

Chapitre III

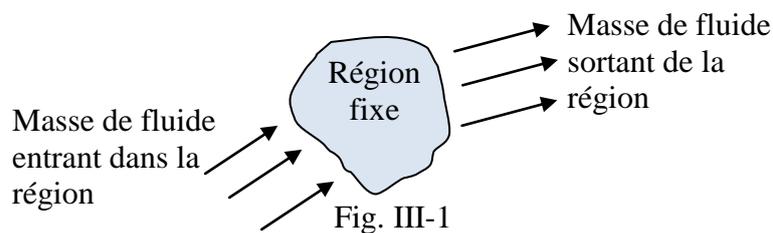
Dynamique des fluides incompressibles parfaits

L'écoulement d'un fluide réel est généralement très complexe. L'analyse mathématique des problèmes d'écoulement des fluides est généralement possible seulement si certaines suppositions simplificatrices sont tenues en compte. L'une des principales suppositions est que le fluide est idéal c'est-à-dire que le fluide est non visqueux ($\mu=0$). Dans ce cas l'écoulement est dit parfait. Une autre simplification est de supposer que l'écoulement ne change pas avec le temps, l'écoulement est dit stationnaire ou permanent.

Dans ce chapitre nous allons traiter le principe de conservation de la masse et discuter l'utilisation de la seconde loi de Newton $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ appliquée à une particule fluide. Nous obtenons alors la fameuse équation de Bernoulli et l'appliquons pour différents écoulements.

III-1- Principe de conservation de masse : En l'absence d'une réaction nucléaire, la masse ne peut être produite ou détruite. La masse reste constante quand le temps varie.

Considérons une région fixe traversée par un fluide (Fig. III-1).



Le taux de masse de fluide qui entre dans cette région = le taux de masse qui sort de cette région
+ le taux d'accumulation de masse du fluide dans cette région.

Si l'écoulement est stationnaire il n'y a pas d'accumulation de masse dans la région considérée.

L'expression précédente devient donc :

Le taux de masse de fluide entrant dans cette région = le taux de masse sortant de cette région.

Le principe de conservation de masse est exprimé mathématiquement par l'équation de continuité.

III-2- Equation de continuité - Forme intégrale

L'équation de continuité est obtenue selon deux formulations mathématiques, l'une différentielle et l'autre intégrale.

Avant d'entamer la forme intégrale de l'équation de continuité on présente quelques définitions.

-Une **ligne de courant** est une ligne de champs du vecteur vitesse. C'est une courbe tangente en tout point $M(x, y, z)$ au vecteur vitesse $\vec{U}(x,y,z,t_0)$ à l'instant t_0 . L'ensemble des lignes de courant peut évoluer au cours du temps.

-Un **tube de courant** est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée. Le fluide ne traverse pas la paroi du tube de courant

-Un **filet de courant** est un tube de courant dont la section est infiniment petite.

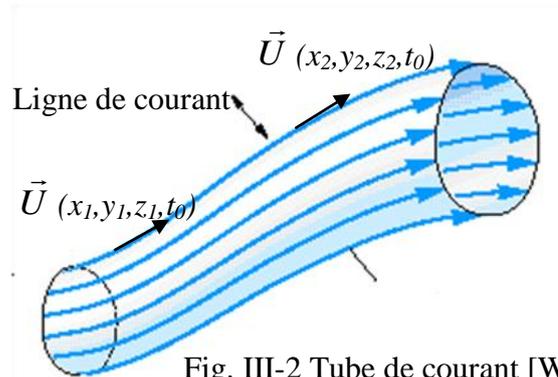


Fig. III-2 Tube de courant [White]

• Appliquons dans ce qui suit le principe de conservation de masse dans le cas d'un écoulement **stationnaire** pour lequel il n'y a pas d'accumulation de masse dans le volume fluide considéré.

• Soit un filet de courant de section infiniment petite ΔA pour pouvoir supposer que la vitesse ne varie pas le long de cette section (figure III-3).

• Choisissons deux plans B et C distants d'une longueur δs si petite que la variation de section de B à C est négligeable.

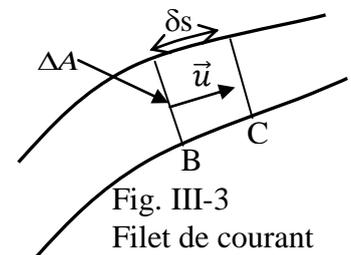


Fig. III-3
Filet de courant

La masse du volume fluide limitée par les plans B et C est $dm = \rho dA \delta s$

Le débit massique $d\dot{m}$ qui traverse C pendant un laps de temps δt est $d\dot{m} = \frac{dm}{\delta t} = \frac{\rho dA \delta s}{\delta t}$; or

$\frac{\delta s}{\delta t}$ est la vitesse linéaire u perpendiculaire à dA Ainsi le débit massique $d\dot{m} = \rho u dA$.

