Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Seddik Ben Yahia – Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Electronique

Support de cours
Méthodes Numériques

Réalisé par :
Mr Morad GRIMES

- Cours destiné aux étudiants Master première année Electronique.

Année universitaire 2017/2018

Table des matières

Introduction

L'analyse numérique est une discipline basée sur l'informatique et les mathématiques. Son objet est la conception et l'étude de méthodes de résolutions numériques de certains problèmes mathématiques. En général, ces problèmes sont issus de la modélisation de problèmes réels. Ses développements récents sont intimement liés à ceux des moyens de calcul offert par l'informatique.

Ce cours propose un survol des principales méthodes numériques élémentaires et importantes pour la résolution des problèmes d'ingénierie courants. Il couvre plus particulièrement les sujets suivants : interpolation polynomiale et intégration numérique, équations différentielles ordinaires, équations différentielles aux dérivées partielles et optimisation numérique.

CHAPITRE I : Interpolation Polynomiale et Intégration Numérique

1) Interpolation polynomiale

1.1) Définitions

On suppose connues les valeurs d'une fonction f en un nombre fini de points distincts selon le tableau suivant :

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	$\cdots$	f_n

Un tel tableau peut être le résultat de mesures effectuées expérimentalement.
On suppose alors d'approcher f par une fonction simple de type polynomial P_n, de degré inférieur ou égal à n, et telle que : $P_n(x_i) = f_i \qquad i = 0, \dots, n.$
$i = 0, \dots, n$: appelés points d'appuis et $P_n(x_i)$ appelé le polynôme d'interpolation ou de collocation de f aux points $\{x_0,\ x_1, \dots, x_n\}$.

1.2) Interpolation Lagrangienne

Le polynôme d'interpolation de f aux points $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ est donné par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k\, L_k(x)$$

Où : $L_k(x)$ est le polynôme de Lagrange d'indice $k = 0, 1, \dots, n$ associé aux points $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, et est défini par :

$$L_k(x) = \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{\prod_{i=0}^{n}(x_k - x_i)}, i \neq k$$

L'erreur d'interpolation est donnée par :

$$\forall x, \exists\, c \in [x_0, x], |E(x)| = |f(x) - P_n(x)| = \left|\frac{f^{n+1}(c)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\, M}{(n+1)!} \text{ où } \quad M = max_{[a,\ b]}|f^{n+1}(x)|.$$

<u>Exemple</u>

Soit la fonction $f = \sqrt{x}$ définie sur l'intervalle $[100, 169]$.

x_i	100	144	169
f_i			

1) Compléter le tableau précédent,
2) Construire le polynôme de Lagrange,
3) Calculer $f(116)$,
4) Estimer le résultat trouvé.

Solution

1) Remplacer les valeurs (100, 144 et 169) dans la fonction $f = \sqrt{x}$, on trouve :

x_i	100	144	169
f_i	10	12	13

2) Le polynôme d'interpolation de Lagrange est : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k\, L_k(x)$. Avec $(i = 0, 1, 2)$ et $n = 2$.

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k\, L_k(x) = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= 10 \frac{(x-144)(x-169)}{(100-144)(100-169)} + 12 \frac{(x-100)(x-169)}{(144-100)(144-169)} + 13 \frac{(x-100)(x-144)}{(169-100)(169-144)}$$

$$= \frac{5}{1518}(x-144)(x-169)10 - \frac{3}{275}(x-100)(x-169) + \frac{13}{1725}(x-100)(x-144)$$

3) Posant $x = 116$, on obtient $f(116) = \sqrt{116} = 10.763$

4) Calcul de l'erreur

$|E_n(x)| \leq \frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\, M}{(n+1)!}$ où $M = max_{[a,\ b]}|f^{n+1}(x)|$ Avec $(i = 0, 1, 2)$ et $n = 2, donc$:

$$|E_2(x)| \leq \frac{\prod_{i=0}^{2}(x-x_i)\, M}{(2+1)!} = \frac{M}{3!}(116-100)(116-144)(116-169) = \frac{M}{6} 16 * 28 * 23$$

$$M = max_{[100,169]}|f'''(x)| = max_{[100,169]}\left|\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\right| = \frac{3}{8}100^{-\frac{5}{2}}, \text{ donc :}$$

$$|E_2(116)| \leq 1484 * 10^{-5} < 0.5 * 10^{-1} (1 décimale\ exacte)$$

D'où : $f(116) = 10.763 \approx 10.8 \mp 0.1$

1.3) Interpolation de Newton

On se donne $(n + 1)$ points d'appuis : (x_i, y_i), $i = 0,1,2, \ldots., n$, et on désire interpoler ces valeurs par un polynôme de degré (n) pour le cas d'un partage régulier de l'intervalle d'interpolation $x_{i+1} - x_i = h, i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Le polynôme d'interpolation de Newton est donné par :

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta y_0^2}{2!\, h}(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \frac{\Delta y_0^n}{n!\, h^n}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \qquad \text{(éq.1)}$$

Avec : $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\Delta y_i^2 = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$, $\Delta y_i^n = \Delta y_{i+1}^{n-1} - \Delta y_i^{n-1}$

Posant : $x = x_0 + uh$, alors : $u - i = \frac{x-x_i}{h}$ avec$i = 1, 2, \ldots, n$

Donc : $P_n(x) = \overline{P_n(u)} = \sum_{k=0}^{n} u\,(u-1)\ldots(u-k+1)\frac{\Delta^k y_0}{k!}$ (éq.2)

- L'équation 1 est utilisée lorsqu'on veut connaitre la forme générale du polynôme $P_n(x)$
- L'équation 2 est utilisée lorsqu'on veut connaitre la valeur du $P_n(x)$ en un point donné.

L'erreur d'interpolation dans ce cas est :

$|E(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|h^{n+1}\, u\,(u-1)\ldots(u-n)|$ avec $M_{n+1} = max_{[x_0, x_n]}|f^{n+1}(x)| \approx \left|\frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!}\, u\,(u-1)\ldots(u-n)\right|$.

Exemple

Soit le tableau des résultats d'une mesure :

x_i	$x_0 = 4$	$x_1 = 6$	$x_2 = 8$	$x_3 = 10$
y_i	$y_0 = 1$	$y_1 = 3$	$y_2 8$	$y_3 = 20$

1) Trouver le polynôme de Newton $P_3(x)$
2) Calculer $P_3(7)$
3) Estimer le résultat.

Solution

1) Le polynôme d'interpolation de Newton est donné par :

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta y_0^2}{2!\ h}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta y_0^n}{n!\ h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Pour notre cas $n = 3, h = x_1 - x_2 = 6 - 4 = 2$, donc le polynôme devient :

$$P_3(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta y_0^2}{2!\ h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta y_0^3}{3!\ h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

avec : $\Delta y_i^n = \Delta y_{i+1}^{n-1} - \Delta y_i^{n-1}$

x_i	y_i	Δy_i	Δy_i^2	Δy_i^3
4	1			
6	3	Δy_0=3−1=2		
8	8	Δy_1=5	$\Delta y_0^2 = 3$	
10	20	Δy_2=12	$\Delta y_1^2 = 7$	$\Delta y_0^3 = 4$

Alors :

$$P_3(x) = 1 + \frac{2}{2}(x - 4) + \frac{3}{2 * 4}(x - 4)(x - 6) + \frac{4}{6 * 8}(x - 4)(x - 6)(x - 8)$$

$$P_3(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{9}{8}x^2 + \frac{71}{12}x - 10$$

2) Pour calculer $P_3(7)$, on utilise la formule :

$$P_n(x) = \overline{P_n(u)} = \sum_{k=0}^{n} u\,(u - 1) \dots (u - k + 1)\frac{\Delta^k y_0}{k!}$$

$$x = x_0 + uh, pour\ x = 7, x_0 = 4\ et\ h = 7, i = 0$$

$$u_{-i} = \frac{x - x_i}{h} = \frac{7-4}{2} = \frac{3}{2}$$

$$P_3(7) = \overline{P_3\left(\frac{3}{2}\right)} = y_0 + \Delta y_0 * u + \frac{\Delta y_0^2 * u * u_{-1}}{2!} + \frac{\Delta y_0^3 * u * u_{-1} * u_{-2}}{3!}$$

$$= 1 + 2 * \frac{3}{2} + \frac{3 * \frac{3}{2} * \left(\frac{3}{2} - 1\right)}{2} + \frac{4 * \frac{3}{2} * \left(\frac{3}{2} - 1\right) * \left(\frac{3}{2} - 2\right)}{6} = 4.875$$

3) L'erreur d'interpolation est :

$$|E(x)| =\approx \left|\frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!}\ u\,(u - 1) \dots (u - n)\right| = \left|\frac{4 * \left(\frac{3}{2}\right) * \left(\frac{3}{2} - 1\right) * \left(\frac{3}{2} - 2\right) * \left(\frac{3}{2} - 3\right)}{24}\right| = \frac{1}{8} = 0.125 < 0.5 * 10^{-1}\ .$$

Donc le résultat final contient seulement une décimale exacte :

$$\boldsymbol{P}_3(7) = 4.875 \approx 6.8 \mp 0.1$$

1.4) Algorithme d'Aitken

Cet algorithme utilise une fonction de récurrence permettant de calculer le polynôme d'interpolation d'une fonction connue en $(n+1)$ points, à partir de deux polynômes d'interpolation déterminés à partir de (n) de ces points.

- Soient les deux polynômes sur les points : $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} P_{\{x_0,x_1\ldots,x_{n-1}\}}(x) \\ P_{\{x_1,x_2\ldots,x_n\}}(x) \end{cases}$$

Construits respectivement sur les (n) points

$$\begin{cases} \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\} \\ \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \end{cases}$$

On obtient le polynôme $P_{\{x_0,x_1\ldots,x_{n-1}\}}(x)$ construit sur $(n+1)$ points :

$$P_{\{x_0,x_1\ldots,x_{n-1}\}}(x) = \frac{(x_n - x)P_{\{x_0,x_1\ldots,x_{n-1}\}}(x) - (x_0 - x)P_{\{x_1,x_2\ldots,x_n\}}(x)}{x_n - x_0}$$

<u>Exemple</u>

Soit le tableau suivant :

x_i	0	2	4
y_i	3	−1	3

Calculer $P_2(2.5)$ par l'algorithme d'Aitken.

