

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BENYAHIA DE JIJEL  
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE



SUPPORT DE COURS

# Transfert Thermique

Destiné aux:  
Etudiants de 3<sup>ème</sup> année Licence Electromécanique

Préparé par:  
Ilhem HAFSAOUI née BOUTANA

2017/2018

## **AVANT – PROPOS**

*Ce cours « Transfert Thermique » s'adresse aux étudiants LMD dans le cadre de Licence Electromécanique, mais aussi à ceux qui souhaitent acquérir les notions de base des phénomènes de transfert de chaleur. Il présente les principaux modes de transferts thermiques et comporte un chapitre sur le calcul simple d'un exemple d'échangeur de chaleur.*

*Cet ouvrage est le fruit d'une longue expérience d'enseignement de cette matière dans les années passées au département d'Electrotechnique, Faculté des sciences et de la technologie de l'université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel.*

*Les phénomènes de transfert thermique sont d'une importance capitale dans le domaine de sciences et technologie car ils interviennent dans de nombreux domaines industriels.*

*Ce cours se propose de donner une compréhension générale de ces phénomènes tout en exposant les lois fondamentales décrivant les trois modes de transfert de chaleur : Conduction, Convection et Rayonnement ainsi que l'initiation des étudiants aux calculs des échangeurs de chaleur, systèmes sièges de différents transferts de flux de chaleur.*

**I. HAFSAOUI Née BOUTANA**

# SOMMAIRE

<b>1. GENERALITES SUR LES TRANSFERTS DE CHALEUR .....</b>	<b>6</b>
1.1. INTRODUCTION .....	6
1.2. DEFINITIONS .....	6
1.2.1. <i>Notion de chaleur</i> .....	6
1.2.2. <i>Champ de température</i> .....	6
1.2.3. <i>Surfaces isothermes</i> .....	6
1.2.4. <i>Gradient de température</i> .....	7
1.2.5. <i>Flux et densité du flux de chaleur</i> .....	7
1.2.6. <i>Lignes et tube de courant</i> .....	7
1.3. FORMULATION D'UN PROBLEME DE TRANSFERT DE CHALEUR .....	8
1.3.1. <i>Bilan d'énergie</i> .....	8
1.3.2. <i>Expression des flux d'énergie</i> .....	8
<b>2. TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION EN REGIME PERMANENT .....</b>	<b>12</b>
2.1. INTRODUCTION .....	12
2.2. LOI DE FOURRIER .....	12
2.2.1. <i>Enoncé</i> .....	12
2.2.2. <i>Orthogonalité du gradient de température et l'isotherme</i> .....	12
2.3. RESISTANCE THERMIQUE .....	12
2.3.1. <i>Cas d'un mur</i> .....	12
2.3.2. <i>Résistance thermique de dispositifs à géométrie circulaire</i> .....	13
2.3.3. <i>Résistance thermique de dispositifs à géométrie sphérique</i> .....	14
2.3.4. <i>Association de résistances thermiques</i> .....	14
2.3.5. <i>Résistance d'un mur simple non homogène</i> .....	15
2.4. L'EQUATION DE LA CHALEUR .....	16
2.4.1. <i>Différentes formes de l'équation de la chaleur</i> .....	16
2.4.2. <i>Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques</i> .....	16
2.4.3. <i>Equation de la chaleur en coordonnées sphériques</i> .....	16
2.5. TRANSFERT CONDUCTIF UNIDIRECTIONNEL .....	17
2.5.1. <i>Mur simple</i> .....	17
2.5.2. <i>Mur multicouches</i> .....	17
2.5.3. <i>Mur composite</i> .....	18
2.5.4. <i>Cylindre creux</i> .....	18
2.5.5. <i>Cylindre creux multicouches</i> .....	19
2.6. TRANSFERT CONDUCTIF MULTIDIRECTIONNEL .....	19
2.6.1. <i>Méthode du coefficient de forme</i> .....	19
2.6.2. <i>Méthodes numériques</i> .....	20
2.7. LES AILETTES .....	20
2.7.1. <i>L'équation de la barre</i> .....	20
2.7.2. <i>Flux extrait par une ailette</i> .....	21
2.7.3. <i>Efficacité d'une ailette</i> .....	22
2.7.4. <i>Choix des ailettes</i> .....	22
<b>3. TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION EN REGIME VARIABLE .....</b>	<b>24</b>
3.1. INTRODUCTION .....	24
3.2. CONDUCTION UNIDIRECTIONNELLE EN REGIME VARIABLE SANS CHANGEMENT D'ETAT .....	24
3.2.1. <i>Problème général</i> .....	24
3.2.2. <i>Nombres sans dimension</i> .....	24

3.2.3.	<i>Quelques cas d'école</i> .....	25
3.3.	CONDUCTION UNIDIRECTIONNELLE EN REGIME VARIABLE AVEC CHANGEMENT D'ETAT.....	30
3.4.	CONDUCTION MULTIDIRECTIONNELLE EN REGIME VARIABLE.....	31
3.4.1.	<i>Théorème de Von Neuman</i> .....	31
<b>4.</b>	<b>TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT</b> .....	<b>33</b>
4.1.	INTRODUCTION .....	33
4.2.	CLASSIFICATIONS .....	33
4.2.1.	<i>Selon la composition spectrale du rayonnement</i> .....	33
4.2.2.	<i>Selon la distribution spatiale du rayonnement</i> .....	33
4.3.	DEFINITIONS .....	34
4.3.1.	<i>Grandeurs relatives aux sources</i> .....	34
4.3.2.	<i>Grandeurs relatives aux récepteurs</i> .....	35
4.3.3.	<i>Corps transparent</i> .....	36
4.3.4.	<i>Corps opaques</i> .....	36
4.3.5.	<i>Corps noir</i> .....	36
4.3.6.	<i>Corps gris</i> .....	36
4.4.	LOIS DU RAYONNEMENT THERMIQUE .....	36
4.4.1.	<i>Loi de Lambert</i> .....	36
4.4.2.	<i>Autres lois physiques</i> .....	36
<b>5.</b>	<b>TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION</b> .....	<b>40</b>
5.1.	INTRODUCTION .....	40
5.2.	RAPPELS SUR L'ANALYSE DIMENSIONNELLE .....	40
5.2.1.	<i>Grandeurs fondamentales</i> .....	40
5.2.2.	<i>Nombres sans dimension</i> .....	41
5.3.	CONVECTION SANS CHANGEMENT D'ETAT .....	42
5.3.1.	<i>Convection forcée</i> .....	42
5.3.2.	<i>Convection naturelle</i> .....	44
5.4.	CONVECTION AVEC CHANGEMENT D'ETAT .....	45
5.4.1.	<i>Condensation</i> .....	45
5.4.2.	<i>Ebullition</i> .....	45
<b>6.</b>	<b>EXEMPLE DE DIMENSIONNEMENT DES ECHANGEURS DE CHALEUR</b> .....	<b>47</b>
6.1.	INTRODUCTION .....	47
6.2.	CLASSIFICATION .....	47
6.3.	DEFINITIONS .....	49
6.3.1.	<i>Efficacité d'un échangeur</i> .....	49
6.3.2.	<i>Rendement d'un échangeur</i> .....	49
6.4.	HYPOTHESES.....	49
6.5.	CONVENTIONS .....	49
6.6.	EXEMPLE DE CALCUL D'ECHANGEUR THERMIQUE .....	49
6.6.1.	<i>Calcul de la puissance totale de l'échangeur</i> .....	50
6.6.2.	<i>Calcul de la surface de l'échangeur</i> .....	50
6.6.3.	<i>Calcul de la différence de température logarithmique moyenne</i> .....	50
6.6.4.	<i>Calcul du coefficient K</i> .....	51
<b>ANNEXES</b> .....		<b>52</b>
ANNEXE A :	OPERATEURS DIFFERENTIELS .....	52
ANNEXE B :	UNITES THERMIQUES .....	56
ANNEXE C :	CONDUCTIVITES THERMIQUES.....	57
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....		<b>58</b>

# **CHAPITRE 1**

**Généralités sur les transferts de chaleur**

## 1. GENERALITES SUR LES TRANSFERTS DE CHALEUR

### 1.1. Introduction

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre.

La thermique (ou thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

Les domaines d'application de la thermique sont très variées et concernent principalement :

- L'énergie (machines à vapeur, turbines, réacteurs nucléaires ...)
- Le chauffage (fours, micro ondes ...)
- L'industrie du froid
- La construction (chauffage, climatisation ...)

### 1.2. Définitions

#### 1.2.1. Notion de chaleur

On appelle chaleur, une forme particulière de l'énergie. Selon le premier principe de la thermodynamique, la chaleur est équivalente à un travail, d'où ils ont une même unité : le Joule.

Le transfert de chaleur d'un milieu à un autre, s'effectue sous forme d'énergie cinétique d'agitation moléculaire désordonnée. Ce transfert est le fait d'une différence de température entre les deux milieux. La chaleur se propage spontanément du milieu le plus chaud vers celui ayant la température la plus basse, tout en gardant le volume constant. Ce ci constitue le second principe de la thermodynamique.

#### 1.2.2. Champ de température

On appelle température la grandeur physique qui mesure le degré de chaleur d'un milieu. Les transferts de chaleur sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la grandeur scalaire température :  $T = f(x,y,z,t)$ .

Le régime est permanent ou stationnaire si le champ de température est indépendant du temps  $T = f(x,y,z)$ . Dans le cas contraire, il est dit variable ou transitoire.

#### 1.2.3. Surfaces isothermes

Le lieu des points ayant à chaque instant la même température est appelé surface isotherme.

Deux surfaces isothermes ne peuvent se couper car on aurait alors deux températures différentes en un même point ce qui est physiquement impossible.

- En régime permanent : Les surfaces isothermes sont invariables.
- En régime variable : Elles sont mobiles et déformables.

#### 1.2.4. Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \vec{n} \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{I.1})$$

$\vec{n}$  Vecteur unitaire de la normale

$\frac{\partial T}{\partial n}$  Dérivée de la température le long de la normale.

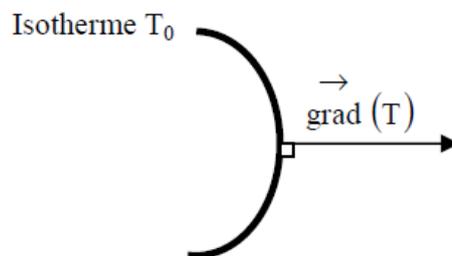


Figure I.1 : Orthogonalité du gradient et de l'isotherme

#### 1.2.5. Flux et densité du flux de chaleur

Le flux est un débit de chaleur. C'est la puissance échangée par une surface S par unité de temps :

$$\phi = \frac{dQ}{dt} [W] \quad (\text{I.2})$$

La densité du flux thermique est la quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme :

$$\varphi = \frac{dQ}{S \cdot dt} = \frac{\phi}{S} [W/m^2] \quad (\text{I.3})$$

#### 1.2.6. Lignes et tube de courant

Connaissant les densités de flux thermique  $\vec{\varphi}$ , on peut tracer, à chaque instant t, les courbes tangentes à ces vecteurs, appelées : **lignes de courant**.

L'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé constitue un **tube de courant**.

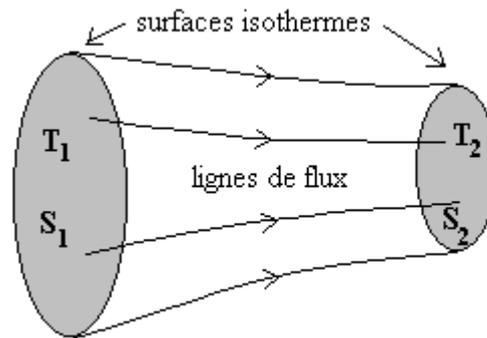


Figure I.2 : Lignes et tube de courant

### 1.3. Formulation d'un problème de transfert de chaleur

#### 1.3.1. Bilan d'énergie

Soit un système (S) défini par ses limites dans l'espace. Pour établir le bilan d'énergie de (S), on applique le 1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique :

$$\varphi_e + \varphi_g = \varphi_s + \varphi_{st} \quad (I.4)$$

Avec :

- $\varphi_{st}$  : Flux de chaleur stocké,
- $\varphi_g$  Flux de chaleur généré,
- $\varphi_e$  : Flux de chaleur entrant
- $\varphi_s$  : Flux de chaleur sortant

Il faut ensuite établir les expressions des différents flux d'énergie. En reportant ces expressions dans le bilan énergétique, on obtient l'équation différentielle dont la résolution permet de connaître l'évolution de la température en chaque point du système.

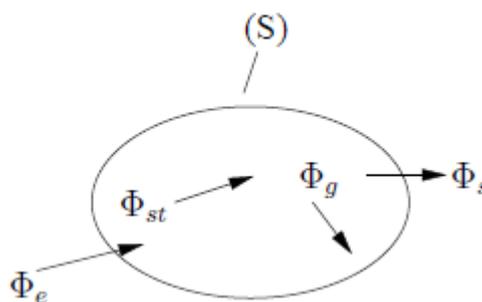


Figure I.3 : Bilan énergétique

#### 1.3.2. Expression des flux d'énergie

Il faut ensuite établir les expressions des différents flux d'énergie. En reportant ces expressions dans le bilan d'énergie, on obtient l'équation différentielle dont la résolution permet de connaître l'évolution de la température en chaque point du système.

