}_j : F_n \longrightarrow F_n$ peut être calculer comme suit :

$$\begin{aligned} \varphi\tilde{\sigma}_j(x_k) &= \varphi(x_k) = A_kx_{\mu(k)}A_k^{-1} \quad , \quad \text{pour } k \neq j, j+1. \\ \varphi\tilde{\sigma}_j(x_j) &= \varphi(x_{j+1}) = A_{j+1}x_{\mu(j+1)}A_{j+1}^{-1}. \\ \varphi\tilde{\sigma}_j(x_{j+1}) &= \varphi(x_{j+1}^{-1}x_jx_{j+1}) \\ &= A_{j+1}x_{\mu(j+1)}^{-1}A_{j+1}^{-1}A_jx_{\mu(j)}A_j^{-1}A_{j+1}x_{\mu(j+1)}A_{j+1}^{-1} \\ &\stackrel{(a)}{=} A_{j+1}x_{\mu(j+1)}^{-1}A_{j+1}^{-1} \times A_{j+1}x_{\mu(j+1)}Ax_{\mu(j)}A^{-1}x_{\mu(j+1)}^{-1}A_{j+1}^{-1}A_{j+1}x_{\mu(j+1)}A_{j+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Le mot $A_{j+1}A$ est plus court que $A_j = A_{j+1}x_{\mu(j+1)}A$. par conséquent, la longueur de $\varphi\tilde{\sigma}_j$ est plus courte que celle de φ .

Si (b) est vérifiée alors, la longueur de $\varphi\tilde{\sigma}_j^{-1}$ est plus courte que celle de φ . Ceci implique que φ peut être réduit à l'identité en répétant la composition seulement avec $\tilde{\sigma}_j$ et $\tilde{\sigma}_j^{-1}$. Ainsi φ est un produit de puissances de $\tilde{\sigma}_j$. Par conséquent, φ est dans l'image de l'homomorphisme $\beta \longmapsto \tilde{\beta}$.

■

3.5 Groupe de difféotopies

Soit M une variété orientée éventuellement à bord et Q un ensemble fini de points dans l'intérieur de M .

Définition 3.5.1

On appelle *endo-homéomorphisme* de (M, Q) tout homéomorphisme $f : M \longrightarrow M$ qui préserve l'orientation, laisse le bord de M fixe point par point et telle que $f(Q) = Q$.

On note $\mathcal{H}(M, Q)$ le groupe des endo-homéomorphismes de (M, Q) muni de la loi de composition, noté multiplicativement, $f.g = f \circ g$ pour $f, g \in \mathcal{H}(M, Q)$.

Remarquons que chaque endo-homéomorphisme de (M, Q) induit une permutation sur Q . On note que si M est connexe et $\partial M \neq \emptyset$, alors tout homéomorphisme $f : M \longrightarrow M$ fixant le bord de M point par point préserve l'orientation de M .

Définition 3.5.2

Deux endo-homéomorphismes f_0, f_1 de (M, Q) sont *isotopes* s'il existe une famille $\{f_t\}_{t \in I}$ d'endo-homéomorphismes de (M, Q) telle que l'application

$$\begin{aligned} M \times I &\longrightarrow M \\ (x, t) &\longmapsto f_t(x) \end{aligned}$$

soit continue. La famille $\{f_t\}_{t \in I}$ est appelée une *isotopie* de f_0 à f_1 .

La relation binaire " être isotope " est une relation d'équivalence sur l'ensemble des endo-homéomorphismes de (M, Q) compatible avec la composition des applications. Une classe d'isotopie d'un endo-homéomorphisme f est notée aussi f . Deux endo-homéomorphismes isotopes induisent la même permutation sur Q .

Définition 3.5.3

On appelle **groupe de difféotopies**, noté $\mathcal{M}(M, Q)$, le groupe des classes d'équivalences des endo-homéomorphismes de (M, Q) vis-à-vis de l'isotopie, muni de la loi de composition, notée multiplicativement, $fg = f \circ g$ pour $f, g \in \mathcal{M}(M, Q)$.