<u>Solution</u>

Le polynôme $P_{\{x_0,x_1\ldots,x_{n-1}\}}(x)$ construit sur $\{x_0,\ x_1, x_2\}$ est :

$$P_{\{x_0,x_1,x_2\}}(x) = \frac{(x_2 - x)P_{\{x_0,x_1\}}(x) - (x_0 - x)P_{\{x_1,x_2\}}(x)}{x_2 - x_0}$$

$$P_{\{x_0,x_1,x_2\}}(2.5) = \frac{(4 - 2.5)P_{\{x_0,x_1\}}(2.5) - (0 - 2.5)P_{\{x_1,x_2\}}(2.5)}{4 - 2.5}$$

où $\begin{cases} P_{\{x_0,x_1\}}\ polynôme\ d'intrpolation\ sur\ \{x_0,\ x_1\} \\ P_{\{x_1,x_2\}}\ polynôme\ d'intrpolation\ sur\ \{x_1,\ x_2\} \end{cases}$

On réitère ensuite pour trouver $P_{\{x_0,x_1\}}$ et $P_{\{x_1,x_2\}}$.

$$P_{\{x_0,x_1\}}(2.5) = \frac{(x_1 - x)P_{\{x_0\}}(2.5) - (x_0 - x)P_{\{x_1\}}(2.5)}{x_1 - x_0}$$

$$P_{\{x_0,x_1\}}(2.5) = \frac{(2 - 2.5) * 3 - (0 - 2.5) * (-1)}{2 - 0} = -2$$

De même pour $P_{\{x_1,x_2\}}(2.5)$, on le trouve égale à 0.

d'où $P_{\{x_0,x_1,x_2\}}(2.5) = \frac{(4-2.5)*(-2)-(0-2.5)*(0)}{4-2.5} = -0.75$

2) Intégration Numérique

2.1) Introduction

Le problème de l'intégration numérique d'une fonction consiste à rechercher la valeur de l'intégrale définie à partir de plusieurs valeurs de la fonction sous le signe somme. Si on donne une fonction f définie et intégrable sur $[a, b]$ supposée connue (grâce à des mesures) en $(n+1)$ points selon le tableau :

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x_i)$	f_0	f_1	…	f_n

Pour approcher le nombre exacte $I = \int_a^b f(x)dx$, l'idée est la suivante :

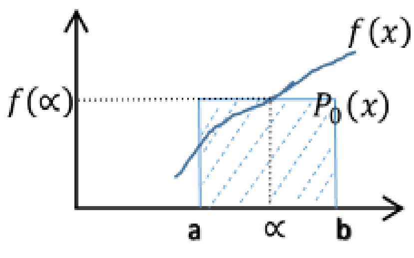
1) On remplace $f(x)$ par son polynôme d'interpolation $P_n(x)$
2) On calcule $I_n = \int_a^b P_n(x)dx$
3) On estime l'erreur du résultat $|I - I_n|$

Une telle méthode est appelée souvent la méthode de **QUADRATURE**, elle fait appel à l'interpolation polynomiale de degré 0, 1 et 2. Respectivement on obtient les formules simples des rectangles, des trapèzes et de Simpson.
En pratique et pour avoir une précision haute de l'intégrale, on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en plusieurs petits intervalles : $[a + (i-1)h, a + ih], i = 1,2, \dots, n$ de longueur $h = \frac{b-a}{n}$ auxquels on applique la formule simple puis par sommation on déduit les formules dites composites.
Le choix d'une méthode dépend généralement du type de fonction qu'on doit intégrer. On peut éventuellement combiner les trois méthodes sur des intervalles bien choisis.

2.1) Méthode des rectangles

2.1.a) Formule simple

Supposons que $f(x)$ est connue en un point $\alpha \in [a, b]$, le polynôme d'interpolation de $f(x)$ est la constante $P_0(x) = f(\alpha)$. Le nombre I est donc approché par $I_{0R} = \int_a^b P_0(x)dx = \int_a^b f(\alpha).dx = (b-a)f(\alpha)$



Méthode simple des rectangles

Dans le cas particulier où le point $\propto$ est le milieu de $[a, b]$, $\alpha = \frac{a+b}{2}$, on obtient $I_{0M} = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, c'est la formule simple des rectangles Point-milieu.

2.1.b) Formule composite

On généralise la formule précédente à $(n+1)$ points équidistants $x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_i =$

$a + ih$, $x_n = b$, où $h = \frac{b-a}{n}$ en appliquant le même principe précédent sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on obtient la formule composite des rectangles :

$$I_R = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\propto_i)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\propto_i)$$

Dans le cas des rectangles point-milieu

$$I_M = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

<u>Exemple</u>

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur l'intervalle$[1,2]$.

1) Calculer $\int_1^2 f(x)dx$ pour $n = 10$. Utiliser les formules point-milieu simple puis la formule composite.

<u>Solution</u>

1. <u>Formule simple</u>

$a = 1, b = 2,\ \alpha = \frac{a+b}{2} = 1.5$. La formule de l'intégration par la méthode des rectangles simple est : $I_{0M} = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (2-1)f(1.5) = \sqrt{1.5}$

$$\boldsymbol{I_{0M}} = 1.225$$

2. <u>Formule composite</u>

La formule d'intégration par la méthode des rectangles point-milieu

$$I_M = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right), h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0.1$$

x_i	$x_0 = 1$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	1.05	1.15	1.25	1.35	1.45	1.55	1.65	1.75	1.85	1.95	
$f_i\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$	1.025	1.072	1.118	1.162	1.204	1.245	1.285	1.323	1.360	1.396	

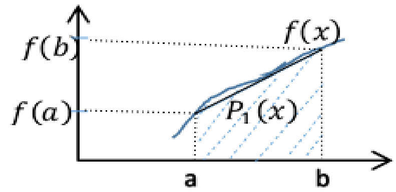
$$I_M = \frac{b-a}{n}(f_0 + \cdots + f_9) = \frac{1}{10} * (12.19) = 1.219$$

2.2) **Méthode des trapèzes**

2.2.a) Formule simple

Si on suppose connue la fonction f aux deux points $a\ et\ b$. L'interpolation de Lagrange à ces deux points donne : $P_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$ et par intégration, on obtient :

$$\boldsymbol{I_{1T}} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx} = \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\big)$$



Méthode simple des trapèzes

2.2.b) Formule composite

En généralise le même principe précédent aux $(n+1)$ points équidistants, on obtient :

$$I_T = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\big(f(x_i)+f(x_{i+1})\big)}{2}$$
$$= \frac{b-a}{n}\left[\left(\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\right)+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right]$$

<u>Exemple</u>

Soit la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ définie sur l'intervalle $[1,2]$.

1) Calculer $\int_1^2 f(x)dx$ pour $n=10$. Utiliser la formule simple puis la formule composite des trapèzes.

<u>Solution</u>

1) <u>Formule simple</u>

$a=1, b=2$. La formule d'intégration par la méthode des trapèzes simple est :

$$\boldsymbol{I_{1T}} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx} = \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\big) = \frac{2-1}{2}\big(\boldsymbol{f}(1)+\boldsymbol{f}(2)\big) = 0.5*(1+1.414) = 1.207$$

2) <u>Formule composite</u>

La formule composite est :

$$I_T = \frac{b-a}{n}\left[\left(\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\right)+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right]$$

x_i	$x_0=1$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f_i(x_i)$	1	1.049	1.095	1.140	1.183	1.225	1.265	1.304	1.342	1.378	1.414

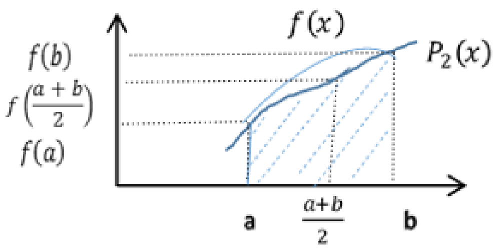
$$I_T = \frac{b-a}{n}\left[\left(\frac{1}{2}(f_0+f_{10})\right)+f_1+\cdots+f_9\right]$$
$$= \frac{2-1}{10}\left[\left(\frac{1}{2}(1+1.414)\right)+1.0049+\cdots+1.378\right] = 1.218$$

2.3) Formule de Simpson

2.2.a) Formule simple

On suppose que la fonction f est connue aux trois points équidistants : $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2} = a + h$ et $x_2 = a + 2h = b$ le pas $h = \frac{b-a}{2}$, alors : $P_2(x) = \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{h^2} f(a) + \frac{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{h^2} f(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{h^2} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et par intégration, on obtient :

$$I_{2S} = \int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$



Méthode simple de Simpson

2.3.b) Formule composite

On réitère la formule précédente en partageant l'intervalle $[a, b]$ en $S = \frac{n}{2}$ intervalles.

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{S-1} f(a + 2ih) + 4\sum_{i=0}^{S-1} f(a + (2i+1)h)\right]$$

Exemple

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur l'intervalle$[1, 2]$.

3) Calculer $\int_1^2 f(x)dx$ pour $n = 10$. Utiliser la formule composite de Simpson.