• **Flux de chaleur lié à un débit massique**

Lorsqu'un débit massique  $\dot{m}$  de matière entre dans le système à la température  $T_1$  et en ressort à la température  $T_2$ , on doit considérer dans le bilan un flux de chaleur entrant correspondant :

$$\phi_e = \dot{m} C_p (T_1 - T_2) \quad (I.5)$$

Avec :

$\phi_e$  : Flux de chaleur entrant dans le système (W)

$\dot{m}$  : Débit massique ( $\text{kg.s}^{-1}$ )

$C_p$  : Chaleur spécifique ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )

$T_1, T_2$  : Températures d'entrée et de sortie (K)

• **Flux de chaleur transmis (sortant)**

Selon le mode de transfert de chaleur (conduction, convection ou rayonnement), le flux thermique est exprimé en fonction de la température.

➤ Dans le cas de la conduction, le flux est proportionnel au gradient de la température, selon la loi de Fourier :

$$\vec{\phi}_s = -\lambda . S . \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (I.6)$$

Avec :

$\phi_s$  : Flux de chaleur transmis par conduction.

$\lambda$  : Conductivité thermique du milieu.

$S$  : Aire de la surface de transfert du flux.

➤ Dans le cas de la convection, ce mécanisme de transfert thermique est régi par la loi de Newton :

$$\phi_s = h . S . (T_p - T_\infty) \quad (I.7)$$

Avec :

$\phi_s$  : Flux de chaleur transmis par convection.

$h$  : Coefficient de transfert thermique convectif.

$T_p$  : Température de paroi (de surface) du solide.

$T_\infty$  : Température du fluide.

$S$  : Aire de la surface de contact solide/fluide.

➤ Dans le cas du rayonnement : C'est un transfert d'énergie électromagnétique à distance entre deux corps :

$$\phi_s = \sigma . \epsilon_p . S . (T_p^4 - T_\infty^4) \quad (I.8)$$

Avec :

$\phi_s$  : Flux de chaleur transmis par Rayonnement.

$\sigma$  : Constante de Stephan =  $5,67.10^{-8}$ .

$\epsilon_p$  : Facteur d'émission de la surface.

$T_p$  : Température de la surface.

$T_{\infty}$  : Température du milieu environnant la surface.

S : Aire de la surface de contact solide/fluide.

- **Flux de chaleur généré**

Ce flux est considéré lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique ou nucléaire) est convertie en énergie thermique à l'intérieur du milieu considéré :

$$\phi_g = \dot{q} \cdot V \quad (\text{I.9})$$

Avec :

$\phi_g$  : Flux d'énergie thermique générée.

$\dot{q}$  : Densité volumique d'énergie générée par unité de temps.

V : Volume

- **Flux de chaleur stocké**

Le flux de chaleur stocké dans un corps correspond à une augmentation de l'énergie interne du corps au cours du temps. Il est exprimé par :

$$\phi_{st} = \rho \cdot V \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I.10})$$

Avec :

$\phi_{st}$  : Flux de chaleur stocké.

$\rho$  : Masse volumique.

V : Volume

$C_p$  : Chaleur spécifique.

T : Température.

T : Le temps.

# CHAPITRE 2

**Transfert de chaleur par conduction en régime permanent**

## 2. TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION EN REGIME PERMANENT

### 2.1. Introduction

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

### 2.2. Loi de FOURRIER

#### 2.2.1. Enoncé

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : En tout point d'un milieu isotrope, la densité de flux thermique est proportionnelle au gradient de la température.

$$\vec{\phi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T \Rightarrow \vec{\phi} = -\lambda \cdot S \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (\text{II.1})$$

Avec :

$\vec{\phi}$  : Densité du flux de chaleur transmis par conduction ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ )

$\lambda$  : Conductivité thermique du milieu ( $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ )

T : Champ de température (K)

$\vec{\phi}$  : Flux de chaleur conductif (W).

S : Aire de la section de passage du flux de chaleur ( $\text{m}^2$ )

#### 2.2.2. Orthogonalité du gradient de température et l'isotherme

En un point quelconque M du milieu, on a, à tout instant :  $dT = \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot d\vec{M}$

Si l'on considère le déplacement élémentaire  $d\vec{M}$  sur l'isotherme passant par le point M, on a :  $\overrightarrow{\text{grad}} T \cdot d\vec{M} = dT = 0$ .

On en conclue que le gradient de température en chaque point est normal à la surface isotherme passant par ce point. Il en résulte que les lignes de courant sont également normales aux surfaces isothermes. Ainsi, le flux thermique est conservatif dans un tube de courant.

### 2.3. Résistance thermique

En considérant l'intersection d'un tube de courant par deux surfaces isothermes de températures  $T_1$  et  $T_2$ , on définit la résistance thermique par :

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi} \quad (\text{II.2})$$

#### 2.3.1. Cas d'un mur

En considérant un mur homogène d'épaisseur L, de section S, de conductivité thermique, dont les faces sont aux températures  $T_1$  et  $T_2$ , le flux thermique  $\phi$  qui traverse ce mur est tel que :

$$\phi = -\lambda \cdot S \cdot \frac{dT}{dx} = -\lambda \cdot S \cdot \frac{T_1 - T_2}{L} \quad (\text{II.3})$$

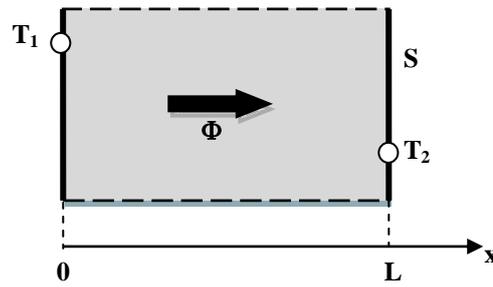


Figure II.1 : Mur simple

La résistance thermique du mur est définie par :

$$R_{th} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{L}{S} \quad (\text{II.4})$$

Cette relation conduit à une analogie électrique. En effet, un milieu homogène de longueur  $L$ , de section  $S$ , ayant une conductivité électrique  $\sigma$ , parcouru par un courant  $I$ , développe une différence de potentiel  $V_1 - V_2$ , telle que :

$$\frac{V_1 - V_2}{I} = R \text{ où } R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{L}{S} \quad (\text{II.5})$$

Ainsi, il est possible de décrire un problème de conduction thermique par un schéma équivalent :

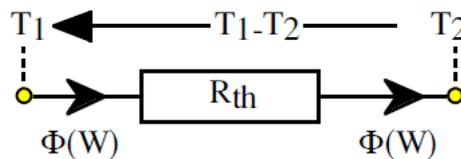


Figure II.2 : Schéma équivalent d'un mur simple

### 2.3.2. Résistance thermique de dispositifs à géométrie circulaire

Considérons un cylindre homogène de rayon intérieur  $R_1$ , de rayon extérieur  $R_2$  et de longueur  $L$ . La surface interne est maintenue à une température  $T_1$  et la surface externe à la température  $T_2$ .

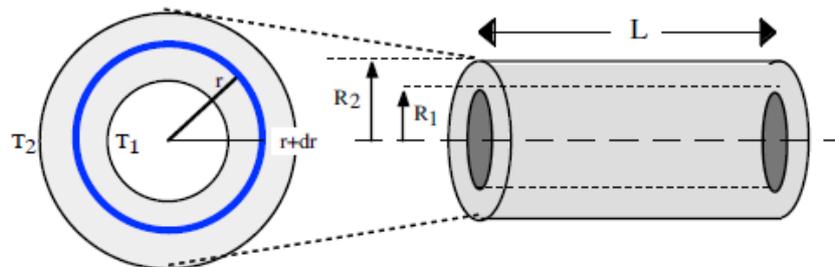


Figure II. 3: Dispositif à géométrie cylindrique

La résistance thermique totale de ce cylindre est :

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (\text{II.6})$$

### 2.3.3. Résistance thermique de dispositifs à géométrie sphérique

Considérons une sphère creuse homogène de rayon interne  $R_1$  et de rayon externe  $R_2$ . Les surfaces interne et externe sont maintenues à la température  $T_1$  et  $T_2$ , respectivement.

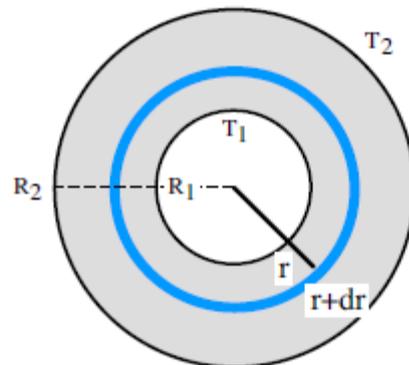


Figure II. 4: Dispositif à géométrie sphérique

La résistance thermique totale dans ce cas est :

$$R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{II.7})$$

### 2.3.4. Association de résistances thermiques

- Résistances en série

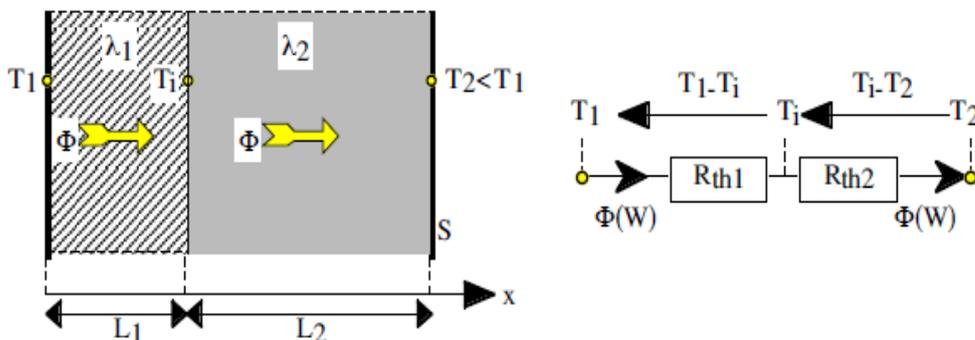


Figure II. 5: Mur composé de deux résistances thermiques en série

La résistance thermique d'un mur, composé de plusieurs matériaux différents (avec des conductivités thermiques différentes), est égale à la somme des différentes résistances thermiques des matériaux du mur :

$$R_{theq} = \sum_{i=1}^n R_{thi} \quad (\text{II.8})$$

- Résistances en parallèle

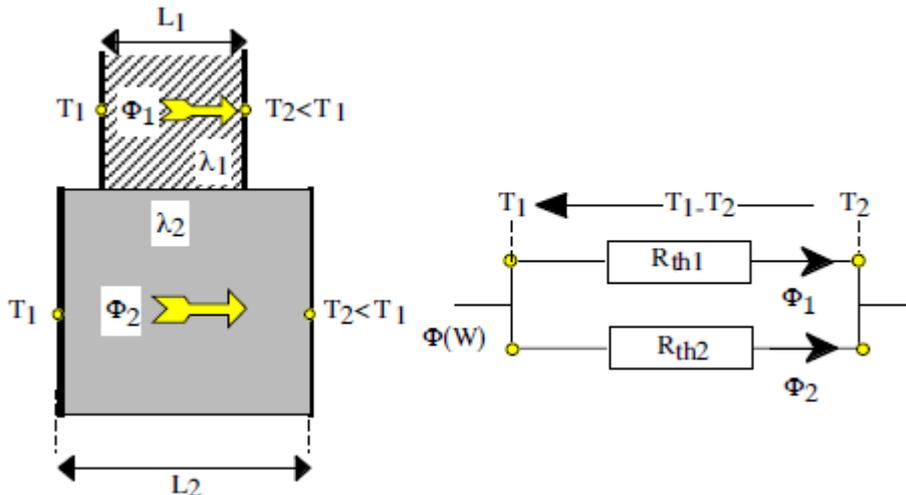


Figure II. 6: Mur composé de deux résistances thermiques en parallèle

La conductance thermique totale d'un dispositif composé de matériaux différents, disposés en brique, est égale à la somme des conductances thermiques des matériaux du dispositif :

$$\frac{1}{R_{theq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_{thi}} \quad (\text{II.9})$$

### 2.3.5. Résistance d'un mur simple non homogène

Dans le cas d'un mur non homogène, de section  $S$ , d'épaisseur  $L$  et de conductivité  $\lambda(x)$ , la résistance thermique s'exprime par l'expression:

$$R_{th} = \frac{1}{S} \int_{x=0}^{x=L} \frac{1}{\lambda(x)} dx \quad (\text{II.10})$$

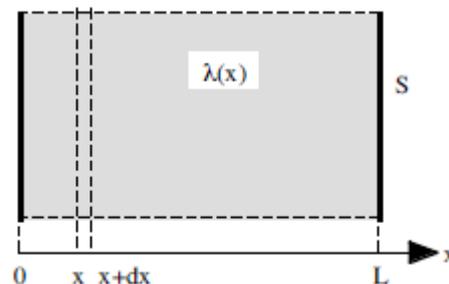


Figure II. 7: Mur non homogène

## 2.4. L'équation de la chaleur

A partir du bilan énergétique, d'un milieu solide de volume V, de densité  $\rho$ , de capacité massique C et de puissance interne générée P, l'équation de chaleur générale est de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.11})$$

### 2.4.1. Différentes formes de l'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

- Si le milieu est isotrope :  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$
- S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système :  $P = 0$
- Si le milieu est homogène,  $\lambda$  n'est fonction que de T.

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.12})$$

- Si de plus  $\lambda$  est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$a \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.13})$$

Le rapport  $a = \lambda / \rho C$  est appelé la diffusivité thermique ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ) qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

- En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$a \Delta T = 0 \quad (\text{II.14})$$

### 2.4.2. Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques

Pour un milieu homogène et isotrope, de géométrie cylindrique, l'équation de la chaleur s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{P}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.15})$$

### 2.4.3. Equation de la chaleur en coordonnées sphériques

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{P}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.16})$$

## 2.5. Transfert conductif unidirectionnel

### 2.5.1. Mur simple

On se place dans le cas où le transfert de chaleur est unidirectionnel et où il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie.

On considère un mur d'épaisseur  $e$ , de conductivité thermique  $\lambda$  et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures  $T_1$  et  $T_2$ .