On note $\mathcal{M}(M) = \mathcal{M}(M, \emptyset)$.

Exemple 3.5.1

Soit \mathbb{B}^n , $n \geq 0$, une boule fermée dans \mathbb{R}^n . Alors le groupe $\mathcal{M}(\mathbb{B}^n)$ est trivial.

Démonstration.

On peut prendre \mathbb{B}^n la boule unité de \mathbb{R}^n . On note la norme Euclidienne du vecteur $z \in \mathbb{R}^n$ par $|z|$. Pour tout endo-homéomorphisme h de \mathbb{B}^n , la formule suivante :

$$h_t(z) = \begin{cases} z & \text{si } t \leq |z| \leq 1 \\ th(\frac{z}{t}) & \text{si } |z| < t \end{cases}$$

définit une isotopie $\{h_t : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}^n\}_{t \in I}$ de $h_0 = id$ à $h_1 = h$. On note que si $h(0) = 0$, alors $h_t(0) = 0$ pour tout $t \in I$.

Par conséquent, on obtient aussi $\mathcal{M}(\mathbb{B}^n, \{0\}) = \{1\}$. ■

Demi-twists

Soit M une surface orientée éventuellement à bord et Q un sous-ensemble fini dans l'intérieur de M .

Définition 3.5.4 On appelle *arc tendu* (*spanning arc*) dans (M, Q) un sous-ensemble de M homéomorphe à $I = [0, 1]$, à extrémités dans Q et disjoint de $Q \cup \partial M$.

Rappelons qu'une courbe dans M est simple si elle n'a pas de point double. Notons que les arcs tendus considérés par la suite sont tous simples.

Soit $\alpha \subset M$ un arc tendu dans (M, Q) . Identifions un petit voisinage U de α avec le disque unité ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ de sorte que $\alpha = [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ et l'orientation dans M corespond à l'orientation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre dans \mathbb{C} .

Définition 3.5.5

On appelle *demi-twist* (la classe d'isotopie de) l'homéomorphisme $\tau_\alpha : M \longrightarrow M$ défini par

$$\tau_\alpha(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in M - U, \\ -z & \text{si } |z| < \frac{1}{2}, \\ \exp(-2\pi i|z|)z & \text{si } \frac{1}{2} \leq |z| < 1. \end{cases}$$

Autrement dit, le demi twist $\tau_\alpha : (M, Q) \longrightarrow (M, Q)$ est obtenu comme étant le résultat d'une isotopie de l'application $id : M \longrightarrow M$ en tournant α dans M autour de son point médian par

un angle π dans la direction de l'orientation de M .

Clairement, $\tau_\alpha \in \mathcal{M}(M, Q)$ ne dépend pas du choix de U , $\tau_\alpha(\alpha) = \alpha$; $\tau_\alpha(Q) = Q$ et τ_α induit une transposition sur Q permutant les extrémités de α .

En tournant α dans le sens opposé, on obtient τ_α^{-1} . Donnons quelques propriétés des demi-twists.

- (i). Si $f : (M, Q) \longrightarrow (M', Q')$ est un homéomorphisme préservant l'orientation et α est un arc tendu dans (M, Q) , alors $f(\alpha)$ est un arc tendu dans (M', Q') et

$$\tau_{f(\alpha)} = f\tau_\alpha f^{-1} \in \mathcal{M}(M', Q').$$

- (ii). Si α, α' sont deux arcs tendus dans (M, Q) isotopes dans la classe des arcs tendus dans (M, Q) , alors $\tau_\alpha = \tau_{\alpha'}$ dans $\mathcal{M}(M, Q)$.
- (iii). Un endo-homéomorphisme de (M, Q) induit un endo-homéomorphisme de M par l'enlèvement de Q . L'homomorphisme de groupes obtenu $\mathcal{M}(M, Q) \longrightarrow \mathcal{M}$ envoie τ_α sur 1.
- (iv). Si α, β sont deux arcs tendus disjoints, alors

$$\tau_\alpha \tau_\beta = \tau_\beta \tau_\alpha \in \mathcal{M}(M, Q). \quad (3.11)$$

Ceci est obtenu en utilisant des voisinages disjoints de α et β , respectivement, dans la construction de τ_α et de τ_β .