Solution

La formule composite de Simpson est :

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{S-1} f(a + 2ih) + 4\sum_{i=0}^{S-1} f(a + (2i+1)h)\right], avec\ S = \frac{n}{2} = \frac{10}{2} = 5\ et\ h = \frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{2-1}{10} = 0.1.$$

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{4} f(a + 2ih) + 4\sum_{i=0}^{4} f(a + (2i+1)h)\right]$$

$$= \frac{0.1}{3}[f(1) + f(2) + 2\big(f(1.2) + f(1.4) + f(1.6) + f(1.8)\big)$$

$$+ 4\big(f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)\big)]$$

$$= \frac{0.1}{3}[1 + 1.414 + 2(1.095 + 1.183 + 1.265 + 1.342) + 4(1.049 + 1.140 + 1.225 + 1.304 + 1.378)]$$

$$= 1.219$$

La valeur exacte de cette intégrale est :$\int_1^2 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}})_1^2 = 1.219$

2.4) Gestion d'erreurs

2.4.a) La méthode des trapèzes

L'erreur de la méthode des trapèzes est :

$|E_n(f)|=\left|\frac{f''(c)*(b-a)^3}{12n^2}\right| \leq M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2}$ avec $c \in [a,b]\ et\ M_2 = max|f''(x)|_{[a,b]}$ ainsi on peut déterminer le nombre de sous-intervalles de l'intervalle d'intégration tel que : $\left|\int_a^b f(x)dx - I_n\right| \leq e$ où e est le seuil d'erreur fixé d'avance, d'après la formule suivante : $n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3*M_2}{12e}}$ dans ce cas, on obtient : $\int_a^b f(x)dx = I_T \mp e$

2.4.b) La méthode de Simpson

La méthode de Simpson est caractérisée par l'erreur :

$|E_n(f)|=\left|\frac{-h^4}{180}(b-a)f''''(c)\right| = \left|\frac{(b-a)^5}{180n^4}f''''(c)\right| \leq M_4\frac{(b-a)^5}{180n^4}$ où $c \in [a,b]\ et\ M_4 = max_{[a,b]}|f''''(x)|$, si on note par e le seuil d'erreur qu'on veut atteindre, alors dès que :

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 * M_4}{180e}}, n\ pair.$$

Dans ce cas, on obtient : $\int_a^b f(x)dx = I_S \mp e$

<u>Exemple</u>

1) Evaluer l'erreur commise par la méthode des trapèzes dans l'exemple précédent.
2) Trouver n pour avoir une exactitude de trois décimales exactes si on utilise la méthode de Simpson.

<u>Solution</u>

1) Par la méthode des trapèzes

$f(x) = \sqrt{x}$ définie sur l'intervalle$[1,2], n = 10$.

L'erreur de la méthode des trapèzes est : $|E_n(f)|=\left|\frac{f''(c)*(b-a)^3}{12n^2}\right| \leq M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2}$ avec $c \in [a,b]\ et\ M_2 = max|f''(x)|_{[a,b]}$.

$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$. Sur $[1,2]$ $M_2 = |f''(x)_{x=1}| = 0.25$

$$|E_n(f)| \leq 0.25\frac{(2-1)^3}{12*10^2} = 0.00021 \leq 0.5*10^{-3}$$

Donc trois décimales exactes : $I \approx 1.2190 \mp 0.0021 \approx 1.219 \mp 0.001$

a) Une exactitude à trois décimales c.-à-d. l'erreur maximale est $e = 0.5*10^{-3}$

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 * M_4}{180e}}, n\ pair\ et\ M_4 = max_{[a,b]}|f''''(x)|$$

$$f''''(x) = -\frac{15}{16}\frac{1}{\sqrt{x^7}} \rightarrow cette\ fonction\ est\ maximale\ quand\ x = 1, ce\ qui\ donne\ M_4 = 0.9375$$

$n \geq \sqrt[4]{\frac{(2-1)^5*0.9375}{180*0.5*10^{-3}}} = 1.796 \rightarrow \boldsymbol{n} = \mathbf{2}.$

Chapitre II : Equations Différentielles Ordinaires

1) Définitions

- Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation fonctionnelle entre une fonction inconnue d'une seule variable et ses dérivées $y'(x) = F(x, y)$.
- Le problème de Cauchy (problème condition initiale) consiste à trouver la fonction $y = F(x)$ satisfaisant à $y'(x) = F(x, y)$ avec la condition initiale $y_0 = F(x_0)$.
- On distingue deux méthodes de résolution ; les méthodes à pas séparés où chaque point de la solution y_{n+1} est calculé à partir de la solution en x_n, et les méthodes à pas liés où la solution y_{n+1} est calculé à partir des solutions en $x_n, x_{n-1}, \dots$

2) Méthodes à pas séparés

2.1) Méthode d'Euler

En $x_0$on connait y_0, selon la méthode d'Euler, on approche la solution de l'équation $y' = F(x, y)$ sur (x_0, x_1) par sa tangente en x_0, donc $y_1 - y_0 = y'(x_0)(x_1 - x_0)$. Sur l'intervalle (x_1, x_2) la solution est remplacée par la tangente en x_1, et ainsi de suite. L'algorithme d'Euler est donc donné par :

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + h\,F(x_i, y_i)\,;\, i = 0, 1, \dots, n-1\,;\, h = \frac{b-a}{n}}$$

<u>Exemple</u>

Soit l'équation différentielle : $y'(x) = -y(x) + x + 1$ et la condition initiale $y(0) = 1$.

1) Trouver la solution numérique pour $n = 5$, dans l'intervalle $[0, 0.5]$ (effectuer les calculs avec trois décimales exacte).
2) Comparer les résultats obtenus avec la solution exacte $y(x) = e^{-t} + t$.

<u>Solution</u>

Les données sont : $y'(x) = -y(x) + x + 1$, $y(0) = 1$, $n = 5$, $[0, 0.5]$.

L'algorithme d'Euler est : $\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + h\,F(x_i, y_i)\,;\, i = 0, 1, \dots, n-1\,;\, h = \frac{b-a}{n}}$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.5-0}{5} = 0.1 \; et \; F(x_i, y_i) = -y_i + x_i + 1 \; et \; x_i = ih$$

$- \, Pour \; i = 0, y_1 = y_0 + h(-y_0 + x_0 + 1) = 1 + 0.1(-1 + 0 + 1) = 1.000$

$- \, Pour \; i = 1, y_2 = y_1 + h(-y_1 + x_1 + 1) = 1 + 0.1(-1 + 0.1 + 1) = 1.010$; etc.

On obtient le tableau suivant:

x_i	$h\,F(x_i, y_i)$	y_{i+1}
0	0	1.000
0.1	0.010	1.000
0.2	0.019	1.010
0.3	0.027	1.029
0.4	0.034	1.056
0.5	0.041	1.090

Le tableau des solutions exactes est:

Solution exacte	Erreur
1.000	0.000
1.005	0.005
1.019	0.009
1.041	0.012
1.070	0.014
1.106	0.016

2.2) Méthode de Runge-Kutta (RK2 et RK4)

Au lieu d'utiliser des segments de droites, c.-à-d. des tangentes dans la méthode d'Euler, on utilise des arcs de paraboles dans la méthode de RK2.

L'algorithme de RK2 est :

$$\begin{cases} \hat{x}_i = x_i + h \\ \hat{y}_i = y_i + hF(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(F(x_i, y_i) + F(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \end{cases}$$

En pratique, la méthode RK4 est la méthode la plus utilisée. Son algorithme est :

$$\begin{cases} K_1 = F(x_i, y_i) \\ K_2 = F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ K_3 = F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\ K_4 = F(x_i + h, y_i + hk_3) \end{cases}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

<u>**Exemple**</u>

Soit l'équation différentielle : $y'(x) = -y(x) + x + 1$ et la condition initiale $y(0) = 1, h = 0.1$.

- Calculer par les deux méthodes RK2 et RK4 les deux premières valeurs de la solution.

<u>**Solution**</u>

1) <u>**Méthode de RK2**</u>

La fonction $F(x, y) = -y(x) + x + 1,\ y(0) = 1, h = 0.1$.

L'algorithme de RK2 est :

$$\begin{cases} \hat{x}_i = x_i + h \\ \hat{y}_i = y_i + hF(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(F(x_i, y_i) + F(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \end{cases}$$

- La première itération : $i = 0$

$$\begin{cases} \hat{x}_0 = x_0 + 0.1 = 0 + 0.1 = 0.1 \\ \hat{y}_0 = y_0 + h(-y_0 + x_0 + 1) = 1 + 0.1(-1 + 0 + 1) = 1 \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(F(x_0, y_0) + F(\hat{x}_0, \hat{y}_0)) = 1 + 0.05(-1 + 0 + 1) + (-1 + 0.1 + 1) = 1.005 \end{cases}$$

- La deuxième itération : $i = 1$

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = x_1 + 0.1 = 0.1 + 0.1 = 0.2 \\ \hat{y}_1 = y_1 + h(-y_1 + x_1 + 1) = 1.005 + 0.1(-1.005 + 0.1 + 1) = 1.0145 \\ y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(F(x_1, y_1) + F(\hat{x}_1, \hat{y}_1)) = 1.005 + 0.05(-1.005 + 0.1 + 1) + (-1.0145 + 0.2 + 1) \\ \qquad = 1.0190 \end{cases}$$

2) Méthode de RK4

L'algorithme de RK4 est :

$$\begin{cases} K_1 = F(x_i, y_i) \\ K_2 = F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ K_3 = F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\ K_4 = F(x_i + h, y_i + hk_3) \end{cases}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- Première itération $i = 0$

$$\begin{cases} K_1 = F(x_0, y_0) = 0 \\ K_2 = F\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = 0.05 \\ K_3 = F\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = 0.0475 \\ K_4 = F(x_0 + h, y_0 + hk_3) = 0.09525 \end{cases}$$

Ce qui donne : $y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{0.1}{6}(0 + 2 * 0.05 + 2 * 0.0475 + 0.09525) = 1.0048$

- Deuxième itération $i = 1$

$$\begin{cases} K_1 = F(x_1, y_1) = 0.09516 \\ K_2 = F\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = 0.1404 \\ K_3 = F\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_2\right) = 0.13814 \\ K_4 = F(x_1 + h, y_1 + hk_3) = 0.18134 \end{cases}$$

Ce qui donne : $y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.01873$

3) Méthodes à pas liés

Il existe deux types de ces méthodes ; les méthodes ouvertes et les méthodes fermées, elles sont basées sur le développement de Taylor.

3.1) Méthode d'Adams-Bashforth (AB)

C'est l'une des méthodes ouvertes. Soit le développement de Taylor de l'équation $y' = F(x, y)$ au point $x_{i+1}(x_i + h)$:

$$y_{i+1} = y_i + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \cdots$$

$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}F'(x_i, y_i) + E = y_i + hF(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\frac{F(x_i, y_i) - F(x_{i-1}, y_{i-1})}{h}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3F(x_i, y_i) - F(x_{i-1}, y_{i-1}))$$

C'est la formule d'Adams-Bashforth d'ordre 2 avec $y_0$et $y_1$connues.