La résolution de l'équation de chaleur, permet de déterminer le profil de température à travers le mur :

$$T(x) = C_1 \cdot x + C_2 \quad (\text{II.17})$$

Les constantes sont déterminées en appliquant les conditions aux limites :

- $T(x = 0) = T_1$
- $T(x = e) = T_2$

$$T(x) = -\left(\frac{T_1 - T_2}{e}\right) \cdot x + T_1 \quad (\text{II.18})$$

Le profil de température est donc linéaire. La densité de flux de chaleur traversant le mur s'en déduit :

$$\phi = \frac{\lambda \cdot (T_1 - T_2)}{e} \quad (\text{II.19})$$

### 2.5.2. Mur multicouches

C'est le cas des murs réels, constitués de plusieurs couches de matériaux différents et où on ne connaît que les températures  $T_{f1}$  et  $T_{f2}$  des fluides en contact avec les deux faces du mur de surface latérale  $S$ .

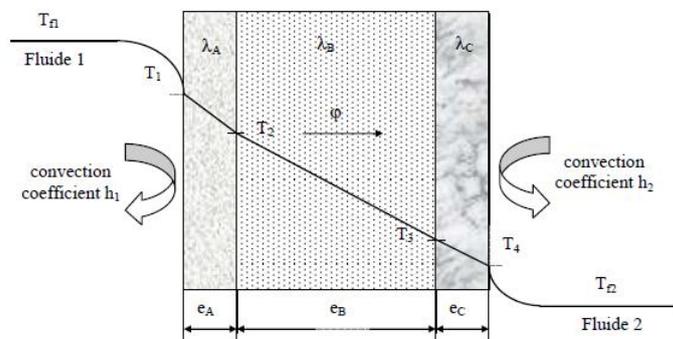


Figure II. 8: Mur multicouches

En régime permanent, le flux de chaleur se conserve lors de la traversée du mur et s'écrit :

$$\varphi = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + \frac{e_C}{\lambda_C S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (\text{II.20})$$

### 2.5.3. Mur composite

C'est le cas le plus couramment rencontré dans la réalité où les parois ne sont pas homogènes.

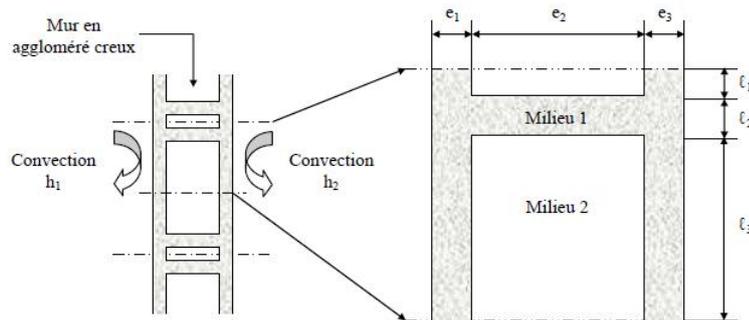


Figure II. 9: Mur composite

En supposant le transfert unidirectionnel et en tenant compte des axes de symétrie, on peut se ramener au calcul du flux à travers l'élément isolé sur la droite de la figure et calculer la résistance thermique R équivalente d'une portion de mur de largeur L et de hauteur  $\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$  en utilisant les lois d'association des résistances en série et en parallèle.

$$\varphi = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_1 + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} + R_6 + R_7} \quad (\text{II.21})$$

Avec :

$$R_1 = \frac{1}{h_1 \ell L}; R_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 \ell L}; R_3 = \frac{e_2}{\lambda_2 \ell_1 L}; R_4 = \frac{e_2}{\lambda_1 \ell_2 L}; R_5 = \frac{e_2}{\lambda_2 \ell_3 L}; R_6 = \frac{e_3}{\lambda_1 \ell L}; R_7 = \frac{1}{h_2 \ell L}$$

### 2.5.4. Cylindre creux

On considère un cylindre creux de conductivité thermique  $\lambda$ , de rayon intérieur  $r_1$ , de rayon extérieur  $r_2$ , de longueur L, les températures des faces internes et externes étant respectivement  $T_1$  et  $T_2$ .

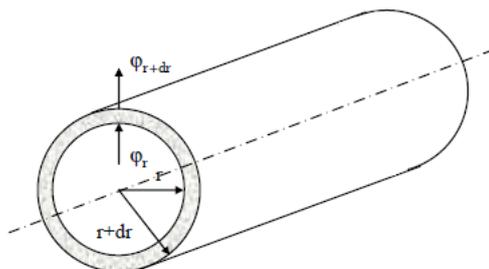


Figure II. 10: Cylindre creux

En résolvant l'équation de la chaleur unidirectionnelle, en coordonnées cylindriques, et en considérant les conditions aux limites :

- $T(r_1) = T_1$
- $T(r_2) = T_2$

Le profil de température ainsi que la densité du flux thermique sont donnés par les relations suivantes :

$$\frac{T(r)-T_1}{T_2-T_1} = \frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad \varphi = \frac{2\pi\lambda L(T_1-T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (\text{II.22})$$

### 2.5.5. Cylindre creux multicouches

C'est le cas pratique d'un tube recouvert d'une ou plusieurs couches de matériaux différents et où l'on ne connaît que les températures  $T_{f1}$  et  $T_{f2}$  des fluides en contact avec les faces interne et externe du cylindre ;  $h_1$  et  $h_2$  sont les coefficients de transfert de chaleur par convection entre les fluides et les faces internes et externes.

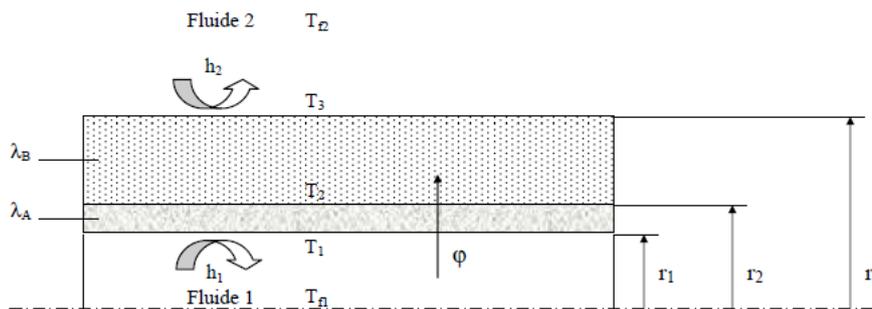


Figure II. 11: Cylindre creux multicouches

En régime permanent, le flux de chaleur se conserve lors de la traversée des différentes couches et s'écrit :

$$\varphi = \frac{(T_{f1}-T_{f2})}{\frac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_A L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_B L} + \frac{1}{h_2 2\pi r_3 L}} \quad (\text{II.23})$$

## 2.6. Transfert conductif multidirectionnel

Dans le cas où la diffusion de la chaleur ne s'effectue pas selon une direction unique, deux méthodes de résolution peuvent être appliquées :

### 2.6.1. Méthode du coefficient de forme

Dans les systèmes bidimensionnels ou tridimensionnels où n'interviennent que deux températures limites  $T_1$  et  $T_2$ , on montre que le flux de chaleur peut se mettre sous la forme :

$$\varphi = \lambda \cdot F(T_1 - T_2) \quad (\text{II.24})$$

Avec :

$\lambda$  : Conductivité thermique du milieu séparant les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  ( $W m^{-1} K^{-1}$ )

$T_1$  : Température de la surface  $S_1$  (K)

$T_2$  : Température de la surface  $S_2$  (K)

$F$  : Coefficient de forme (m)

Le coefficient de forme  $F$  ne dépend que de la forme, des dimensions et de la position relative des deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ .

### 2.6.2. Méthodes numériques

Dans le cas où la méthode du coefficient de forme ne peut pas s'appliquer (surfaces non isothermes par exemple), il faut résoudre l'équation de la chaleur numériquement :

- Méthode des différences finies
- Méthode des éléments finis.
- Méthode des volumes finis...

## 2.7. Les ailettes

### 2.7.1. L'équation de la barre

Le problème de la barre encastrée schématise le problème pratique important du refroidissement d'un solide par des ailettes.

Considérons une barre de section constante (épaisseur  $e$  et largeur  $\ell$ ) encastrée entre 2 surfaces à température  $T_0$  et baignant dans un fluide à température  $T_\infty$ .

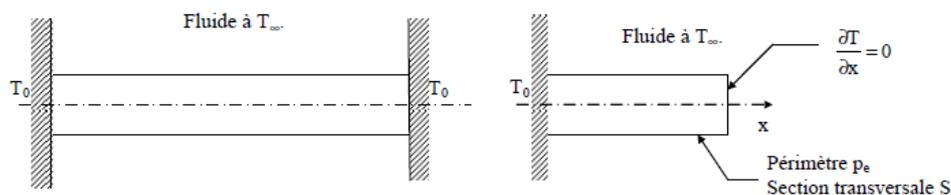


Figure II. 12: Barre encastrée

En effectuons le bilan d'énergie, le profil de température dans la barre est la solution de l'équation différentielle suivante, appelée l'équation de la barre:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h \cdot p_e}{\lambda S} (T - T_\infty) = 0 \quad (\text{II.25})$$

### 2.7.2. Flux extrait par une ailette

Une ailette est un milieu bon conducteur de la chaleur dont une dimension est grande devant les autres,

$$\text{En posant : } \omega^2 = \frac{h \cdot P_e}{\lambda S} \text{ et } \theta = (T - T_\infty)$$

L'équation (II.25) devient :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \omega^2 \cdot \theta = 0 \quad (\text{II.26})$$

#### 2.7.2.1. Ailette rectangulaire longue de section constante

Dans le cas de l'ailette longue de longueur L, les conditions aux limites s'écrivent :

- $\theta(x=0) = T_0 - T_\infty$
- $\theta(x=L) = 0$

Le profil de température ainsi que le flux dissipé sur toute la surface de l'ailette peuvent être calculés :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp(-\omega x) \quad \varphi_p = \sqrt{h \cdot P_e \lambda S} (T_0 - T_\infty) \quad (\text{II.27})$$

#### 2.7.2.2. Ailette rectangulaire de section constante isolée à l'extrémité

La solution générale est identique au cas précédent, ce sont les conditions aux limites qui diffèrent :

- $T(x=0) = T_0$
- $-\lambda \cdot S (dT/dx)_{x=L} = 0$  (conservation du flux de chaleur en  $x=L$ )

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \cosh(\omega x) - \tanh(\omega L) \sinh(\omega x) = \frac{\cosh[\omega(L-x)]}{\cosh(\omega L)} \quad (\text{II.28})$$

$$\varphi_p = \omega \lambda S \tanh(\omega L) (T_0 - T_\infty) \quad (\text{II.29})$$

#### 2.7.2.3. Ailette rectangulaire de section constante avec transfert de chaleur à l'extrémité

Les conditions aux limites dans ce cas :

- $T(x=0) = T_0$
- $-\lambda \cdot S (dT/dx)_{x=L} = h S [T(x=L) - T_\infty]$  (conservation du flux de chaleur en  $x=L$ )

La solution est donc :

$$\frac{T(x)-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}} = \frac{\cosh[\omega(L-x)] + \frac{h}{\omega\lambda} \sinh[\omega(L-x)]}{\cosh(\omega L) + \frac{h}{\omega\lambda} \sinh(\omega L)} \quad (\text{II.30})$$

$$\varphi_p = \omega \lambda S (T_0 - T_{\infty}) \frac{\tanh(\omega L) + \frac{h}{\omega\lambda}}{1 + \frac{h}{\omega\lambda} \tanh(\omega L)} \quad (\text{II.31})$$

#### 2.7.2.4. Ailette circulaire de section rectangulaire

Ces ailettes sont destinées à améliorer le transfert de chaleur entre la paroi externe d'un tube et le milieu ambiant.

L'équation de la chaleur dans ce cas est donnée par la relation :

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{2h}{\lambda e} \theta = 0 \quad \text{où } \theta = T - T_{\infty} \quad (\text{II.32})$$

#### 2.7.3. Efficacité d'une ailette

Elle définit les performances d'une ailette en comparant le flux dissipé à celui qui serait dissipé dans une ailette de mêmes dimensions mais dont la température serait uniforme et égale à celle de la base (conductivité thermique  $\lambda \rightarrow \infty$ , pas de résistance thermique de conduction donc pas de chute de température dans l'ailette)

- Ailette rectangulaire longue ( $L \rightarrow \infty$ ):  $\eta = \frac{1}{\omega L}$
- Ailette rectangulaire isolée à l'extrémité :  $\eta = \frac{\tanh(\omega L)}{\omega L}$
- Ailette rectangulaire avec transfert de chaleur à l'extrémité :  $\eta = \frac{\tanh(\omega L) + \frac{h}{\omega\lambda}}{\omega L + \frac{hL}{\lambda} \tanh(\omega L)}$

Avec :  $\omega = \sqrt{\frac{h P_e}{\lambda S}}$

#### 2.7.4. Choix des ailettes

Les ailettes sont utilisées lorsqu'il faut extraire une densité de flux importante dans un encombrement réduit, exemples : radiateur d'automobile, carter de moteur refroidi par air, évaporateur de climatiseur,...

D'une façon générale, l'usage des ailettes est :

- Peu utile pour les liquides car h est grand,
- Utile dans le cas des gaz car h est faible.

Des ailettes étroites et rapprochées sont meilleures que des ailettes plus grandes et espacées mais on est limité par les pertes de charges (elles augmentent si l'on diminue trop l'écartement des ailettes). L'ailette est d'autant plus performante que sa conductivité thermique  $\lambda$  est élevée. Le choix des ailettes est alors un compromis entre le coût, l'encombrement, les pertes de charge et le transfert de chaleur.