- (v). Si α, β sont deux arcs tendus dans (M, Q) qui ont une extrémité commune et ils sont disjoints ailleurs, alors

$$\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\alpha = \tau_\beta \tau_\alpha \tau_\beta \in \mathcal{M}(M, Q). \quad (3.12)$$

Pour prouver cette formule, on commence par l'égalité

$$\tau_\alpha(\beta) = \tau_\beta^{-1}(\alpha)$$

laquelle peut être vérifiée en dessinant les arcs $\tau_\alpha(\beta)$ et $\tau_\beta^{-1}(\alpha)$.

D'après (ii), on a $\tau_{\tau_\alpha(\beta)} = \tau_{\tau_\beta^{-1}(\alpha)}$. Par (i) ceci implique que $\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\alpha^{-1} = \tau_\beta^{-1} \tau_\alpha \tau_\beta$, qui est équivalent à (3.12).

Pour $n \geq 1$, soit $Q_n = \{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Soit D un disque fermé dans \mathbb{R}^2 contenant l'ensemble Q_n dans son intérieur. On oriente D dans le sens direct.

Théorème 3.5.1 *Il existe un homomorphisme de groupes η du groupe de tresses B_n dans $\mathcal{M}(D, Q_n)$.*

Démonstration. Pour tout $i = 1, 2, \dots, n-1$, on considère l'arc

$$\alpha_i = [i, i+1] \times \{0\} \subset D.$$

Cet arc va intersecté Q_n seulement en ses extrémités. Considérons le demi-twist τ_{α_i} dans $\mathcal{M}(D, Q_n)$. Les formules (3.11), (3.12) impliquent que $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \dots, \tau_{\alpha_{n-1}}$ satisfont les relations de tresses. D'après la Proposition 3.1.2, il existe un homomorphisme de groupes $\eta : B_n \longrightarrow \mathcal{M}(D, Q_n)$ telle que $\eta(\sigma_i) = \tau_{\alpha_i}$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n-1$. ■

Théorème 3.5.2 *Il existe un homomorphisme de groupes ρ de $\mathcal{M}(D, Q_n)$ dans \tilde{B}_n .*

Démonstration. Choisissons un point base $d \in \partial D$ comme dans la Figure 3.7. Le groupe fon-

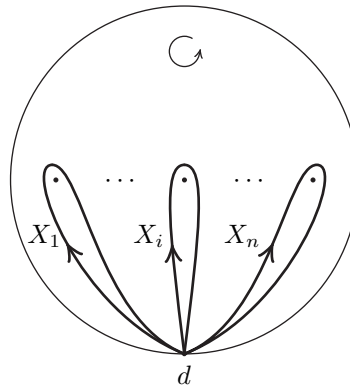


FIG. 3.7 – Les lacets X_1, \dots, X_n dans $D - Q_n$

damental $\pi_1(D - Q_n, d)$ est libre de rang n engendré par des générateurs x_1, x_2, \dots, x_n représentés par les lacets X_1, X_2, \dots, X_n comme dans la Figure 3.7. Tout endo-homéomorphisme f de (D, Q_n) peut être restreint à $D - Q_n$ et donne un endo-homéomorphisme de $D - Q_n$. Ce dernier envoie $d \in \partial D$ sur lui même, et induit un automorphisme de groupes $\rho(f)$ de $F_n = \pi_1(D - Q_n, d)$. Cet automorphisme dépend seulement de la classe d'isotopie de f , i.e., deux endo-homéomorphismes de $D - Q_n$ qui sont isotopes induisent le même automorphisme de F_n .