3.2) Méthode d'Adams-Moulton (AM)

Cette méthode est l'une des méthodes fermées, son algorithme est :

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \frac{h}{2}\left(F(x_i, y_i) + F\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}\right)\right)$$

Avec $y_{i+1}^{(0)}$ est donnée pour $k = 0, 1, \ldots$

$y_{i+1}^{(0)}$est dite le prédicteur de y_{i+1}, les $y_{i+1}^{(k)}$ sont appelés les correcteurs, pour les calculés, on utilise la méthode d4euler comme prédicteur et la méthode d'Adams-Moulton comme correcteur.

<u>Exemple</u>

Soit l'équation différentielle : $y'(x) = -y(x) + x + 1$ et la condition initiale $y(0) = 1, h = 0.1$.

- Utiliser la méthode AB puis celle AM pour calculer la solution au point 0.2

<u>Solution</u>

1) <u>Méthode AB</u>

L'algorithme AB est :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3F(x_i, y_i) - F(x_{i-1}, y_{i-1}))$$

$y_0 = 1 \; et \; y_1 = 1.005 \; par \; Euler$

- Première itération : $i = 1$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(3F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0)) = 1.005 + 0.05\big(3 * (-1.005 + 0.1 + 1) - (-1 + 0 + 1)\big) = 1.0193$$

2) <u>Méthode AM</u>

L'algorithme AM est :

$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \frac{h}{2}\left(F(x_i, y_i) + F\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}\right)\right)$ avec $y_0^{(0)} = 1 \; et \; y_1^{(0)} = 1.005 \; par \; Euler$

On itère le correcteur une seule fois :

- Première itération :

$$y_1^{(1)} = y_1 + h\big(F(x_0, y_0)\big) + F\left(x_1, y_1^{(0)}\right) = 1 + 0.05(0 + 0.1) = 1.005$$

- Deuxième itération :

$$y_2^{(1)} = y_1 + h\big(F(x_1, y_1)\big) + F\left(x_2, y_2^{(0)}\right)$$

$$= 1.005 + 0.05(0.095 + 0.19) = 1.0193$$

4) Equations différentielles d'ordre supérieur à 1 et systèmes d'équations différentielles

La forme générale d'une équation différentielle (EDO) d'ordre (m) avec conditions initiales est :

$$\begin{cases} y^{(m)} = F\big(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}\big) \; avec \; x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha_1, y'(a) = \alpha_2, \ldots, y^{(m-1)} = \alpha_m \end{cases}$$

Cette équation peut être transformée en un système de (m) équations différentielles d'ordre 1, en effet posons :

$u_1(x) = y(x), u_2(x) = y'(x), \ldots, u_m(x) = y^{(m-1)}(x)$, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = u_2 = F_1(u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \dfrac{du_2}{dx} = u_3 = F_2(u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \vdots \\ \dfrac{du_m}{dx} = u_{m+1} = F_2(x, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ u_1(a) = y(a) = \alpha_1, u_2(a) = y'(a) = \alpha_2, \dots, u_m(a) = y^{(m-1)}(a) = \alpha_m \end{cases}$$

Pour faire la résolution de ce système on utilise les méthodes de résolution d'ordre un (Euler, Runge Kutta, ...). Par exemple, pour appliquer la méthode d'Euler au système précédent, nous précédons de la manière suivante :

Soit W_{ij} une approximation de la $i^{ième}$ composante de la solution du système au point t_j, $i = 1, 2, \dots, m$ et $j = 0, 1, 2, \dots, N$ où $N = \frac{b-a}{h}$ et $t_j = a + jh$.

Les conditions initiales sont données par :

$W_{1,0} = \propto_1, W_{2,0} = \propto_2, \dots, W_{m,0} = \propto_m$ et

$$\boldsymbol{W_{i,j+1} = W_{i,j} + hF_i(x_j, W_{1,j}, W_{2,j}, \dots, W_{m,j})\ avec\ i = 1, 2, \dots, m}$$

<u>Exemple</u>

Soit l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y''(x) = 2y'(x) - 2y(x) \\ y(0) = 2, y'(0) = 1, h = 0.1 \end{cases}$$

- Donner la première solution par méthode d'Euler puis par la méthode de RK2.

<u>Solution</u>

a) L'algorithme de résolution par la méthode d'Euler est :

$$W_{i,j+1} = W_{i,j} + hF_i(x_j, W_{1,j}, W_{2,j})\ avec \begin{cases} W_{1,0} = 2 \\ W_{2,0} = 1 \end{cases}$$

- Première itération : $j = 0, x_0 = 0$ et $i = 1, 2$

$$\begin{cases} W_{1,1} = W_{1,0} + hF_1(x_0, W_{1,0}, W_{2,0}) \\ W_{2,1} = W_{2,0} + hF_2(x_0, W_{1,0}, W_{2,0}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{1,1} = 2 + 0.1 * 1 = 2.1 \\ W_{2,1} = 1 + 0.1 * (2 * 1 - 2) = 1 \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} \boldsymbol{W_{1,1}} = 2.1 \\ \boldsymbol{W_{2,1}} = 1 \end{cases}$$

b) L'algorithme de résolution par la méthode de RK-2 est :

$$\begin{cases} \hat{x}_j = x_j + h \\ \widehat{W}_{i,j} = W_{i,j} + hF_i(x_j, W_{1,j}, W_{2,j}) \\ W_{i,j+1} = W_{i,j} + \dfrac{h}{2}\left(F_i(x_j, W_{1,j}, W_{2,j}) + F_i(\hat{x}_j, \widehat{W}_{1,j}, \widehat{W}_{2,j})\right) \end{cases} avec \begin{cases} W_{1,0} = 2 \\ W_{2,0} = 1 \end{cases}$$

- Première itération : $j = 0, x_0 = 0$ et $i = 1, 2$

$$\begin{cases} \hat{x}_0 = x_0 + 0.1 = 0.1 \\ \widehat{W}_{1,0} = W_{10} + hF_1(x_0, W_{1,0}, W_{2,0}) = 2 + 0.1 * 1 = 2.1 \\ \widehat{W}_{20} = W_{20} + hF_2(x_0, W_{10}, W_{20}) = 1 + 0.1 * (2 * 1 - 2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{1,1} = W_{1,0} + \dfrac{0.1}{2}\left(F_1(x_0, W_{1,0}, W_{2,0}) + F_1(\hat{x}_0, \widehat{W}_{1,0}, \widehat{W}_{2,0})\right) \\ \qquad = 2 + 0.05 * (1 + 1) = 2.1 \\ W_{2,1} = W_{2,0} + \dfrac{0.1}{2}\left(F_2(x_0, W_{1,0}, W_{2,0}) + F_2(\hat{x}_0, \widehat{W}_{1,0}, \widehat{W}_{2,0})\right) \\ \qquad = 1 + 0.05 * \left((2 * 1 - 2) + (2 * 1 - 2.1)\right) = 1.005 \end{cases}$$

5) Problème aux limites pour les équations différentielles ordinaires

Le problème aux limites ou problème de Dirichlet (conditions aux limites) peut être donné par : $\begin{cases} y''(x) = F\big(x, y(x), y'(x)\big), x \in [a,b] \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases}$ (1)

L'équation différentielle $F(x, y(x), y'(x))$ est dite linéaire si elle est de la forme : $p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x)$, dans ce cas α *et* β sont des constantes et le problème est dit **linéaire**.

5.1) Méthode de tir

La méthode de tir consiste à réduire la résolution du problème (1) à celle de deux problèmes du Cauchy (2) et (3).

$$\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), x \in [a,b] \\ y(a) = \alpha, y'^{(a)} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x), x \in [a,b] \\ y(a) = 0, y'(a) = 1 \end{cases} \qquad (3)$$

La solution $y(x)$ du problème (1) est donnée par :

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x)$$

où : $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les solutions des problèmes (2) et (3), respectivement.

<u>Exemple</u>

Soit le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x) - y(x) + x + 1 \\ y(1) = 0.1, y(1.4) = 0.15 \; et \; h = 0.2 \end{cases} \qquad (1)$$

- Donner la solution au point $x = 1.2$ par la méthode de tir.

<u>Solution</u>

- Les deux systèmes (2) et (3) sont :

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x) - y(x) + x + 1 \\ y(1) = 0.1, y'(1) = 0 \; et \; h = 0.2 \end{cases} (2) \; et \; \begin{cases} y''(x) = y'(x) - y(x) \\ y(1) = 0, y'(1) = 1 \; et \; h = 0.2 \end{cases} \qquad (3)$$

La solution du problème (1) est donnée par :

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x) = y_1(x) + \frac{0.15 - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x)$$

où : $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les solutions des problèmes (1) et (2), respectivement.