# **CHAPITRE 3**

***Transfert de chaleur par conduction en régime variable***

### 3. TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION EN REGIME VARIABLE

#### 3.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter la conduction thermique en régime variable c'est à dire que la température varie, non seulement dans l'espace mais aussi avec le temps.

#### 3.2. Conduction unidirectionnelle en régime variable sans changement d'état

##### 3.2.1. Problème général

La formulation générale de l'équation de la chaleur est :

$$\text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) + P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III.1})$$

Elle nécessite une condition initiale en tout point  $T(t=0)$ , et deux conditions aux limites.

Dans le cas où la conductivité thermique  $\lambda$ , ne dépend pas de la température, on obtient l'équation de Fourier :

$$\Delta T + \frac{P}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III.2})$$

##### 3.2.2. Nombres sans dimension

Dans le cas unidirectionnel, le problème de conduction thermique est représenté mathématiquement par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{P}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} & \text{pour } 0 < x < l \text{ et } t > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 & \text{pour } x = 0 \text{ et } t > 0 \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -h(T - T_\infty) & \text{pour } x = l \text{ et } t > 0 \\ T = T_0 & \text{pour } 0 < x < l \text{ et } t = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.3})$$

Le nombre de variables dans un problème de transfert thermique peut être réduit par l'introduction de nombres sans dimensions :

$$x^* = \frac{x}{l} \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad G = \frac{Pl^2}{\lambda(T_0 - T_\infty)}$$

Le système (III.3) devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + G = \frac{\partial \theta}{\partial F_0} & \text{pour } 0 < x^* < l \text{ et } F_0 > 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x^*} = 0 & \text{pour } x^* = 0 \text{ et } F_0 > 0 \\ \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x^*} = -B_1 \theta & \text{pour } x^* = l \text{ et } F_0 > 0 \\ \theta = 1 & \text{pour } 0 < x^* < l \text{ et } F_0 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.4})$$

Deux nombres adimensionnels sont particulièrement importants en régime variable:

- Le nombre de Biot: défini par de la résistance thermique interne par la résistance thermique externe, l est la dimension caractéristique du milieu (l = r pour une sphère).

$$B_i = \frac{hl}{\lambda} \quad (\text{III.5})$$

Il mesure l'épaisseur thermique du domaine: on dit que le milieu est mince thermiquement (dans le sens de l) si le **nombre de Biot est inférieur à 1**. Cela signifie que la résistance externe bloque l'écoulement de chaleur. On peut alors considérer la température uniforme suivant la dimension de l.

- Le nombre de Fourier: défini par le rapport du flux à travers l<sup>2</sup> à la vitesse de stockage dans l<sup>3</sup>, ou encore rapport de la chaleur traversant sur la chaleur accumulée. Le nombre de Fourier caractérise la pénétration de la chaleur en régime variable.

$$F_0 = \frac{\lambda \frac{\Delta T}{l} l^2}{\rho c l^3 \frac{\Delta T}{l}} = \frac{at}{l^2} \quad (\text{III.6})$$

### 3.2.3. Quelques cas d'école

#### 3.2.3.1. Milieu à température uniforme

Soit la trempe d'une bille métallique : qui consiste à immerger une bille initialement à la température  $T_i$ , dans un bain à température  $T_0$ , maintenue constante.

En écrivant le bilan énergétique :  $-h S (T - T_0) = \rho C V \frac{dT}{dt}$  on obtient l'équation de la température en fonction du temps :  $\frac{T-T_0}{T_i-T_0} = \exp\left(-\frac{hS}{\rho C V} \cdot t\right)$

Le regroupement  $\tau = \frac{\rho C V}{h S}$  est homogène à un temps, c'est donc la constante de temps du système. Alors, l'équation devient :  $\frac{T-T_0}{T_i-T_0} = \exp(-\tau \cdot t)$ .

En introduisant les nombres de Biot et Fourier, l'évolution de la température de la bille est donc :

$$\frac{T-T_0}{T_i-T_0} = \exp(-B_i F_0) \quad (\text{III.7})$$

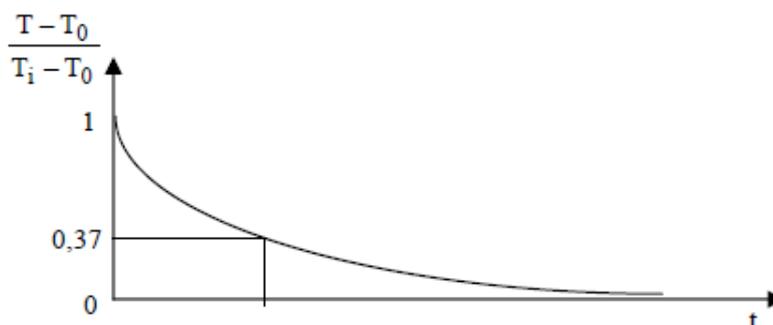


Figure III.1 : Evolution de la température d'un milieu à température uniforme

- Remarque : Généralement, un système avec  $Bi < 0,1$  peut être considéré comme étant à température uniforme. Ce critère  $Bi < 0,1$  est appelé le critère d'accommodation thermique.

### 3.2.3.2. Plaque infinie

On considère le cas d'une plaque d'épaisseur  $2L$  et de dimensions latérales suffisamment grandes pour que l'on puisse considérer que le transfert de chaleur est unidirectionnel.

- 1er cas : Plaque avec température constante imposée en surface

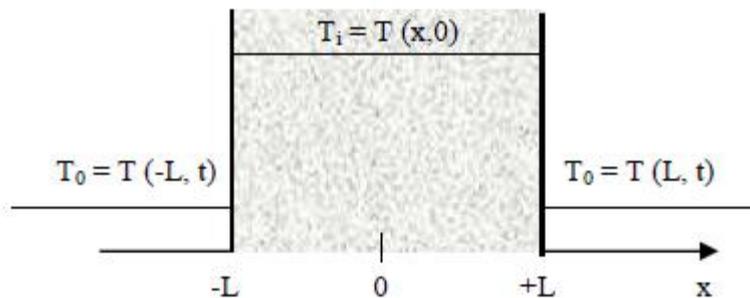


Figure III.2 : Plaque avec température imposée en surface

L'équation de la chaleur s'écrit dans ce cas :  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$  avec les conditions aux limites et

initiales suivantes

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i \\ T(L, t) = T_0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 \end{cases}$$

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour la résolution du problème (méthode de la transformée de Laplace, Décomposition de la solution sous forme de produit de fonctions et superposition des solutions, transformation intégrale et méthodes numériques).

- 2ème cas : Plaque avec flux imposé

L'équation de la chaleur reste la même, ce qui change sont les conditions aux limites.

Le système à résoudre est donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \\ T(x, 0) = T_i \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \\ \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} = \Phi_0 \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

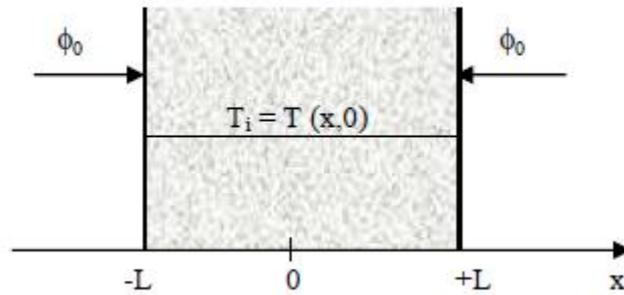


Figure III.3 : Plaque avec flux de chaleur imposé en surface

• **3<sup>ème</sup> cas : Plaque avec coefficient de transfert imposé**

Le problème est régi par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \\ T(x, 0) = T_i \\ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \\ -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} = h[T(L, t) - T_\infty] \end{array} \right. \quad \text{(III.10)}$$

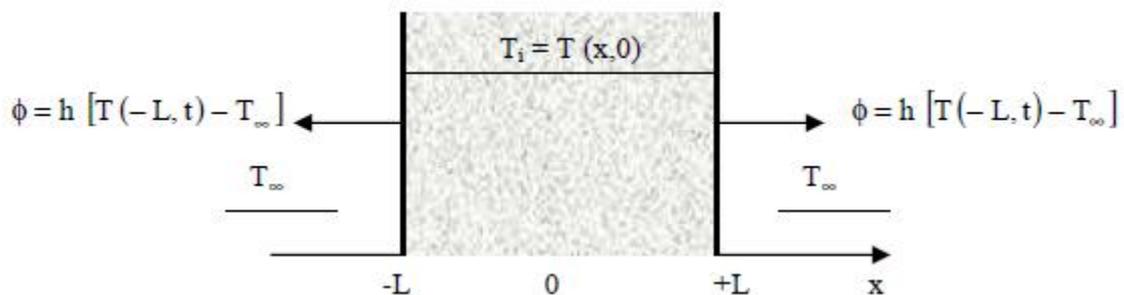


Figure III.4 : Plaque avec coefficient de transfert imposé en surface

**3.2.3.3. Cylindre infini**

Nous considérons ici un cylindre de longueur très grande par rapport au diamètre R, initialement à la température  $T_i$  auquel on impose brutalement une température de surface  $T_0$ .

On peut faire l'hypothèse dans ce cas que le transfert de chaleur est uniquement radial.

• **1er cas : Cylindre infini avec température de surface imposée**

L'équation de chaleur monodimensionnelle, en coordonnées cylindriques est donnée par :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{(III.11)}$$

Avec les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$\begin{cases} T(r, 0) = T_i \\ T(R, t) = T_0 \end{cases}$$

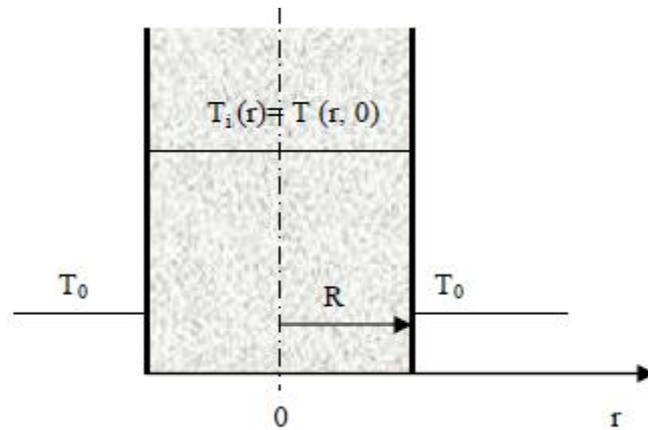


Figure III.5 : Cylindre infini avec température de surface imposée

• 2<sup>ème</sup> cas : Cylindre avec flux imposé

Le système régissant le problème dans ce cas est :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \\ T(r, 0) = T_i \\ \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{(R,t)} = \Phi_0 \end{cases} \quad \text{(III.12)}$$

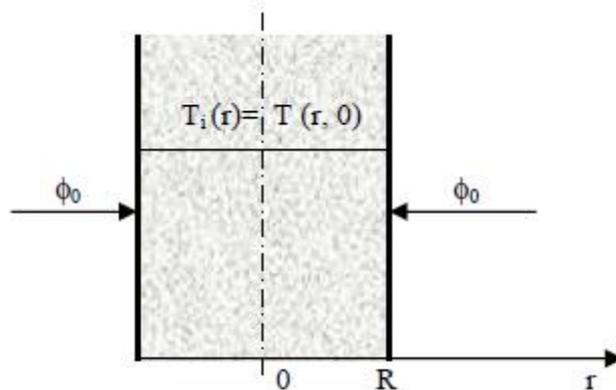


Figure III.6 : Cylindre infini avec flux de chaleur imposé

• 3<sup>ème</sup> cas : Cylindre avec coefficient de transfert imposé

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \\ T(r, 0) = T_i \\ -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = h[T(R, t) - T_\infty] \end{cases} \quad \text{(III.13)}$$

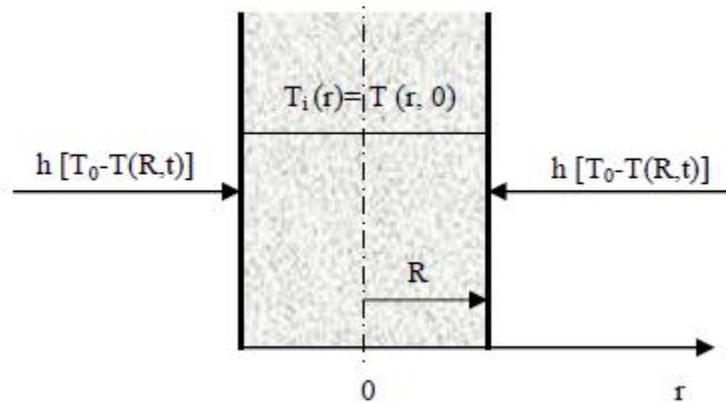


Figure III.7 : Cylindre infini avec coefficient de transfert convectif imposé

### 3.2.3.4. Sphère

- 1er cas : Température de surface imposée

Soit une sphère de rayon R à la température initiale uniforme  $T_i$  à laquelle on impose brutalement une température de surface  $T_0$ .