Vérifions que $\rho(f)$ est un automorphisme de tresses de F_n . Le lacet X_k dans la Figure 3.7 peut être déformé dans $D - Q_n$ en un petit lacet basé en d qui tourne dans le sens direct autour du point $(k, 0)$. L'homéomorphisme f envoie ce dernier lacet sur un petit lacet basé en d qui

tourne dans le sens direct autour du point $(\mu(k), 0)$ pour un certain $\mu(k) \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ce petit lacet peut être déformé au lacet $X_{\mu(k)}$ dans $D - Q_n$. Par conséquent, le lacet $f(X_k)$ peut être déformé en $X_{\mu(k)}$ dans $D - Q_n$. Sous cette déformation le point base $f(d) = d$ peut se déplacer dans $D - Q_n$. Ceci implique que les classes d'homotopies de ces deux lacets $\rho(f)(x_k)$ et $x_{\mu(k)}$ sont conjugués dans $\pi_1(D - Q_n, d)$. Cela vérifie la première condition de la définition d'automorphisme de tresses. la deuxième condition découle du fait que le produit $x_1 x_2 \dots x_n$ est représenté par le lacet ∂D basé en d . Ce lacet est préservé par f point par point et, de plus, sa classe d'homotopie dans $\pi_1(D - Q_n, d)$ est invariante par $\rho(f)$.

La formule $f \mapsto \rho(f)$ définit une application ρ de $\mathcal{M}(D, Q_n)$ dans \tilde{B}_n . Cette application est un homomorphisme de groupes car

$$\rho(fg) = \rho(f \circ g) = \rho(f) \circ \rho(g) = \rho(f)\rho(g) \quad \text{pour tout} \quad f, g \in \mathcal{M}(D, Q_n).$$

■

Le théorème suivant montre que le groupe de tresses B_n est isomorphe au groupe de difféotopies d'un disque épointé.

Théorème 3.5.3

Pour tout $n \geq 1$, les homomorphismes η et ρ définis ci-dessus sont des isomorphismes et le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} B_n & \longrightarrow & \tilde{B}_n \\ & \searrow \eta & \uparrow \rho \\ & & \mathcal{M}(D, Q_n) \end{array} \quad (3.13)$$

Bibliographie

- [1] J.S. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Annals of Math. Studies 82, 1974.
- [2] J.S. Birman, T.E. Brendle, *Braids : A Survey*, in Handbook of knot theory, 19-103, Elsevier B.V., Amsterdam, 2005.
- [3] N. Bourbaki, *Théorie des Ensembles*, Springer-Verlag Heidelberg, 2006.
- [4] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Chap. 1-4, Masson, 1990.
- [5] G. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 139, Springer-Verlag, 1991.
- [6] P. Dehornoy, *Braids and Self-Distributivity*, Progress in Math., 192, Birkhäuser, Basel, Boston, 2000.
- [7] R. Engelking, *General Topology*, Polish Scientific Publishing, 1977.
- [8] E.R. Fadell, S.Y. Husseini, *Geometry and Topology of Configuration Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [9] Y. Félix, D. Tanré, *Topologie Algébrique*, Sciences Sup, Dunod, Paris, 2010.
- [10] C. Godbillon, *Eléments de Topologie Algébrique*, Hermann, Paris, 1971.
- [11] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [12] C. Kassel, V. Turaev, *Braid Groups*, Graduate Texts in Mathematics 247, Springer-Verlag, 2008.
- [13] F. Paulin, *Topologie Algébrique Élémentaire*, Cours en ligne, ENS Paris, 2001-2002.
- [14] V.V. Prasolov, A.B. Sossinsky, *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds : An introduction to the new invariants in low-dimensional topology*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.
- [15] E.H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.