- Résolution du problème (2) par la méthode d'Euler

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x) - y(x) + x + 1 \\ y(1) = 0.1, y'(1) = 0 \; et \; h = 0.2 \end{cases} \qquad (2)$$

- Transformation du problème (2) vers un système d'équations, en mettant $u_1 = y$

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = u_2 \\ \dfrac{du_2}{dx} = u_2 - u_1 + x + 1 \end{cases} \qquad avec \; u_1(1) = 0.1 \; et \; u_1(1) = 0$$

L'algorithme d'Euler est :

$$W_{i,j+1} = W_{i,j} + hF_i\big(x_j, W_{1,j}, W_{2,j}\big) \; avec \begin{cases} W_{1,0} = 0.1 \\ W_{2,0} = 0 \end{cases}$$

- Première itération : $j = 0, x_0 = 1 \; et \; i = 1, 2$

$$\begin{cases} W_{1,1} = W_{1,0} + hF_1(x_0, W_{1,0}, W_{2,0}) = W_{1,0} + h * W_{2,0} \\ W_{2,1} = W_{2,0} + hF_2(x_0, W_{1,0}, W_{2,0}) = W_{2,0} + h * (W_{2,0} - W_{1,0} + x_0 + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{1,1} = 0.1 + 0.2 * 0 = 0.1 \\ W_{2,1} = 0 + 0.2 * (0 - 0.1 + 1 + 1) = 0.38 \end{cases}, \text{ donc : } \begin{cases} \boldsymbol{W}_{1,1} = 0.1 \\ \boldsymbol{W}_{2,1} = 0.38 \end{cases}$$

- Deuxième itération : $j = 1, x_1 = 1.2 \; et \; i = 1, 2$

$$\begin{cases} W_{1,2} = W_{1,1} + hF_1(x_1, W_{11}, W_{2,1}) = W_{1,1} + h * W_{2,1} \\ W_{2,1} = W_{2,1} + hF_2(x_1, W_{1,1}, W_{2,1}) = W_{2,1} + h * (W_{2,1} - W_{1,1} + x_1 + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{1,1} = 0.1 + 0.2 * 0.38 = 0.176 \\ W_{2,1} = 0.38 + 0.2 * (0.38 - 0.1 + 1.2 + 1) = 0.876 \end{cases}, \text{ donc : } \begin{cases} \boldsymbol{W}_{1,1} = 0.176 \\ \boldsymbol{W}_{2,1} = 0.876 \end{cases}$$

- Résolution du problème (3) par la méthode d'Euler

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x) - y(x) \\ y(1) = 0, y'(1) = 1 \; et \; h = 0.2 \end{cases} \quad (3)$$

- Transformation du problème (3) vers un système d'équations, on mettant $u_1 = y$

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = u_2 \\ \dfrac{du_2}{dx} = u_2 - u_1 \end{cases} \qquad avec \; u_1(1) = 0 \; et \; u_1(1) = 1$$

L'algorithme d'Euler est :

$$W_{i,j+1} = W_{i,j} + hF_i(x_j, W_{1,j}, W_{2,j}) \; avec \begin{cases} W_{1,0} = 0 \\ W_{2,0} = 1 \end{cases}$$

- Première itération : $j = 0, x_0 = 1 \; et \; i = 1, 2$

$$\begin{cases} W_{1,1} = W_{1,0} + hF_1(x_0, W_{1,0}, W_{2,0}) = W_{1,0} + h * W_{2,0} \\ W_{2,1} = W_{2,0} + hF_2(x_0, W_{1,0}, W_{2,0}) = W_{2,0} + h * (W_{2,0} - W_{1,0}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{1,1} = 0 + 0.2 * 1 = 0.2 \\ W_{2,1} = 1 + 0.2 * (1 - 0) = 0.1.2 \end{cases}, \text{ donc : } \begin{cases} \boldsymbol{W}_{1,1} = 0.2 \\ \boldsymbol{W}_{2,1} = 1.2 \end{cases}$$

- Deuxième itération : $j = 1, x_1 = 1.2 \; et \; i = 1, 2$

$$\begin{cases} W_{1,2} = W_{1,1} + hF_1(x_1, W_{11}, W_{2,1}) = W_{1,1} + h * W_{2,1} \\ W_{2,1} = W_{2,1} + hF_2(x_1, W_{1,1}, W_{2,1}) = W_{2,1} + h * (W_{2,1} - W_{1,1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{1,1} = 0.2 + 0.2 * 1.2 = 0.44 \\ W_{2,1} = 1.2 + 0.2 * (1.2 - 0.2) = 1.4 \end{cases}, \text{ donc : } \begin{cases} \boldsymbol{W}_{1,1} = 0.44 \\ \boldsymbol{W}_{2,1} = 1.4 \end{cases}$$

- La solution finale au point $x = 1.2$ est :

$$y(1.2) = y_1(1.2) + \frac{0.15 - y_1(1.4)}{y_2(1.4)} y_2(1.2) = 0.1 + \frac{0.15 - 0.176}{0.44} 0.2 = 0.088$$

	Système (2)		Système (3)		Système (1)
$x = 1$	0.1	0	0	1	0.1
$x = 1.2$	<u>0.1</u>	0.38	<u>0.2</u>	1.2	<u>0.088</u>
$x = 1.4$	<u>0.176</u>	0.876	<u>0.44</u>	1.4	1.4

Chapitre III : Equations Différentielles aux Dérivées Partielles

3.1) Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) interviennent dans la description de très nombreux problèmes de l'électronique, physique, chimie, sciences de la terre, biologie...
Une équation différentielle aux dérivées partielles (EDP) est une relation fonctionnelle en une fonction de plusieurs variables et ses dérivées. Si on se limite aux EDPs d'ordre 2 à deux variables, ses formes sont :

$$aZ''_{xx} + bZ''_{xy} + cZ''_{yy} + dZ'_x + eZ'_y + fZ + q = 0$$

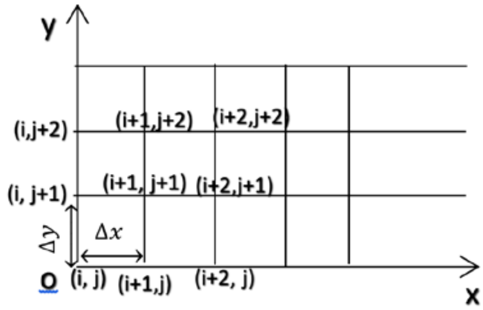
L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus ∂élevé intervenant dans l'∂équation.
Selon le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, on sépare trois types :

- si $\Delta = 0$, l'équation est dite parabolique,
- si $\Delta > 0$, l'équation est dite hyperbolique,
- si $\Delta < 0$, l'équation est dite elliptique.

Pour ces équations, les solutions analytiques (par exemple par la méthode de séparation des variables) ne peuvent être déterminées que dans des cas très simples. Plusieurs méthodes numériques permettent d'approcher les solutions telles que la méthode des éléments finis (MEF), la méthode des volumes finis (MVF), la méthode des intégrales finies (MIF) et la méthode des différences finies (MDF). Seule la méthode MDF est mise en œuvre ci-après pour chaque type d'équations précédents.

3.2) La méthode des différences finies (MDF)

La méthode MDF est très classique, simple à mettre en œuvre et convient pour beaucoup de problèmes rencontrés en pratique. Les calculs sont effectués suivant un maillage obtenu par un double réseau de parallèles aux axes et régulièrement espacées.



L'intersection de deux droites du maillage définit un nœud de cordonnées. Si $\Delta x = \Delta y$ le maillage est dit régulier sinon il est irrégulier.

3.3) Expressions discrètes de la première et deuxième dérivée

En utilisant le développement de Taylor au voisinage du point x_i, on obtient :

a) Première dérivée

- Différence en avant : $u'(x_i) = \frac{u(x_i+h)-u(x_i)}{h} + \theta(h) = \frac{u_{i+1}-u_i}{h}$
- Différence en arrière : $u'(x_i) = \frac{u(x_i)-u(x_i-h)}{h} + \theta(h) = \frac{u_i-u_{i-1}}{h}$
- Différence centrée : $u'(x_i) = \frac{u(x_i+h)-u(x_i-h)}{2h} + \theta(h^2) = \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}$

b) Deuxième dérivée

- Différence en avant : $u''(x_i) = \frac{u(x_i)-2\,u(x_i+h)+u(x_i+2h)}{h^2} + \theta(h) = \frac{u_i - 2\,u_{i+1} + u_{i+2}}{h^2}$
- Différence en arrière : $u''(x_i) = \frac{u(x_i-2h)-2\,u(x_i-h)+u(x_i)}{h^2} + \theta(h) = \frac{u_{i-2} - 2\,u_{i-1} + u_i}{h^2}$
- Différence centrée : $u''(x_i) = \frac{u(x_i-h)-2\,u(x_i)+u(x_i+h)}{h^2} + \theta(h^2) = \frac{u_{i+1} - 2\,u_i + u_{i-1}}{h^2}$

3.4) Equations elliptiques

On distingue deux équations classiques de ce type :

1) Equation de Laplace : $u"_x + u"_y = 0$
2) Equation de Poisson : $u"_x + u"_y + g(x, y) = 0$

En général, ces deux équations décrivent des phénomènes stationnaires non évolutionnaire (ne dépends pas au variable temps ou régime permanent). Par exemple le champ électrique dans un conducteur, les déplacements et les contraintes dans un solide élastique, etc.

La forme canonique d'une équation de type elliptique pour deux variables est :

$$\nabla^2 u = G.$$

Soit un domaine fermé D, avec la frontière S, on définit :

a) Le problème de Dirichlet (position)

$$\nabla^2 u = f \; dans \; D$$
$$u = g \; sur \; S$$

b) Le problème de Neumann (vitesse)

$$\nabla^2 u = f \; dans \; D$$
$$u'_n = g \; sur \; S$$

c) Le problème de Fourier ou mixte (position et vitesse)

$$\nabla^2 u = f \; dans \; D$$
$$u'_n + k\,u = 0 \; sur \; S$$

Dans la suite, on va illustrer la résolution d'un problème elliptique par la méthode des différences finies, en considérant l'exemple ci-dessous.

<u>Exemple</u>

Soit le problème suivant : $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, dans le carré $[0 \le x \le 2 \; et \; 0 \le y \le 3]$, vérifiant les conditions suivantes :

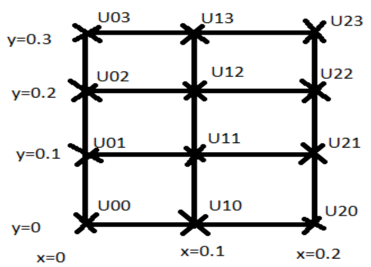
$$U(0, y) = 2y, U(0.2, y) = y + 0.2, U(x, 0) = x \; et \; U(x, 0.3) = 0.6 - 0.5x \,.$$

1) Donner le type du problème, et séparer ses conditions.
2) Résoudre le problème par la méthode MDF en prenant $\Delta x = h = \Delta y = k = 0.1$.

<u>Solution</u>

1) L'équation est de type elliptique et le problème de type de Dirichlet. Dans ce problème on a seulement des conditions aux limites.
2) Pour résoudre ce problème, on doit suivre les étapes ci-après :

   2.1) Tracer le problème : on a $\Delta x = h = \Delta y = k = 0.1$ et $[0 \le x \le 2 \; et \; 0 \le y \le 3]$.