Ce problème est régi par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\bar{T})}{\partial r^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \quad \text{où: } \bar{T} = T - T_0 \\ \bar{T}(r, 0) = T_i - T_0 \\ \bar{T}(R, t) = 0 \end{array} \right. \quad \text{(III.14)}$$

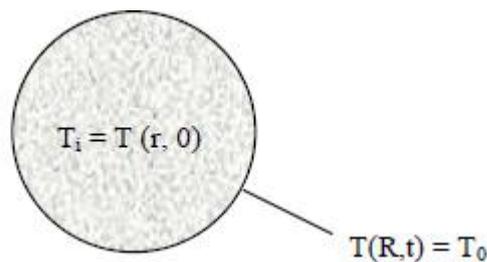


Figure III.8 : Sphère avec température de surface imposée

- 2eme cas : Flux imposé à la surface

Si un flux est imposé à la surface de la sphère, le système régissant ce problème:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\bar{T})}{\partial r^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \quad \text{où: } \bar{T} = T - T_0 \\ \bar{T}(r, 0) = T_i - T_0 \\ \lambda \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right)_{(R,t)} = \Phi_0 \end{array} \right. \quad \text{(III.15)}$$

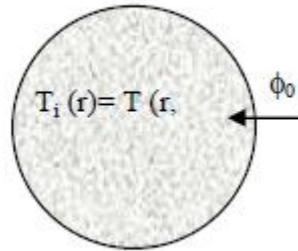


Figure III.9 : Sphère avec flux surfacique imposé

• **3ème cas : Coefficient de transfert par convection imposé**

De même la condition aux limites au niveau de la surface sera modifiée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\bar{T})}{\partial r^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \quad \text{où: } \bar{T} = T - T_0 \\ \bar{T}(r, 0) = T_i - T_0 \\ -\lambda \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right)_{(R,t)} = h[T(R,t) - T_\infty] \end{array} \right. \quad \text{(III.16)}$$

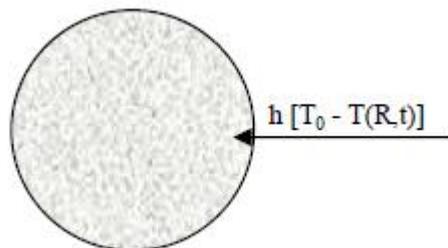


Figure III.10 : Sphère avec coefficient convectif imposé

**3.3. Conduction unidirectionnelle en régime variable avec changement d'état**

Le milieu est initialement à la température uniforme  $T_i$  en phase 2. On impose brutalement une température de surface  $T_0$  inférieure à la température de changement de phase 2→1. Un changement de phase va se produire tout d'abord à la surface puis se propager vers l'intérieur du milieu semi-infini.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dans la phase 1: pour } x < X(t) \\ \text{dans la phase 2: pour } x > X(t) \end{array} \quad \text{(III.17)}$$

Les conditions aux limites et initiales sont :

$$\begin{cases} T_1(X, 0) = T_2(X, 0) = T_i \\ T_1(0, t) = T_0 \\ T_1(X, t) = T_2(X, t) = T_c \\ -\lambda_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_X - \lambda_2 \left( \frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_X = L \rho \frac{dX}{dt} \end{cases} \quad \text{(III.18)}$$

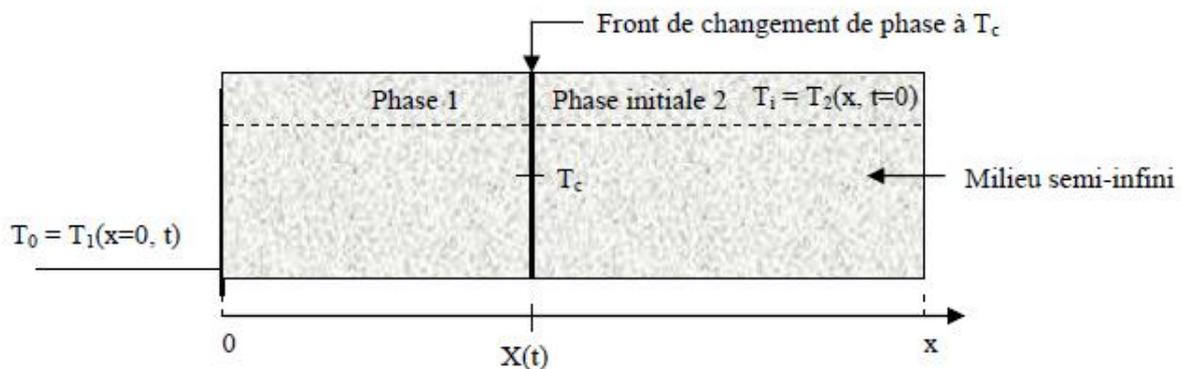


Figure III.11 : Milieu semi-infini avec changement de phase

### 3.4. Conduction multidirectionnelle en régime variable

#### 3.4.1. Théorème de Von Neuman

Certains problèmes bidimensionnels ou tridimensionnels peuvent être résolus par combinaison de 2 ou 3 solutions monodimensionnelles.

Considérons par exemple le cas d'une barre rectangulaire infinie (longueur très grande devant les côtés  $2L_1$  et  $2L_2$ ), elle peut être considérée comme l'intersection de deux plaques infinies d'épaisseurs respectives  $2L_1$  et  $2L_2$ .

Le théorème de Von Neumann permet d'affirmer que la température adimensionnelle de cette barre s'exprime comme le produit des températures adimensionnelles des deux plaques infinies dont elle peut être considérée comme étant l'intersection :

$$\left[ \frac{T(x,y,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right]_{\text{barre } 2L_1 \times 2L_2} = \left[ \frac{T(x,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right]_{\text{plaque } 2L_1} \times \left[ \frac{T(y,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right]_{\text{plaque } 2L_2} \quad \text{(III.19)}$$

Dans le cas général, les méthodes numériques sont les plus utilisées et permettent de trouver la solution plus rapidement, même pour des géométries complexes.

# **CHAPITRE 4**

## **Transfert de chaleur par rayonnement**

## 4. TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT

### 4.1. Introduction

Le transfert de chaleur par rayonnement, contrairement à la conduction et à la convection, ne nécessite aucun support matériel solide ou fluide.

Tous les corps, solides, liquides ou gazeux, émettent un rayonnement de nature électromagnétique. Les différents types d'ondes électromagnétiques et leurs longueurs d'ondes correspondantes sont représentés par la figure (V. 1).

Le rayonnement thermique émis par les corps se situe entre 0,1 et 100 $\mu$ m.

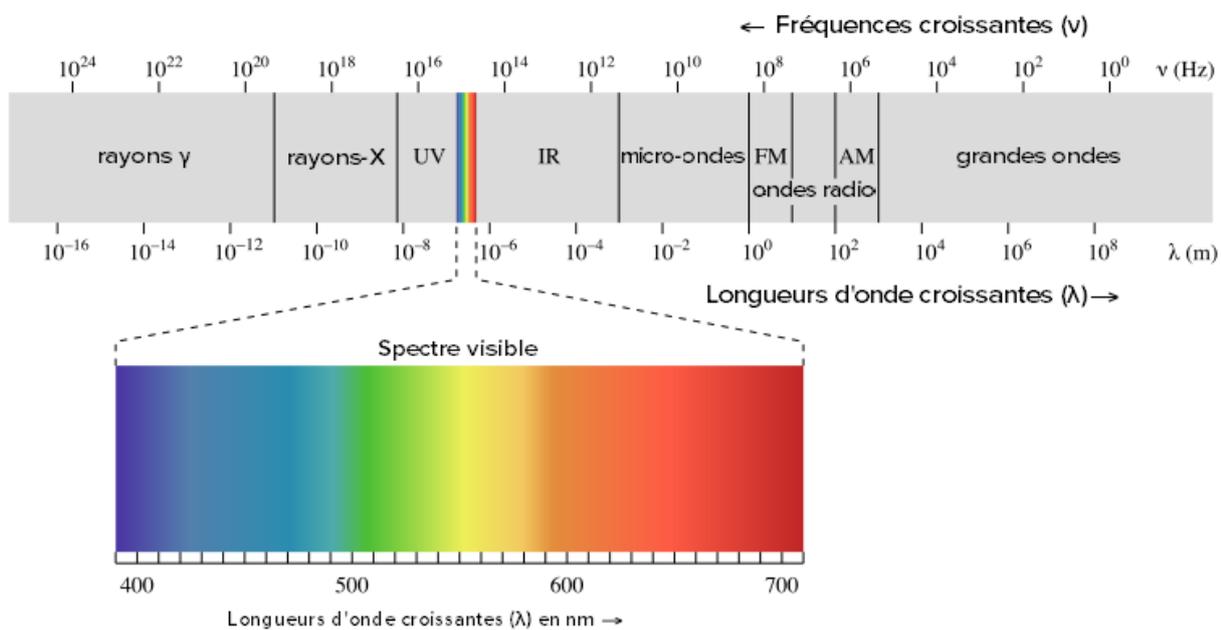


Figure IV. 1 : Le spectre électromagnétique

### 4.2. Classifications

#### 4.2.1. Selon la composition spectrale du rayonnement

Les grandeurs relatives à l'ensemble du spectre du rayonnement thermique sont appelées **totales**.

Si elles concernent un intervalle spectral étroit  $d\lambda$  autour d'une longueur d'onde  $\lambda$ , elles sont dites **monochromatiques** :  $G_\lambda$ .

#### 4.2.2. Selon la distribution spatiale du rayonnement

Les grandeurs sont dites **hémisphériques** lorsqu'elles concernent l'ensemble des directions de l'espace.

Elles sont appelées **directionnelles** lorsqu'elles caractérisent une direction donnée de propagation du rayonnement thermique  $G_{Ox}$ .

### 4.3. Définitions

#### 4.3.1. Grandeurs relatives aux sources

##### 4.3.1.1. Flux d'une source thermique

C'est la puissance thermique émise par une source dans tout l'espace où elle rayonne:  $\phi$  [W].

Si une source est de dimensions faibles par rapport à la distance la séparant du point d'observation, elle est considérée **ponctuelle**.

Elle peut donc rayonner dans toutes les directions de l'espace sphérique qui l'entoure : elle rayonne dans angle solide de  **$4\pi$  stéradians**.

Si au contraire, la source est de grandes dimensions, un élément de surface **dS** (figure V.2) de cette source peut rayonner dans un angle solide :

$$d\Omega = \frac{dS \cos \alpha}{r^2} \quad [\text{strad}] \quad (\text{IV.1})$$

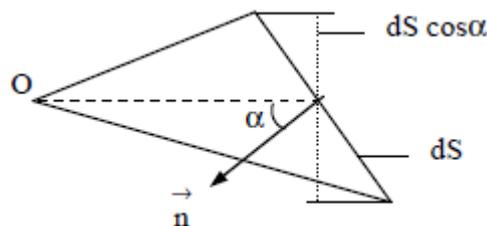


Figure IV. 2 : Angle solide

##### 4.3.1.2. Emission d'une source thermique

C'est le flux émis par unité de surface de la source :

$$M = \frac{d\phi}{dS} \quad [\text{W}/\text{m}^2] \quad (\text{IV.2})$$

##### 4.3.1.3. Intensité d'une source dans une direction

On appelle intensité énergétique **I<sub>x</sub>**, le flux par unité d'angle solide émis par une surface **dS** dans un angle solide **dΩ** entourant la direction **Ox**:

$$I_{Ox} = \frac{d\phi_{Ox}}{d\Omega} \quad [\text{W} / \text{strad}] \quad (\text{IV.3})$$

##### 4.3.1.4. Luminance d'une source dans une direction

La luminance **L<sub>Ox</sub>** d'une source de surface **dS**, dans une direction **Ox**, comme le rapport de l'intensité **I<sub>Ox</sub>** de la source dans cette direction par la surface apparente **dS cos β** (figure V.3) :

$$L_{Ox} = \frac{I_{Ox}}{dS \cos \beta} = \frac{d^2\phi_{Ox}}{d\Omega \cdot dS \cos \beta} \quad [\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{strad}] \quad (\text{IV.3})$$

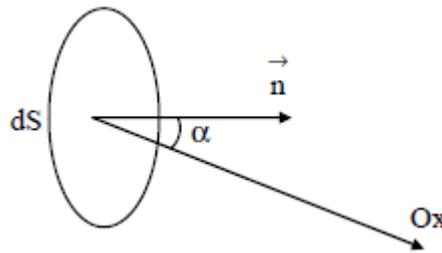


Figure IV. 3 : Surface apparente

### 4.3.2. Grandeurs relatives aux récepteurs

#### 4.3.2.1. Eclairement

C'est l'homologue de l'émittance pour une source. L'éclairement est le flux total reçu par unité de surface réceptrice, en provenance de l'ensemble des directions :

$$E = \frac{d\phi}{dS} \quad [W/m^2] \quad (IV.4)$$

#### 4.3.2.2. Réception d'un rayonnement thermique par un solide

Quand un rayon incident  $\phi_i$  frappe un corps à la température  $T$ , une partie  $\phi_r$  de l'énergie incidente est réfléchi par la surface  $S$ , une autre partie  $\phi_a$  est absorbée par le corps qui s'échauffe et le reste  $\phi_t$  est transmis et continue son chemin (figure V.4) :

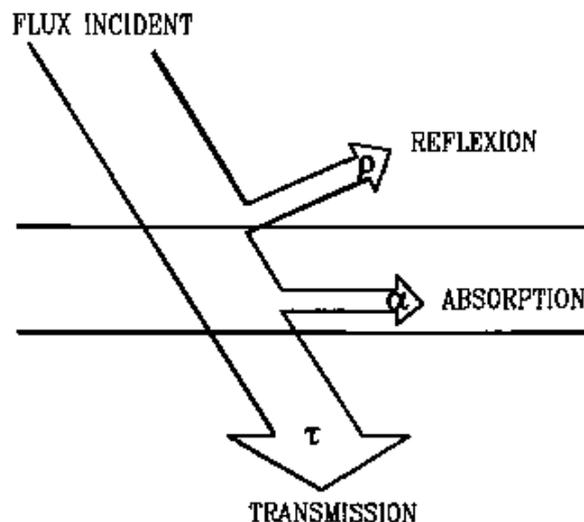


Figure IV. 4 : Rayonnement thermique sur un solide

Le comportement du corps solide vis-à-vis du rayonnement thermique est caractérisé par les coefficients totales hémisphériques de réflexion, d'absorption et de transmission :

$$\rho = \frac{\phi_r}{\phi_i} \quad \alpha = \frac{\phi_a}{\phi_i} \quad \tau = \frac{\phi_t}{\phi_i} \quad (IV.5)$$

La conservation de l'énergie s'exprime par une relation liant les paramètres précédents :

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \quad (\text{IV.6})$$

Dans certains cas, les propriétés radiatives des corps varient avec la longueur d'onde et la direction. La relation précédente reste valable avec les coefficients monochromatiques directionnels :

$$\rho_{0X,\lambda} + \alpha_{0X,\lambda} + \tau_{0X,\lambda} = 1 \quad (\text{IV.7})$$

#### 4.3.3. Corps transparent

La propagation du rayonnement thermique s'effectue dans le vide en ligne droite et à la vitesse de la lumière, sans aucune diminution de l'énergie transportée (sans pertes). On dit que le vide est un milieu parfaitement transparent.