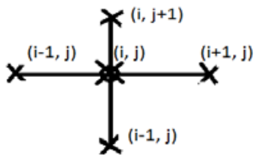
2.2) déterminer les connues et les inconnues par les conditions aux limites.
– à l'aide de $\boldsymbol{U(0,y)=2y}$: $U_{00}=0, U_{01}=0.2, U_{02}=0.4\ et\ U_{03}=0.6$.
– à l'aide de $\boldsymbol{U(0.2,y)=y+0.2}$: $U_{20}=0.2, U_{21}=0.3, U_{22}=0.4\ et\ U_{23}=0.5$.
– à l'aide de $\boldsymbol{U(x,0)=x}$: $U_{00}=0, U_{10}=0.1\ et\ U_{20}=0.2$.
– à l'aide de $\boldsymbol{U(x,0.3)=0.6-0.5x}$: $U_{03}=0.6, U_{13}=0.55\ et\ U_{23}=0.5$.
En remarque que le problème est bien posé.
2.3) détermination des inconnues : les inconnues sont $\boldsymbol{U_{11} et\ U_{12}}$.
2.3) Ecriture de l'algorithme
On remplace les formes discrètes dans la fonction continue, c-à-d, on remplace

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\ par\ \frac{U_{i+1,j}-2\,U_{i,j}+U_{i-1,j}}{h^2}\quad et\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\ par\ \frac{U_{i,j+1}-2\,U_{i,j}+U_{i,j-1}}{k^2}$$

On obtient : $\frac{U_{i+1,j}-2\,U_{i,j}+U_{i-1,j}}{h^2}+\frac{U_{i,j+1}-2\,U_{i,j}+U_{i,j-1}}{k^2}=0\ et\ h=k$, donc :

$$4\,U_{i,j}=U_{i+1,j}+U_{i-1,j}+U_{i,j+1}+U_{i,j-1}$$

La valeur de la fonction au point (i, j) est obtenue en faisant la moyenne arithmétique des valeurs aux points (i+ 1, j), (i−1, j), (i, j+ 1) et (i, j−1). Dont voici la maille du calcul est :



2.4) Calculer les inconnues $(\boldsymbol{U_{11} et\ U_{12}})$: l'intérieur du domaine, on a :

$$\begin{cases} 4U_{11}=U_{21}+U_{01}+U_{12}+U_{10}=0.3+0.2+U_{12}+0.1 \\ 4U_{12}=U_{02}+U_{22}+U_{11}+U_{13}=0.4+0.4+U_{11}+0.55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4U_{11}-U_{12}=0.6 \\ 4U_{12}-U_{11}=1.35 \end{cases}$$

Sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.35 \end{bmatrix}$$

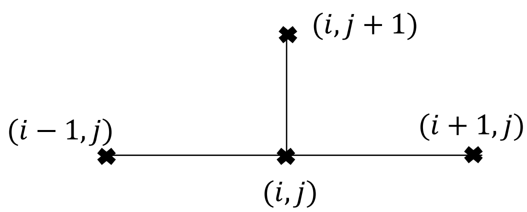
A l''aide de la méthode de Crammer, on trouve $(\boldsymbol{U_{11}=0.25\ et\ U_{12}=0.4})$

3.5) Equations paraboliques

L'équation la plus simple de type parabolique est l'équation de la forme $u'_t=a^2u''_{xx}$. Elle est appelée équation de la chaleur ou équation de Fourier. Pour que la solution de cette équation soit entièrement déterminée, la fonction $u(x,t)$ doit vérifier certaines conditions initiales qui sont les conditions aux limites et conditions à l'instant initial $t=0$. La solution numérique est déterminée soit par le schéma explicite soit par celui implicite à l'aide des formules centrées, en avant, en arrière ou avec une combinaison des formules.

3.5.a) Schéma explicite

Dans le schéma explicite la solution $u_{i,j+1}$ est calculée directement en appliquant le schéma centré sur les termes $u_{i-1,j}, u_{i,j}\ et\ u_{i+1,j}$, dont le système (la maille) de résolution est itératif.



Pour $\begin{cases} u'_t = \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) \\ u''_{xx} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \end{cases}$ *au point* (ih, jk)

On remplace dans l'équation de chaleur : $\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = a^2 * \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$, d'où :

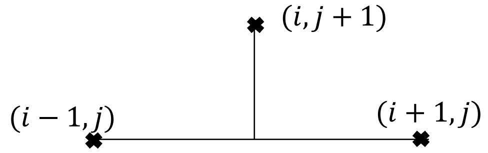
$u_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2ka^2}{h^2}\right)u_{i,j} + \frac{ka^2}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$, en posant $r = \frac{ka^2}{h^2}$, la formule précédente devient :

$$\boldsymbol{u_{i,j+1} = u_{i,j} + r(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})}$$

Ce schéma est stable pour $r \leq 0.5$ et instable pour $r > 0.5$ dont les erreurs s'amplifier rapidement. Pour $r = 0.5$, alors :

$$\boldsymbol{u_{i,j+1} = 0.5(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})}$$

La maille du calcul est donc :



3.5.b) Schéma implicite

Dans ce schéma, on approche la dérivée u''_{xx} au temps $(t = (j+1)k)$ au lieu du point $t = jk$ et pour obtenir la solution, il faut résoudre un système d'équations linéaires. L'équation de chaleur est alors : $\frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j})}{k} = a^2 \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}$, d'où :

$u_{i,j} = -r\, u_{i-1,j+1} + (1 + 2r)u_{i,j+1} - r\, u_{i+1,j+1}$ avec $r = \frac{a^2 k}{h^2}$.

Ce schéma est inconditionnellement stable c.-à-d. il est stable quel que soit r.

<u>Exemple</u>

On étude la température à l'intérieur d'un système électronique où on maintient ses limites à température 0°c avec :

$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx} & pour\ 0 \leq x \leq 1 \\ u(x,0) = 2x & pour\ 0 \leq x \leq 0.5 \\ u(x,0) = 2(1-x) & pour\ 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

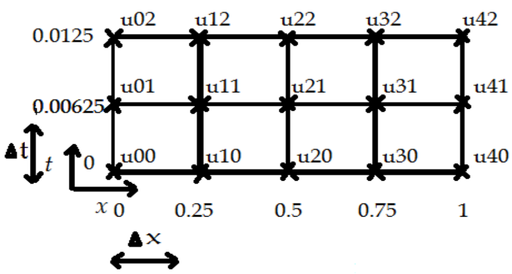
- Résoudre le problème avec la méthode MDF en utilisant le schéma explicite avec $r = 0.1, \Delta x = h = 0.25\ et\ 0 \leq t \leq 0.0125.$

<u>Solution</u>

1) Tracer le problème : on a $r = 0.1, \Delta x = h = 0.25\ et\ 0 \leq t \leq 0.0125.$ On détermine k pour limiter l'axe temporel.

$$r = \frac{a^2 k}{h^2} \rightarrow k = \Delta t = \frac{r\, h^2}{a^2}\ avec\ a = 1\ dan\ ce\ cas.$$

$$k = \Delta t = \frac{0.1\ \ 0.25^2}{1^2} = 0.00625$$ (0.0125/0.00624=2 c-à-d on a deux itérations)



2) déterminer les connues du problème.

− à l'aide de $u(x,0) = 2x \; pour \; 0 \le x \le 0.5$: $u_{00} = 2 \times 0 = 0, u_{10} = 2 \times 0.25 = 0.5, u_{20} = 2 \times 0.5 = 1.$

− à l'aide de $u(x,0) = 2(1-x) \; pour \; 0.5 < x \le 1$: $u_{30} = 2 \times (1 - 0.75) = 0.5, u_{40} = 2 \times (1-1) = 0.$

− à l'aide de la condition (on maintient ses limites à 0°c) c-à-d $u(0,t) = u(1,t) = 0 \; pour \; 0 \le t \le 0.0125$: $u_{00} = u_{01} = u_{02} = u_{40} = u_{41} = u_{42} = 0.$

Le problème est bien posé.

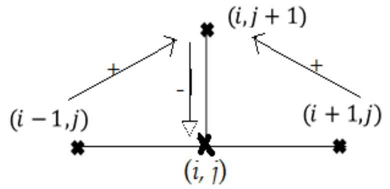
3) détermination des inconnues : les inconnues sont $u_{11}, u_{21}, u_{31}; u_{12}, u_{22}, u_{32}$.

4) Ecriture de l'algorithme :

L'algorithme est :

$$\boldsymbol{u_{i,j+1} = u_{i,j} + r\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right)}$$

Pour $r = 0.1$, l'algorithme devient : $\boldsymbol{u_{i,j+1} = u_{i,j} + 0.1} \times \left(\boldsymbol{u_{i+1,j}} - 2\boldsymbol{u_{i,j}} + \boldsymbol{u_{i-1,j}}\right)$, et la maille du calcul est :



4) Calculer les inconnues $(u_{11}, u_{21}, u_{31}; u_{12}, u_{22}, u_{32})$:

4.1) Première itération : $j = 0, i = 1, 2, 3.$

− pour $i = 1$

$$u_{11} = u_{10} + 0.1(u_{20} - 2\,u_{10} + u_{00}) = 0.5 + 0.1(1 - 2 \times 0.5 + 0) = 0.5$$
$$\boldsymbol{u_{11} = 0.5}$$

− pour $i = 2$

$$u_{21} = u_{20} + 0.1(u_{30} - 2\,u_{20} + u_{10}) = 1 + 0.1(0.5 - 2 \times 1 + 0.5) = 0.9$$
$$\boldsymbol{u_{21} = 0.9}$$

− pour $i = 3$

$$u_{31} = u_{30} + 0.1(u_{40} - 2\,u_{30} + u_{20}) = 0.5 + 0.1(0 - 2 \times 0.5 + 1) = 0.5$$
$$\boldsymbol{u_{31} = 0.5}$$

4.1) Deuxième itération : $j = 1, i = 1, 2, 3.$

− pour $i = 1$

$$u_{12} = u_{11} + 0.1(u_{21} - 2\,u_{11} + u_{01}) = 0.5 + 0.1(0.9 - 2 \times 0.5 + 0) = 0.49$$
$$\boldsymbol{u_{32} = 0.49}$$

− pour $i = 2$

$$u_{22} = u_{21} + 0.1(u_{31} - 2\,u_{21} + u_{11}) = 0.9 + 0.1(0.5 - 2 \times 0.9 + 0.5) = 0.82$$
$$\boldsymbol{u_{22} = 0.82}$$

− pour $i = 3$

$$u_{32} = u_{31} + 0.1(u_{41} - 2\,u_{31} + u_{21}) = 0.5 + 0.1(0 - 2 \times 0.5 + 0.9) = 0.49$$
$$\boldsymbol{u_{32} = 0.49}$$

3.6) Equation hyperbolique

La plus simple équation de type hyperbolique est l'équation d'onde, sa forme générale est : $u''_{tt} = c^2 u''_{xx}$ avec c est la vitesse de propagation.