La majorité des gaz simples ( $O_2$ ,  $H_2$ ,  $N_2$ ) sont également parfaitement transparents.

Certains gaz composés ( $CO_2$ ,  $H_2O$ ,  $CO$ ), certains liquides et solides (plastiques, verres), sont dits partiellement transparents, car la propagation d'un rayonnement thermique, dans milieux, s'accompagne d'une diminution de l'énergie.

#### 4.3.4. Corps opaques

La majorité des liquides et solides sont dits opaques, car ils arrêtent la propagation de tout rayonnement à leur surface.

#### 4.3.5. Corps noir

C'est un corps qui absorbe tout rayonnement incident indépendamment de son épaisseur, de sa température, de l'angle d'incidence et de la longueur d'onde du rayonnement incident, il est défini par :  $\alpha = 1$

#### 4.3.6. Corps gris

Un corps gris est un corps dont le pouvoir absorbant  $\alpha_{\lambda T}$  est indépendant de la longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement qu'il reçoit. Il est défini par :  $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$ .

### 4.4. Lois du rayonnement thermique

#### 4.4.1. Loi de Lambert

Les sources dont la luminance est indépendante de la direction sont dites diffuses :  $L_{0X} = L$

Elles sont régies par la loi de Lambert (sources Lambertiennes):

$$M = \pi \cdot L \quad (\text{IV.8})$$

#### 4.4.2. Autres lois physiques

##### 4.4.2.1. Loi de Kirchhoff

A une température  $T$  donnée et pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée, le rapport  $\frac{M_{\lambda T}}{\alpha_{\lambda T}}$  est le même pour tous les corps.

Pour le corps noir :  $\alpha_{\lambda T} = 1$  , alors  $\frac{M_{\lambda T}}{\alpha_{\lambda T}} = M_{0\lambda T}$

Avec :  $M_{0\lambda T}$  est l'émittance monochromatique du corps noir.

Ainsi l'émittance monochromatique de tout corps est égale au produit de son pouvoir absorbant monochromatique par l'émittance monochromatique du corps noir à la même température : Loi de Kirchhoff.

$$M_{\lambda T} = \alpha_{\lambda T} \cdot M_{0\lambda T} \quad (\text{IV.9})$$

Dans le cas du corps gris ( $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$ ), la loi de Kirchhoff est généralisée : l'émittance totale d'un corps gris est égale au produit de son pouvoir absorbant total par l'émittance total du corps noir à la même température :

$$M_T = \alpha_T \cdot M_{0T} \quad (\text{IV.10})$$

#### 4.4.2.2. Loi de Planck

Cette loi relie l'émittance monochromatique du corps noir à la longueur d'onde et à sa température :

$$M_{0\lambda T} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} \quad (\text{IV.11})$$

$$C_1 = 3,741 \cdot 10^{-16} \quad C_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2}$$

La loi de Planck permet de tracer les courbes isothermes représentant les variations de  $M_{0\lambda T}$  en fonction de la longueur d'onde pour diverses températures :

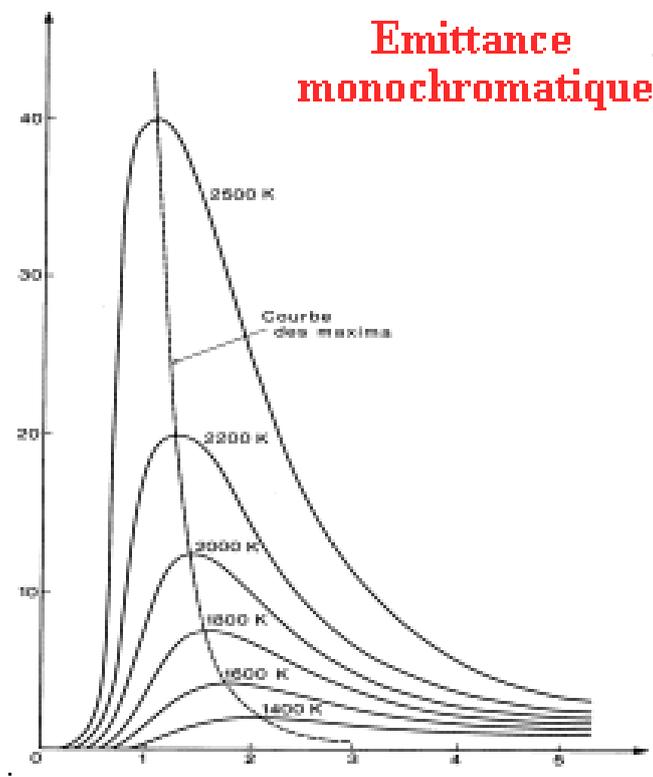


Figure IV. 5 : Emittance monochromatique du corps noir

#### 4.4.2.3. Lois de Wien

La longueur d'onde  $\lambda_m$  pour laquelle l'émission est maximale varie avec la température de la source, elle est exprimée par la loi de déplacement de Wien :

$$\lambda_M = \frac{2898.10^{-6}}{T} \quad (\text{IV.12})$$

La 2<sup>ème</sup> loi de Wien exprime la valeur maximale de l'émittance du corps noir en fonction de la sa température :

$$M_{0\lambda_M T} = 1287.10^{-8} . T^5 \quad (\text{IV.13})$$

#### 4.4.2.4. Loi de Stefan-Boltzmann

L'intégration de la formule de Planck pour toutes les longueurs d'onde donne l'émittance totale  $M_{0T}$  du corps noir qui n'est plus fonction que de la température T. C'est la loi de Stefan-Boltzmann :

$$M_{0T} = \sigma . T^4 \quad (\text{IV.14})$$

$\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann :  $\sigma=5,675.10^{-8} \text{ W/m}^2 . \text{K}^{-4}$

#### 4.4.2.5. Rayonnement des corps réels

Les propriétés émissives des corps réels sont définies par rapport aux propriétés émissives du corps noir dans les mêmes conditions de température et de longueur d'onde et on les caractérise à l'aide de coefficients appelés facteurs d'émission ou émissivités. Ces coefficients monochromatiques ou totaux sont définis par :

$$\varepsilon_{\lambda T} = \frac{M_{\lambda T}}{M_{0\lambda T}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_T = \frac{M_T}{M_{0T}} \quad (\text{IV.15})$$

D'après la loi de Kirchhoff, on montre que :

$$\alpha_{\lambda T} = \varepsilon_{\lambda T} \quad (\text{IV.16})$$

#### 4.4.2.6. Rayonnement des corps gris

Les corps gris sont caractérisés par  $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$  donc  $\varepsilon_{\lambda T} = \varepsilon_T$  or  $M_T = \varepsilon_T M_{0T}$ , nous en déduisons l'émittance du corps gris à la température T :

$$M_T = \varepsilon_T . \sigma . T^4 \quad (\text{IV.17})$$

# **CHAPITRE 5**

**Transfert de chaleur par convection**

## 5. TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION

### 5.1. Introduction

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un fluide.

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre et convection forcée. Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement aux différences de température, on dit que la **convection est naturelle** ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, le processus est appelé **convection forcée**.

On peut exprimer la quantité de chaleur transmise par convection entre une paroi solide et un fluide par :

$$\phi = h \cdot S \Delta T \quad (\text{V.1})$$

Sous cette forme, l'équation de la convection semble être tout à fait simple. En réalité, il n'en est rien, car cette équation n'est pas une loi de transmission de la chaleur par convection. Le coefficient d'échange de chaleur par convection  $h$  est, en effet, une fonction de l'écoulement du fluide, des propriétés thermiques du milieu fluide et de la géométrie du système. Sa valeur numérique n'est généralement pas uniforme sur une surface et elle dépend également du lieu où on mesure la température.

Comme le transfert d'énergie par convection est très intimement lié au mouvement du fluide, si il est laminaire ou turbulent.

### 5.2. Rappels sur l'analyse dimensionnelle

#### 5.2.1. Grandeurs fondamentales

On est amenées pour des raisons de commodités à choisir arbitrairement un certain nombre de grandeurs indépendantes comme grandeurs fondamentales, toutes les autres grandeurs seront exprimées en fonction de celles-ci et appelées grandeurs dérivées.

Les grandeurs fondamentales du système internationale sont :

- La masse  $M$
- La longueur  $L$
- Le Temps  $T$
- La température  $\theta$

Pour les problèmes de transfert thermique, On ajoute la quantité de chaleur  $Q$  qui s'exprime en fonction des dimensions fondamentales  $M$ ,  $L$  et  $T$  par :  $Q = M.L.T^{-2}$

La méthode d'analyse dimensionnelle, repose sur le principe de l'homogénéité dimensionnelle des termes d'une équation.

Dans un problème de convection thermique Les grandeurs physiques mises en jeu, dans un problème de convection thermique sont regroupées dans le tableau 1.

Tableau V. 1 : Equations aux dimensions des grandeurs utilisées dans la convection

Grandeur	Symbole	Unité S.I.	Equation aux dimensions
Ecart de température	$\Delta T$	K	$\theta$
Dimension caractéristique	D	m	L
Vitesse du fluide	U	m/s	$L \cdot T^{-1}$
Masse volumique du fluide	$\rho$	Kg/m <sup>3</sup>	$M \cdot L^{-3}$
Conductivité thermique	$\lambda$	W/m. K	$M \cdot L \cdot T^{-3} \theta^{-1}$ ou $Q \cdot T^{-1} \cdot L^{-1} \theta^{-1}$
Capacité thermique massique	C	J/kg.K	$L^2 \cdot T^{-2} \theta^{-1}$ ou $Q \cdot M^{-1} \cdot \theta^{-1}$
Coefficient de transfert thermique convectif	h	W/m <sup>2</sup> .K	$M \cdot T^{-3} \cdot \theta^{-1}$ ou $Q \cdot T^{-1} \cdot L^{-2} \cdot \theta^{-1}$
Viscosité dynamique du fluide	$\mu$	Kg/m.s	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$

### 5.2.2. Nombres sans dimension

A partir de l'analyse dimensionnelle, des nombres adimensionnels ont été définis :

- **Nombre de Nusselt** : C'est le rapport de la résistance thermique de conduction par la résistance thermique de convection. Il est d'autant plus élevé que la convection est prédominante sur la conduction. Il caractérise donc le type de transfert de chaleur.

$$Nu = \frac{\frac{D}{\lambda}}{\frac{1}{h}} = \frac{hD}{\lambda} \quad (V.2)$$

- **Nombre de Reynolds** : Caractérise le régime d'écoulement dans la canalisation.

$$Re = \frac{U \cdot D \cdot \rho}{\mu} = \frac{U \cdot D}{\nu} \quad (V.3)$$

Avec :  $\nu$  est la viscosité cinématique :  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

Ce nombre joue un rôle fondamental dans la caractérisation de l'écoulement :

- Si  $Re < 2400$  on est en régime laminaire.
- Pour des vitesses plus élevées,  $Re \gg 2400$ , le régime turbulent apparaît
- **Nombre de Prandtl** : caractérise l'influence de la nature du fluide sur le transfert de chaleur par convection :

$$P_r = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad (\text{V.4})$$

- **Nombre de Peclet :**

$$P_e = R_e \cdot P_r \quad (\text{V.5})$$

Dans ces conditions, la loi fondamentale du transfert de chaleur par convection est de la forme :

$$F(N_u, R_e, P_r) = 0 \quad \text{Ou} \quad N_u = f(P_r, R_e)$$

### 5.3. Convection sans changement d'état

#### 5.3.1. Convection forcée

##### 5.3.1.1. Cas d'écoulement dans un tube

- **Régime Laminaire :**  $Re < 2400$

Les corrélations expérimentales appliquées dans ce cas sont celles de LEVEQUE, exprimée en fonction du paramètre:  $A = \frac{x}{r \cdot R_e \cdot P_r}$  Avec :

**x :** la distance à partir de l'entrée du tube.

**R :** Rayon du tube

**D :** Diamètre du tube

- Régime établi : C'est à dire  $A > 0.1$

$$N_u = 3,66 \quad (\text{V.6})$$

- Régime non établi : C'est à dire  $A < 0.1$

$$N_u = 1,077 \cdot A^{-1/3} \quad (\text{V.7})$$

- **Régime turbulent :** Dans le domaine  $10^4 < Re < 1,2 \cdot 10^5$

- Régime établi :  $x / D > 60$

C'est la corrélation de COLBURN : Pour  $0.7 < P_r < 100$

$$N_u = 0,023 \cdot P_r^{1/3} \cdot R_e^{0,8} \quad (\text{V.8})$$

- Régime non établi :  $x / D < 60$

La corrélation de COLBURN doit être corrigée :

$$N_u = 0,023 \cdot P_r^{1/3} \cdot R_e^{0,8} \left( 1 + \left( \frac{D}{x} \right)^{0.7} \right) \quad (\text{V.9})$$

##### 5.3.1.2. Cas d'écoulement autour d'un tube

- **Cas des gaz :** Le nombre de Prandtl est sensiblement constant:  $Pr=0,75$

Les corrélations expérimentales proposées sont celles de HILPERT :

$$N_u = C \cdot R_e^m \quad (\text{V.10})$$

Les valeurs du coefficient C et l'exposant m varient avec le nombre de Reynolds :

Tableau V. 2 : Valeurs de C et m pour les corrélations de Hilpert

Re	C	m
$1 < Re < 4$	0,891	0,330
$4 < Re < 40$	0,821	0,385
$40 < Re < 4000$	0,615	0,466
$4000 < Re < 40000$	0,174	0,618
$40000 < Re < 400000$	0,024	0,805

• **Cas des liquides :**

La corrélation correspondante dans le cas de liquides est :

$$Nu = 1,11 \cdot C \cdot Re^m \cdot Pr^{1/3} \quad (V.11)$$

**5.3.1.3. Cas d'écoulement autour d'un faisceau de tubes**

De nombreux appareils industriels tels que les réchauffeurs d'air, les échangeurs thermiques, sont constitués de rangées de tubes parallèles, plongés dans un écoulement de fluide dirigé perpendiculairement à leur axe. Les tubes peuvent être disposés en ligne ou en quinconce.