Ces équations dépendent souvent du temps c'est pourquoi on les appelle souvent équations d'évolution ou équations dynamiques.

Pour obtenir la solution $u(x,t)$ de ce type d'équation, il faut avoir des conditions supplémentaires :

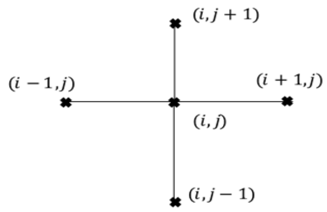
a) des conditions aux limites : $u(0,t) \; et \; u(L,t)$, L est la dimension du problème.
b) des conditions initiales ou l'état de la solution à l'instant $t = 0$:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u'(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Utilisant le schéma centré pour remplacer les dérivées de l'équation d'onde : $u''_{tt} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$ et $u''_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{-1i,j}}{h^2}$, remplacer ces quantités discrètes dans l'équation d'onde, on obtient le schéma explicite :

$$u_{i,j+1} = r^2 u_{i-1,j} + 2(1 - r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i+1,j} - u_{i,j-1})\ avec\ r = \frac{ck}{h}$$

La maille du calcul est :



Cet algorithme est stable pour $r \leq 1$. Pour $r = 1$, l'algorithme devient donc :

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1}$$

Pour lancer l'algorithme, les valeurs $(u_{0,0} + u_{1,0}, \dots, u_{N,0})$ sont calculées à partir de la condition initiale $u(x,0)$ et les valeurs $(u_{0,1} et\ u_{N,1})$ sont calculées par $u(0,t)\ et\ u(L,t)$.

Dans la première itération l'algorithme fait appel à des points appelés points fictifs $(u_{i,-1}\ pour\ j = 0)$. Ces points sont trouvés en utilisant la condition initiale de vitesse $u'_t(x,0) = g(x)$.

<u>Exemple</u>

Soit l'équation d'onde : $u''_{tt} = 16\, u''_{xx}$, avec les conditions suivantes :

$$\begin{cases} u(1,t) = t + 1, & t \geq 0 \\ u(2.6,t) = 1.8 + t, & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(x,0) = 0.5 + \frac{x}{2} \\ u'_t(x,0) = \frac{x}{2} \end{cases}$$

1) Séparer les conditions du problème précédent.
2) Trouver la solution pour $r = 1, \Delta x = 0.4\ et\ 0 \leq t \leq 0.1S$.

<u>Solution</u>

1) Séparation des conditions :

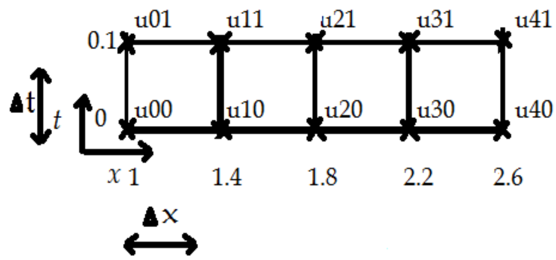
- Les conditions initiales sont : $\begin{cases} u(x,0) = 0.5 + \frac{x}{2} \\ u'_t(x,0) = \frac{x}{2} \end{cases}$.
- Les conditions aux limites sont : $\begin{cases} u(1,t) = t + 1 \\ u(2.6,t) = 1.8 + t \end{cases}$.

2) La solution pour $r = 1, \Delta x = 0.4\ et\ 0 \leq t \leq 0.1S$.

2.1) Tracer le problème : on a $c = 4, r = 1$. On détermine k=Δt pour limiter l'axe temporel.

$$r = c\frac{k}{h} \rightarrow k = \frac{r\,h}{c}\ avec\ c = 4\ dan\ ce\ cas.$$

$$k = \Delta t = \frac{1 \times 0.4}{4} = 0.1$$ (0.1/0.1=1 c-à-d on a seulement une seule itération)



2.2) déterminer les connues du problème.

− à l'aide de $u(1,t) = t + 1$: $u_{00} = 0 + 1 = 1, u_{01} = 0.1 \times 1 = 1.1$.

− à l'aide de $u(2.6,t) = 1.8 + t$: $u_{40} = 1.8, u_{41} = 1.8$.

− à l'aide de $u(x,0) = 0.5 + \frac{x}{2}$: $u_{00} = 1, u_{10} = 1.2, u_{20} = 1.4, u_{30} = 1.6, u_{40} = 1.8$.

Le problème est bien posé.

2.3) détermination des inconnues : les inconnues sont $u_{11}, u_{21} et\ u_{31}$.

2.4) Ecriture de l'algorithme :

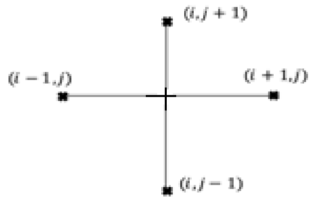
L'algorithme est :

$$u_{i,j+1} = r^2 u_{i-1,j} + 2(1 - r^2) u_{i,j} + r^2 (u_{i+1,j} - u_{i,j-1}) avec\ r = \frac{ck}{h}$$

Pour r =1

$$\boldsymbol{u_{i,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1}}$$

La maille du calcul est :



2.5) Calculer les inconnues ($u_{11}, u_{21} et\ u_{31}$) :

4.1) Première itération : $j = 0, i = 1, 2, 3$.

- Pour $i = 1$

$$u_{11} = u_{00} + u_{20} - u_{1-1}$$

u_{1-1} est point fictif (hors domaine du calcul), on va utiliser la condition $u'_t(x,0) = \frac{x}{2}$. pour l'éliminer.

$$u'_t = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} = \frac{x_i}{2}$$

$$donc: u_{i,j-1} = u_{i,j+1} - 2k\frac{x_i}{2} \qquad \rightarrow \qquad u_{i,j-1} = u_{i,j+1} - kx_i$$

$u_{1,-1} = u_{1,1} - kx_1$, on remplace dans u_{11}

$u_{11} = u_{00} + u_{20} - (u_{1,1} - kx_1), donc$: $u_{11} = 0.5(u_{00} + u_{20} + kx_1)$ avec k=0.1 et $x_1 = 1.4$.

$$u_{11} = 0.5(1 + 1.4 + 0.1 \times 1.4)$$

$$u_{11} = 1.27.$$

- Pour $i = 2$

$$u_{21} = u_{10} + u_{30} - u_{2-1}$$

u_{2-1} est point fictif. $u_{2,-1} = u_{2,1} - kx_2$, on remplace dans u_{21}

$u_{21} = 0.5(u_{10} + u_{30} + kx_2)$ avec k=0.1 et $x_1 = 1.8$.

$$u_{21} = 0.5(1.2 + 1.6 + 0.1 \times 1.8)$$

$$u_{21} = 1.49.$$

- Pour $i = 3$

$$u_{31} = u_{20} + u_{40} - u_{3-1}$$

u_{3-1} est point fictif. $u_{3,-1} = u_{3,1} - kx_3$, on remplace dans u_{31}

$u_{31} = 0.5(u_{20} + u_{40} + k3)$ avec k=0.1 et $x_1 = 2.2$.

$$u_{31} = 0.5(1.4 + 1.8 + 0.1 \times 2.2)$$

$$u_{31} = 1.71.$$

Chapitre IV : Introduction à l'Optimisation Numérique

1) Introduction

L'optimisation numérique est une branche des mathématiques permettant de choisir automatiquement la meilleure solution parmi un ensemble de solutions possibles. Les applications possibles couvrent des domaines variés de la recherche opérationnelle aux statistiques et bien sûr l'industrie.

Résoudre un problème d'optimisation numérique signifie trouver les meilleurs paramètres (ou variables de contrôle) résolvant le problème à minimiser (ou à maximiser) une quantité mathématique donnée, appelée fonction objectif (ou critère). Cette fonction objectif peut être sujette à des contraintes (conditions).

Dans tous les problèmes d'optimisation, il est nécessaire d'avoir modélisé (mis en équations) la grandeur qu'on cherche à minimiser ou maximiser.

La classification des problèmes d'optimisation change d'un auteur à l'autre. On peut distinguer :

- Les problèmes d'optimisation avec et sans contrainte.
- Les problèmes d'optimisation continue ou discrète.
- Les problèmes d'optimisation mono-objectif ou multi-objectif.
- Les problèmes d'optimisation déterministe ou stochastique.

Dans cette partie, on se limitera au problème d'optimisation mono-objectif à variables continues avec et sans contrainte selon une approche déterministe.

2) Example

Un étudiant cherche à obtenir les meilleures notes possibles à une unité composée de trois matières, et qu'il révise (x_i) heures sur la i^{ème} matière, i=1, 2, 3.

Supposons que la note (n_i) de la matière (i) dépend uniquement du temps passé (x_i) par exemple : $n_1(x_1) = x_1$, $n_2(x_2) = 2x_2$, $n_3(x_3) = x_3^2$.

Cet étudiant veut passer au plus (10 heures) au total à réviser et veut optimiser sa moyenne totale. On note $x = (x_1, x_2, x_3)$ le triplet qui correspond aux heures passées à travailler, et on note $f(x) = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + x_3^2)$ sa moyenne. D'après les données du problème (x) ne peut pas prendre n'importe quelles valeurs réelles, on dit que le problème est avec (contraint). En effet (x) doit appartenir à (X), l'ensemble des contraintes :

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \forall i, x_i \geq 0 \text{ et } x_1 + x_2 + x_3 \leq 10\}$$

On note le problème de l'étudiant :

$$\max_{x \in X} f(x)$$

Dans cet exemple d'optimisation, on distingue trois étapes :

a) Identification des variables de décisions (désignées par le vecteur $x \in R^3$) : ce sont les paramètres sur lesquels l'utilisateur peut agir pour faire évoluer le système considéré.

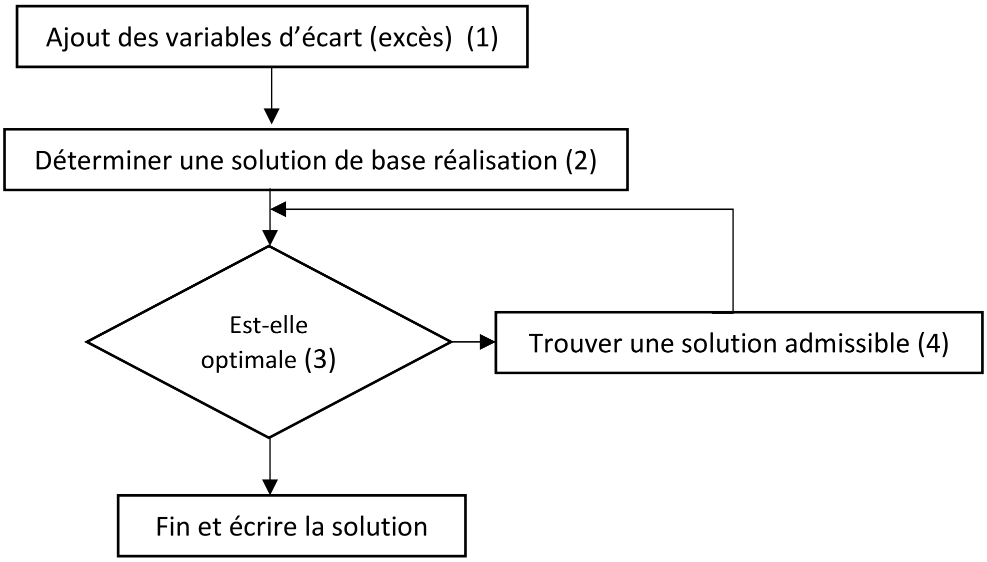
b) Définition d'une fonction coût ou fonction objectif (la fonction f dans l'exemple) permettant d'évaluer l'état du système (rendement, performance, ⋯).

c) Description des contraintes imposées aux variables de décision (l'ensemble X).

Donc, un problème d'optimisation consiste alors à déterminer les variables de décision conduisant aux meilleures conditions de fonctionnement du système (ce qui revient à minimiser ou maximiser la fonction coût), tout en respectant les contraintes d'utilisation.

3) Algorithme du simplexe (avec contrainte)

L'algorithme du simplexe est un algorithme de résolution des problèmes d'optimisation linéaire. Il a été introduit par George Dantzig en 1947. Cet algorithme est donné par :



L'étape (4) est composée de :
- Tableau de la solution,
- Variable entrante (colonne pivot : plus basse entre les négatifs $\min(z)$),
- Variable sortante (ligne pivot : $\min(k)_{positifs}$),
- Mise à jour du tableau,
- Critère de sortie.

<u>Exemple</u>

Trouver la solution du problème :

$$\max\ z = 4x_1 + 3x_2 \quad avec \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ 4x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

<u>Solution</u>

1) **Ajout des variables d'écart :** on ajoute deux variables (x_3, x_4)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 21 \\ 4x_1 - x_2 + x_4 = 12 \\ z - 4x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}, \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

2) **La solution de base réalisation : généralement on prend $x_1 = 0\ et\ x_2 = 0$.**

Donc $\begin{cases} x_3 = 21 \\ x_4 = 12 \\ z = 0 \end{cases}$, cette solution elle n'est pas optimale.

3) Tableaux de la solution

a.1) Première itération

	x_1	x_2	x_3	x_4	C	K
x_3	3	2	1	0	21	
x_4	4	−1	0	1	12	
Z	−4	−3	0	0	0	

L_p C_p

base

hors base

a.2) Colone pivot (variable entrante) :

$$min(z) = -4 \rightarrow C_p = x_1.$$

a.3) Ligne pivot (variable sortante) :

$$K = \frac{C}{(C_p = x_1)_p}$$

$$min_{positif}(K) = 3 \rightarrow L_p = x_4.$$

$$et\ pivot = 4.$$

a.4) Actualiser le tableau de solution :

	x_1	x_2	x_3	x_4	C	K
x_3	0	$^{11}/_4$	1	$^{-3}/_4$	12	$^{48}/_{11}$
x_1	1	$^{-1}/_4$	0	$^{1}/_4$	3	−12
Z	0	−4	0	1	12	−3

L_p C_p

$coef(z) \geq 0\ \ ?, non. \quad donc, la\ solution\ n'est\ pas\ optimale.$

b.1) Deuxième itération

b.2) Colone pivot (variable entrante) :

$$min(z) = -4 \rightarrow C_p = x_2.$$

b.3) Ligne pivot (variable sortante) :

$$K = \frac{C}{(C_p = x_2)_p}$$

$$min_{positif}(K) = \frac{48}{11} \rightarrow L_p = x_3.$$

$$et\ pivot = \frac{11}{4}.$$

b.4) Actualiser le tableau de solution :

	x_1	x_2	x_3	x_4	C	K
x_2	0	1	$^{4}/_{11}$	$^{-12}/_{11}$	$^{48}/_{11}$	
x_1	1	0	$^{4}/_{44}$	$^{-1}/_{44}$	$^{180}/_{44}$	
Z	0	0	$^{16}/_{11}$	$^{-37}/_{11}$	$^{324}/_{11}$	

$Après\ deux\ itérations:\ coef(z) \geq 0\ \ ?, oui. \quad donc, la\ solution\ est\ optimale.$

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{180}{44}, x_2 = \frac{48}{11}\ et\ z = \frac{324}{11}}$$

4) Algorithme de gradient (sans contrainte)

Cette méthode consiste à passer d'un estimé d'un estimé $X^{(k)}$ à la solution exacte X^* par l'algorithme :
$X^{(k+1)} = X^{(k)} - t^{(k)}\,\nabla f(X^{(k)})$, jusqu'à ce que $\|\nabla f(X^{(k+1)})\| < e$, et $t^{(k)}$ est le pas à déterminer par la méthode pas optimal, on détermine $t^{(k)}$ minimisant $f(X^{(k+1)})$. Ou par la méthode de descente, on choisit $t^{(k)}$ tel que $f(X^{(k+1)}) < f(X^{(k)})$.

<u>Exemple</u>

Soit la fonction de deux variables : $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - y + 1$.

1) Calculer la valeur exacte X^* du point de minimum de cette fonction.
2) Utiliser deux itérations pour minimiser cette fonction par la méthode du gradient en partant du point initial $X^{(0)} = [0.1 \quad 0.1]^t$.

<u>Solution</u>

1) La valeur exacte X^*

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - 2 & = 0 \\ f'_y = 2y - 1 & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1/2 \end{cases}$$

Donc la valeur exacte $X^* = \begin{cases} x = 1 \\ y = 1/2 \end{cases}$ et la valeur minimale égale à $f = -0.25$

2) Algorithme du gradient

2.1) Ecriture de l'algorithme

L'algorithme est : $X^{(k+1)} = X^{(k)} - t^{(k)}\,\nabla f(X^{(k)})$.

2.2) Détermination de $t^{(k)}$

Mettant $\nabla f(X) = -P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2x \\ 1-2y \end{bmatrix}$

$f\left(X^{(k+1)}\right) = f(X^{(k)} + t^{(k)}\,P) = (x + t\,p_1)^2 + (y + t\,p_2)^2 - 2(x + t\,p_1) \quad - (y + t\,p_2) \quad + 1.$

Cette fonction est minimale pour $f'_t = 0$.

$$f'_t = 2\,p_1(x + t\,p_1) + 2\,p_2\,(y + t\,p_2) - 2p_1 - p_2 = 0$$

Donc : $t^{(k)} = \frac{p_2 + 2\,p_1 - 2\,p_1 x - 2\,p_2 y}{2p_1^2 + 2p_2^2}$.

2.3) Première itération

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2x \\ 1 - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2 \times 0.1 \\ 1 - 2 \times 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

et $t^{(0)} = \frac{0.8 + 2\times1.8 - 2\times1.8\times0.1 - 2\times0.8\times0.1}{2\times(1.8)^2 + 2\times(0.8)^2} = 0.5$.

$$X^{(1)} = X^{(0)} + t^{(0)}P = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} + 0.5 \times \begin{bmatrix} 1.8 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X^{(1)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0.5} \end{bmatrix}$$

2.4) Deuxième itération

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2x \\ 1-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2\times 1 \\ 1-2\times 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et $t^{(1)} = 0.5$.

$$X^{(2)} = X^{(1)} + t^{(1)}P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} + 0.5 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X^{(2)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0.5} \end{bmatrix}$$

La solution estimée après deux itérations est donc : $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0.5} \end{bmatrix}$ et l'erreur d'estimation e =0.

Références bibliographiques

[1] M. Crouzeix, AL Mignot, Analyse numérique des équations différentielles, Masson, 1984.
[2] P. Lascaux, R. Théodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Tomes 1 et 2 Masson 1986.
[3] I. Chtcherbatski, Analyse numérique : cours et problème, Offices des publications universitaires, Alger, 1993.
[4] J. Bastien, Introduction à l'analyse numérique-applications sous Matlab, Dunod, 2003.
[5] G. Allaire, Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique, Ellipses, 2005.
[6] F. Jedrzejewski, Introduction aux méthodes numériques, Springer, 2005.
[7] P.G. Ciarlet, Introduction et analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Dunod, 2007.
[8] A. Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs, 3eéd. Presses internationales polytechniques, 2008.
[9] E. Canon, Analyse numérique, cours et exercices corrigés, Vuibert, Paris, 2012.