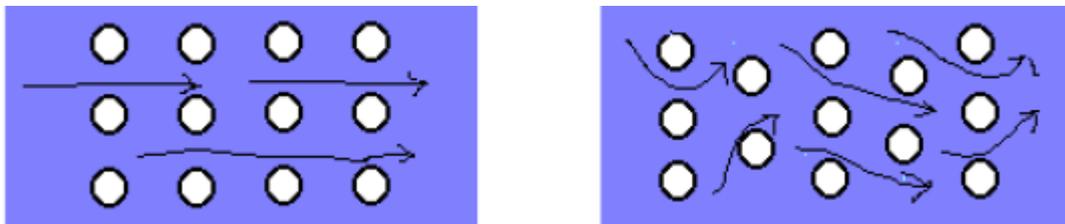


Figure V. 1 : Faisceau de tubes : aligné- en quinconce

La corrélation expérimentale utilisée est :

$$Nu = B \cdot Re^{0,6} \cdot Pr^{0,33} \quad (V.12)$$

Avec: B = 0,26 pour un faisceau aligné; B = 0,33 pour un faisceau en quinconce

**5.3.1.4. Cas d'écoulement le long d'une plaque plane parallèle**

• **Régime Laminaire :**

Le nombre de Nusselt moyen sur une plaque de largeur L est :

$$\overline{Nu}_L = \frac{2}{3} \cdot Re_L^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \quad (V.13)$$

• **Régime turbulent :**

Dans le cas du régime turbulent, la corrélation correspondante est :

$$\overline{N_{uL}} = 0,036 \cdot R_{eL}^{0,8} \cdot P_r^{1/3} \quad (\text{V.14})$$

### 5.3.2. Convection naturelle

Comme la convection forcée, l'analyse dimensionnelle permet de définir des nombres adimensionnels pour la convection naturelle.

- **Nombre de Grashof :**

$$G_r = \frac{\alpha \cdot g \cdot \Delta T \cdot \rho^2 \cdot L^3}{\mu^2} \quad (\text{V.15})$$

- **Nombre de Rayleigh :**

$$R_a = G_r \cdot P_r = \frac{c_p \cdot \alpha \cdot g \cdot \Delta T \cdot \rho^2 \cdot L^3}{\lambda \cdot \mu} \quad (\text{V.16})$$

Les corrélations expérimentales pour la convection naturelle sont généralement de la forme :

$$N_u = C \cdot R_a^n \quad (\text{V.17})$$

Les grandeurs physiques utilisées pour le calcul des nombres de Grashof et Prandtl doivent être calculées à la température moyenne :  $T_m = \frac{T_p + T_f}{2}$  avec :

$T_p$  : Température de la paroi

$T_f$  : Température du fluide.

L'exposant n dépend du type de régime :

**n=1/4** : Régime laminaire

**n=1/3** : Régime turbulent

Le coefficient C dépend du régime de convection ainsi que la géométrie :

Tableau V. 3 : Valeurs de C

Géométrie	Dimension caractéristique	Régime laminaire	Régime turbulent
Plaque verticale	Hauteur	0,59	0,13
Cylindre horizontal	Diamètre extérieur	0,53	0,10
Plaque horizontale chauffant vers le haut	Largeur	0,54	0,14
Plaque horizontale chauffant vers le bas	Largeur	0,27	0,07

## 5.4. Convection avec changement d'état

### 5.4.1. Condensation

La théorie de Nusselt, établie en 1916, relie analytiquement le coefficient de transfert  $h$  aux divers paramètres physiques intervenant dans la condensation en film d'un fluide sur une paroi.

- **Paroi verticale :**

$$h_v = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left( \frac{\lambda_1 \rho_1^2 g \Delta H}{L \mu_1 \Delta T} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{V.18})$$

Avec :

$\Delta H$  : Chaleur latente de condensation (J/kg).

$\Delta T$  : Différence entre la température de rosée de la vapeur et la température de la paroi (°C).

$L$  : Hauteur de la paroi (m).

La condition de validité :  $Re < 2100$

- **Tube horizontal**

Une valeur moyenne de  $h$  pour un tube horizontal peut être calculée par :

$$h_h = 0.725 \left( \frac{\lambda_1 \rho_1^2 g \Delta H}{D_e \mu_1 \Delta T} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{V.19})$$

Avec la condition de validité :  $Re < 2100$

### 5.4.2. Ebullition

Le problème devient encore plus complexe.

# **CHAPITRE 6**

**Exemple de dimensionnement d'échangeur**

## 6. EXEMPLE DE DIMENSIONNEMENT DES ECHANGEURS DE CHALEUR

### 6.1. Introduction

Les échangeurs de chaleur sont des appareils permettant de transférer de la chaleur entre deux fluides à des températures différentes. Dans la plupart des cas, les deux fluides ne sont pas en contact, et le transfert s'effectue à travers une surface d'échange. Au sein de la paroi séparatrice, le mécanisme de transmission de la chaleur est la conduction, et, sur chacune des deux surfaces de contact avec les fluides, ce sont presque toujours les phénomènes de convection qui prédominent.

### 6.2. Classification

Il existe plusieurs types d'échangeurs de chaleur selon le procédé de transfert thermique, l'écoulement des fluides et surtout la conception technologique. Les quatre principales catégories utilisées dans les systèmes énergétiques sont les échangeurs tubulaires, à tube et calandre, à ailettes et les échangeurs à plaques.

La catégorie la plus importante, en raison de ses nombreuses applications industrielles est celle des échangeurs continus où les deux fluides circulent de manière continue de part et d'autre de la surface d'échange. Selon la géométrie de cette surface d'échange, on distingue les **échangeurs tubulaires** et les **échangeurs à plaques**.

- **Echangeurs tubulaires**

C'est le type d'échangeurs le plus répandu. La figure VI.1 montre un schéma simplifié d'un échangeur tubulaire.

Selon que les deux fluides s'écoulent dans le même sens, ou en sens contraire, on distinguera respectivement l'échangeur à co-courants (courants parallèles) ou à contre-courants (fig. VI. 2). Cependant, il s'avère difficile d'obtenir des surfaces d'échanges importantes avec ce type de configuration, sans aboutir à des appareils très encombrants. Ce qui a conduit à la conception de géométries à faisceaux de tubes logés dans une enveloppe appelée calandre.

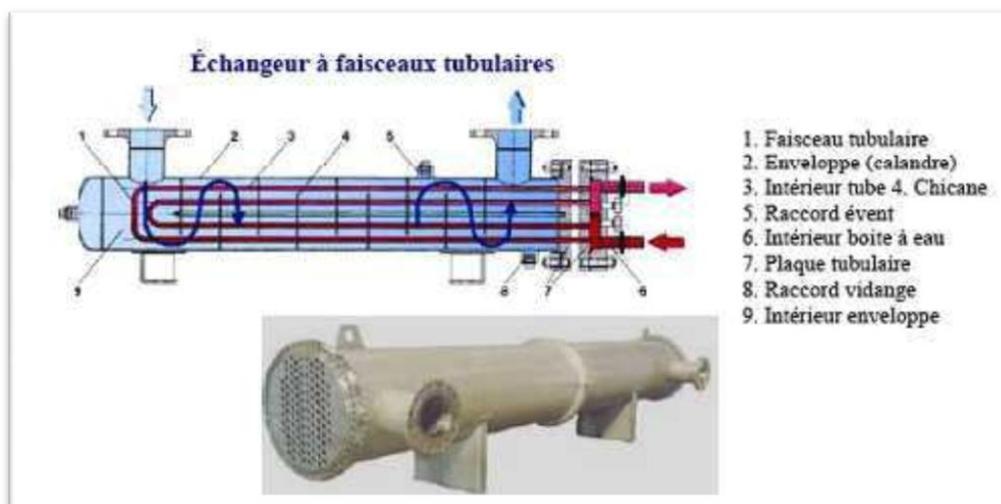


Figure VI. 1 : Echangeur de chaleur tubulaire

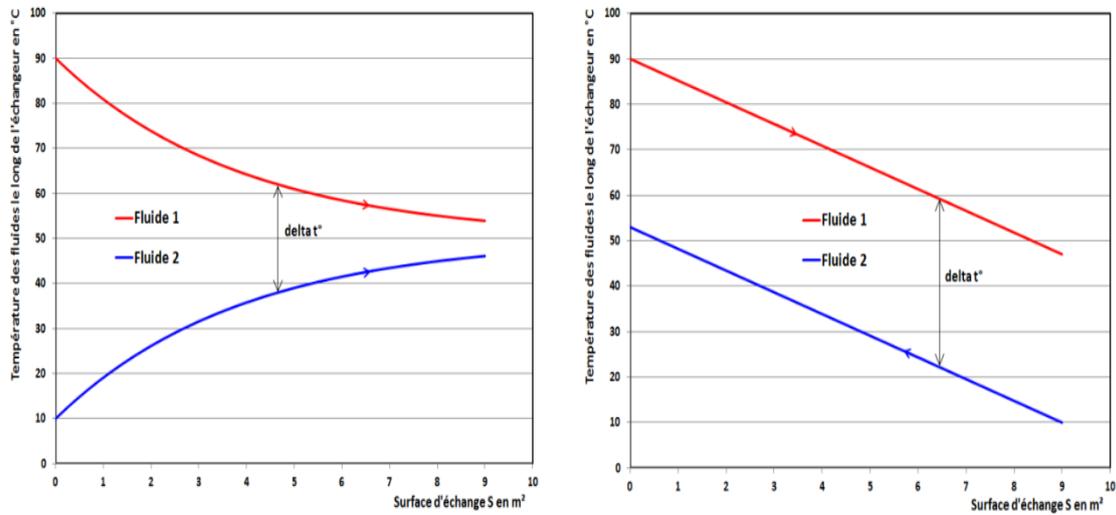


Figure VI. 2 : Fonctionnement à co-courant et contre-courant

• **Echangeurs à plaques**

En raison de leur développement favorisé par leurs performances thermiques appréciables, on les trouve aujourd’hui dans divers secteurs de l’industrie. Selon la conception de la surface des plaques on distingue les échangeurs à surface primaire (les plus communs) et les échangeurs à surface secondaire (on ajoute des ailettes plissées ou ondulées entre les plaques). Dans d’autres configurations, les plaques peuvent aussi être brasées ou soudées entre elles. (Fig. VI.2).

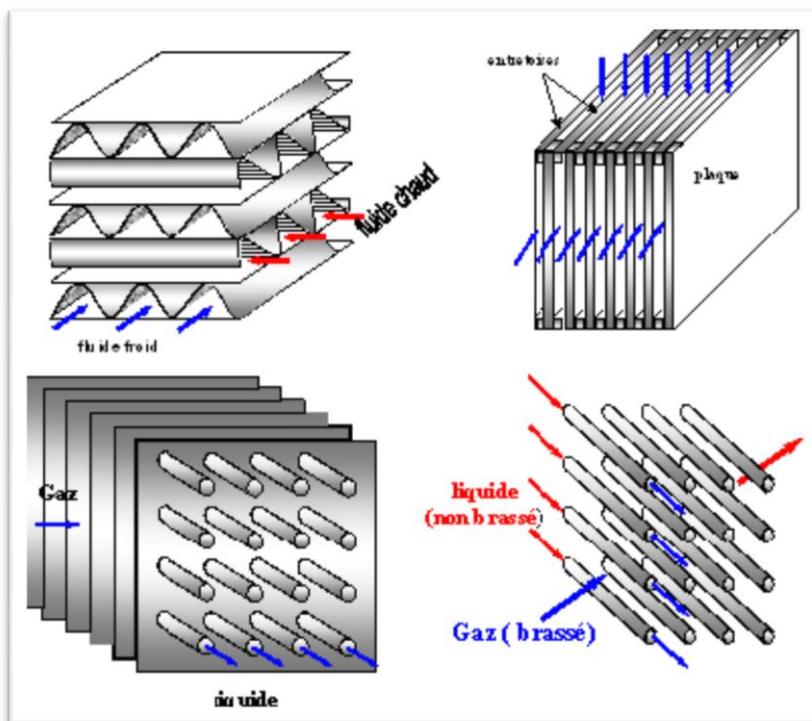


Figure VI. 3 : Echangeur de chaleur à plaques

### 6.3. Définitions

#### 6.3.1. Efficacité d'un échangeur

On définit l'efficacité d'un échangeur comme le rapport du flux de chaleur effectivement transféré dans l'échangeur au flux de chaleur maximal qui serait transféré dans les mêmes conditions de températures d'entrée des deux fluides dans un échangeur tubulaire de longueur infinie fonctionnant à contre-courant :

$$\eta = \frac{\varphi}{\varphi_{max}} \quad (\text{VI.1})$$

On considère qu'un échangeur sans pertes possède une efficacité égale à 1.

#### 6.3.2. Rendement d'un échangeur

Le rendement d'un échangeur correspond à la formule suivante :

$$\mathfrak{R} = \frac{\text{Puissance récupérée}}{\text{Puissance récupérable}} \quad (\text{VI.2})$$

Le rendement de 1 est donc impossible à atteindre. Le rendement est induit par les besoins en puissances et en températures de l'application du client. Il est donc, dans la majorité des cas, fixé dès la demande par le client lui-même.

### 6.4. Hypothèses

Dans le calcul simple des échangeurs de chaleur, les plus importantes hypothèses retenues sont :

- Pas de changement de phase au cours du transfert thermique.
- Pas de pertes thermiques : la surface de séparation est la seule surface d'échange.

### 6.5. Conventions

Les températures d'entrée et de sortie des deux fluides chaud et froid sont définies conventionnellement comme suit:

Fluide chaud :  $T_{1e}$  : Température d'entrée,  $T_{1s}$  : Température de sortie

Fluide froid :  $T_{2e}$  : Température d'entrée,  $T_{2s}$  : Température de sortie

### 6.6. Exemple de calcul d'échangeur thermique

L'exemple de calcul portera sur un échangeur thermique tubulaire simple constitué de deux tubes cylindriques coaxiaux, un fluide chaud circule dans le tube intérieur, l'autre dans l'espace entre les deux tubes. Le transfert thermique s'effectue à travers la paroi du tube intérieur.

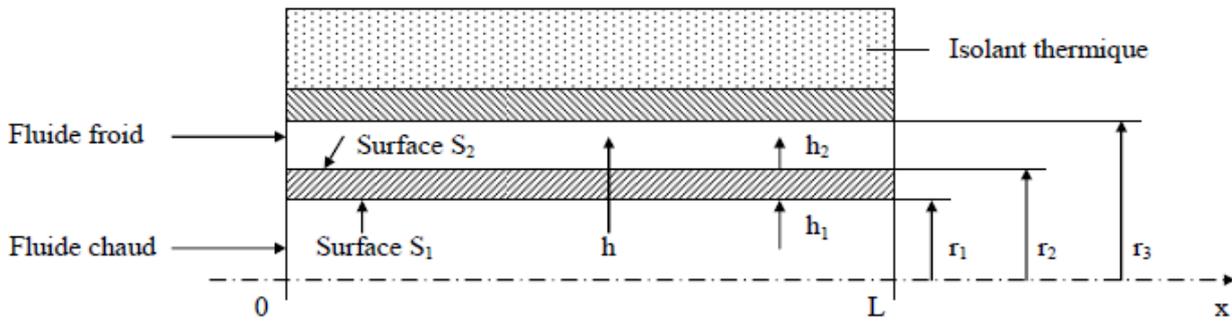


Figure VI. 4 : Schéma d'un échangeur tubulaire simple

### 6.6.1. Calcul de la puissance totale de l'échangeur

Le calcul se base sur la puissance totale échangée  $P$ . c'est la puissance transmis par le fluide chaud et reçue par le fluide froid:

$$P = P_{chaud} = P_{froid} \Rightarrow P = Q \cdot C_P \cdot \Delta T_{chaud} = Q \cdot C_P \cdot \Delta T_{froid} \quad (VI.3)$$

Avec :

- $P$  : La puissance totale [KW]
- $Q$  : Le débit massique [ Kg /h]
- $C_P$  : La chaleur spécifique [ KWh/Kg/°C]
- $\Delta T_{chaud} = T_{1e} - T_{1s}$  [°C]
- $\Delta T_{froid} = T_{2s} - T_{2e}$  [°C]

### 6.6.2. Calcul de la surface de l'échangeur

La surface de l'échangeur est liée à la puissance totale échangée par la relation suivante :

$$P = K \cdot S \cdot \Delta TLM \quad (VI.4)$$

Avec :

- $S$  : La surface de l'échangeur [ m<sup>2</sup>]
- $K$  : Le coefficient d'échange [KW/°C.m<sup>2</sup>]. Il dépend de l'échangeur et il est calculé par le fabricant.
- $\Delta TLM$  : La différence de Température Logarithmique Moyenne.

### 6.6.3. Calcul de la différence de température logarithmique moyenne

Le DTLM est la moyenne logarithmique des pincements de température à chaque extrémité de l'échangeur :

$$\Delta TLM = \frac{\Delta T_s - \Delta T_e}{\ln\left(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e}\right)} \quad (\text{VI.5})$$

Cette relation s'applique aussi bien au mode de fonctionnement à co-courant qu'à un échange à contre courant, mais les expressions de  $\Delta T_s$  et de  $\Delta T_e$  ne sont pas identiques dans les deux cas (figure VI.2) :

$$\left| \begin{array}{ll} \text{Co - courant} & \text{Contre - courant} \\ \Delta T_s = T_{1s} - T_{2s} & \Delta T_s = T_{1s} - T_{2e} \\ \Delta T_e = T_{1e} - T_{2e} & \Delta T_e = T_{1e} - T_{2s} \end{array} \right| \quad (\text{VI.6})$$

#### 6.6.4. Calcul du coefficient K

Le coefficient d'échange global d'un échangeur est donné par la formule suivante :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{e}{\lambda} + R_{\text{encrassement}} \quad (\text{VI.7})$$

Avec :

- $h_1$  et  $h_2$ : Coefficients d'échange convectifs des fluides chaud et froid.
- $E$  : Epaisseur de la paroi [m].
- $\lambda$ : Conductivité thermique de la paroi [ $\text{W}/^\circ\text{C} \cdot \text{m}$ ].
- $R_{\text{encrassement}}$  : Résistance due à l'encrassement de la paroi [ $\text{m}^2 \cdot \text{K}/\text{W}$ ].

L'obtention de la valeur K permet le calcul de la surface et des dimensions de l'échangeur.

Tableau VI. 1 : Valeurs de la résistance d'encrassement pour quelques fluides

Fluide	$R_{\text{encrassement}}$
Eau de mer (<50°C)	$10^{-4}$
Eau de mer (>50°C)	$2 \cdot 10^{-4}$
Eau traitée pour chaudière	$2 \cdot 10^{-4}$
Eau déminéralisée	$9 \cdot 10^{-5}$
Vapeur d'eau	1 à $2 \cdot 10^{-4}$
Fluides frigorigènes	$2 \cdot 10^{-4}$
Air industriel	$4 \cdot 10^{-4}$
Fioul	$9 \cdot 10^{-4}$
Huile lubrifiante	$2 \cdot 10^{-4}$

## ANNEXES

### Annexe A : Opérateurs différentiels

#### A.1. Introduction

Dans l'étude des transferts thermiques, on étudie des fonctions scalaires, comme la température et des fonctions vectorielles, comme le flux et toutes les fonctions utilisées sont des champs variant dans l'espace et dans le temps. On est amené alors à manipuler les dérivées partielles de ces fonctions par rapport au temps ou par rapport aux différents systèmes de coordonnées.

Dans cette annexe, on expose les différents opérateurs différentiels dans les différents systèmes de coordonnées : cartésiennes, cylindriques et sphériques.

#### A.2. Produit scalaire et Produit vectoriel

Soit deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  ayant pour composantes dans un référentiel cartésien  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$  et  $\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y, \mathbf{b}_z$  respectivement. On définit :

- le produit scalaire :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{b}_x + \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{b}_y + \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{b}_z$

- le produit vectoriel :  $\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{b}_z - \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{b}_y \\ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{b}_x - \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{b}_z \\ \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{b}_y - \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{b}_x \end{bmatrix}$

#### A.3. Circulation d'un champ de vecteurs

En considérant une courbe fermée (C), la circulation du vecteur  $\vec{a}$  sur (C) :

$$\oint \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{Avec : } d\vec{l} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

#### A.4. flux d'un champ de vecteurs

En considérant une surface (S) et son vecteur normal unitaire  $\vec{n}$ , le flux du vecteur  $\vec{a}$  à travers (S), la grandeur scalaire :

$$\Phi = \iint \vec{a} \cdot \vec{n} dS$$

## A.5. Le gradient

### A.5.1. Expression en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

### A.5.2. Expression en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}f(r, \phi, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

### A.5.3. Expression en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}f(r, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

## A.6. La divergence

### A.6.1. Expression en coordonnées cartésiennes

La divergence d'un champ vectoriel  $\vec{a}$  est un scalaire défini par :

$$\text{div}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

### A.6.2. Expression en coordonnées cylindriques

$$\text{div}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

### A.6.3. Expression en coordonnées sphériques

$$\text{div}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi}$$

## A.7. Le rotationnel

### A.7.1. Expression en coordonnées cartésiennes

Le rotationnel d'un champ vectoriel  $\vec{a}$  est un vecteur défini par :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

### A.7.2. Expression en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \phi} - \frac{\partial a_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r a_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial(r a_r)}{\partial \phi} \right) \end{bmatrix}$$

### A.7.3. Expression en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta a_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r \sin \theta a_\phi)}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(a_r)}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix}$$

## A.8. Le laplacien

### A.8.1. Expression en coordonnées cartésiennes

Le laplacien est défini comme la divergence du gradient.

- Laplacien scalaire :

$$\Delta f = \nabla^2 f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Laplacien vectoriel :

$$\overrightarrow{\Delta a} = \overrightarrow{\nabla^2 a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

### A.8.2. Expression en coordonnées cylindriques

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

### A.8.3. Expression en coordonnées sphériques

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

### A.9. Relations fondamentales

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}) = 0$$

$$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f)$$

$$\Delta \vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}))$$

## Annexe B : Unités thermiques

### B.1. Système International S I

$$\Delta T(K) = \Delta T(^{\circ}C)$$

Température :  $T(K) = T(^{\circ}C) + 273.15$

Quantité de chaleur :  $1 \text{ Joule} = 0.239 \text{ cal} = 0.948 \cdot 10^{-3} \text{ Btu}$

Flux thermique :  $1 \text{ W} = 0.239 \frac{\text{cal}}{\text{s}} = 0.86 \frac{\text{kcal}}{\text{h}} = 3.41 \text{ Btu/h}$

Densité du flux :  $1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 23,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} = 0.86 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \cdot \text{h}} = 0.317 \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2 \cdot \text{h}}$

Coefficient global de transmission thermique :  $1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} = 23,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot ^{\circ}C} = 0.86 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \cdot \text{h} \cdot ^{\circ}C} = 0.176 \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2 \cdot \text{h} \cdot ^{\circ}F}$

Résistance thermique :  $1 \frac{\text{K}}{\text{W}} = 4.1855 \frac{^{\circ}C \cdot \text{s}}{\text{cal}} = 1.163^{\circ}C \cdot \frac{\text{h}}{\text{kcal}} = 0.526^{\circ}F \cdot \frac{\text{h}}{\text{Btu}}$

### B.2. Système C G S

Quantité de chaleur :  $1 \text{ cal} = 4.1855 \text{ J}$

Flux thermique :  $1 \frac{\text{cal}}{\text{s}} = 4.1855 \text{ W}$

Densité du flux :  $1 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} = 4.1855 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2$

Coefficient global de transmission thermique :  $1 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot ^{\circ}C} = 4.1855 \cdot 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$

Résistance thermique :  $1 \frac{^{\circ}C \cdot \text{s}}{\text{cal}} = 0.239 \text{ K/W}$

### B.3. Système Anglo-Saxon

$$\Delta T(^{\circ}F) = 1,8 \cdot \Delta T(^{\circ}C) \quad T(^{\circ}F) = 1,8 \cdot T(^{\circ}C) + 32$$

Température :  $T(^{\circ}R) = 1,8 T(K)$

Quantité de chaleur :  $1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J}$

Flux thermique :  $1 \frac{\text{Btu}}{\text{h}} = 0.293 \text{ W}$

Densité du flux :  $1 \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2 \cdot \text{h}} = 3.15 \text{ W/m}^2$

Coefficient global de transmission thermique :  $1 \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2 \cdot \text{h} \cdot ^{\circ}F} = 5.68 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$

Résistance thermique :  $1^{\circ}F \cdot \frac{\text{h}}{\text{Btu}} = 1.9 \text{ K/W}$

**Annexe C : Conductivités thermiques**

<b>Liquide</b>	$\lambda$ [W/m.K]
Acetone	0.2
Alcool	0.17
Mercure	8.7
Eau	0.58

<b>Gaz</b>	$\lambda$ [W/m.K]
Air	0.026
Co <sub>2</sub>	0.017
Azote	0.026
Oxygène	0.027

<b>Solides Métalliques</b>	$\lambda$ [W/m.K]
Fer	73
Acier	46
Aluminium	210
Cuivre	386
Argent	406
Or	293
Laiton	85

<b>Solides Métalliques</b>	$\lambda$ [W/m.K]
Amiante	0.16
Brique Rouge	0.63
Carton	0.2
Ciment	0.3
Croute terrestre	1.7
Verre	0.81
Laine de verre	0.041

## Bibliographie

A.P.frcas. (1990). *Heat exchange design*. John Wily.

J.F. Sacadura, c. (2000). *Initiation aux transfert thermique*. 6eme edition.

J.Tarine, J. (2003). *Transfert thermique mécanique des fluides anisothermes*. 2eme édition Dunod.

Janniot, Y. (2002). *Transferts thermiques,cours*.

PADET, J. (2010). *Principes des transferts convectifs*. 2eme edition Societe Francaise de thermique.

S.Kalac. (2012). *Heat exchanges,Selection,rating and thermal design*. 3rd edition CRCPress.