Pour un écoulement stationnaire dans le filet de courant, le même débit traversant C traverse toute section du même filet de courant, ainsi

$$d\dot{m} = \rho_1 u_1 dA_1 = \rho_2 u_2 dA_2 = \rho_3 u_3 dA_3 = \dots = \text{constante} \quad (\text{III-1})$$

II-3-Débit massique et débit volumique

Pour calculer le débit massique traversant un tube de courant de section A, l'équation (III-1) doit être intégrée sur toute la surface A, elle donne:

$$\dot{m} = \int_A \rho u dA = C^{te} \quad (\text{III-2})$$

L'équation (III-2) représente la forme intégrale de l'équation de continuité où u est la vitesse linéaire perpendiculaire à la section choisie.

- Si ρ et u ne varient pas le long d'une section A_1 du tube de courant le débit massique traversant cette section est $\dot{m} = \rho_1 u_1 A_1$.
- Si le fluide est **incompressible** donc ρ ne varie pas le long du tube de courant, le produit de la section et de la vitesse représentant le débit volumique Q (m^3/s) reste constant le long du tube de courant

$$Q = \int_A u dA = C^{te} \quad (\text{III-3})$$

En général l'écoulement est caractérisé par sa vitesse moyenne U et le débit volumique s'exprime alors:

$$Q = UA = C^{te} \quad (\text{III-4})$$

De cette formule on déduit que la vitesse moyenne d'écoulement U et la section de passage du fluide A varient à l'inverse.

Exemple III-1

De l'eau s'écoule dans une conduite de diamètre 50 mm à une vitesse moyenne de $U_1=10$ m/s puis traverse radialement l'espace entre deux disques comme montré sur la figure ci contre. Les disques sont parallèles et la distance entre eux est $h=10$ mm.

-Calculer la vitesse moyenne U_2 de l'eau au rayon de 300mm à la sortie de l'espace entre les deux disques.

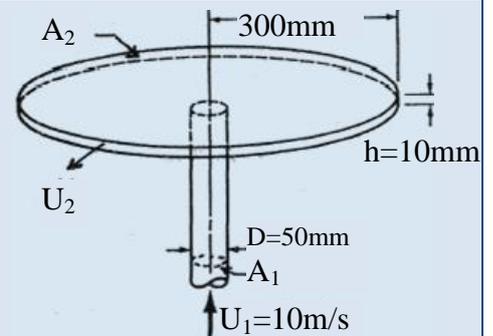


Fig. Exp. III-2

Solution

- Calculer la vitesse moyenne entre les deux disques

Dans cet exemple on considère que le fluide est incompressible et les vitesses d'écoulement à travers les sections A_1 et A_2 sont des vitesses moyennes donc constantes le long des sections.

En appliquant l'équation de continuité on a

$$Q_1 = Q_2 \text{ donc } U_1 A_1 = U_2 A_2$$

$$\text{Ainsi } U_2 = \frac{A_1}{A_2} U_1 = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{2\pi R h} U_1 = \frac{D^2}{8R h} U_1 = \frac{(0.05\text{m})^2}{8(0.3\text{m})(0.01\text{m})} \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 1.042 \text{ m/s}$$

III-4-Equations générales de la dynamique des fluides parfaits

III-4-1 Equations d'Euler: ces équations traduisent l'équilibre des forces intervenant dans un écoulement d'un fluide parfait. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, la seconde loi de Newton à une particule fluide de masse dm constante on trouve.

$$\left[\begin{array}{l} \text{La somme des forces qui s'exercent} \\ \text{sur la particule fluide} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{la dérivée temporelle de la quantité de mouvement} \\ \text{de la particule fluide} \end{array} \right]$$

$$\sum d\vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt}(dm\vec{U}) \quad \text{(III-5)}$$

Les forces qui s'exercent sur la particule fluide sont les forces volumiques de pesanteur $\rho\vec{g}d\mathcal{V}$ et les forces surfaciques de pression $\vec{grad} p d\mathcal{V}$ comme il a été présenté au chapitre précédent en les remplaçant dans l'équation (III-14) on trouve :

$$\left[\rho\vec{g}d\mathcal{V} - \vec{grad} p d\mathcal{V} \right] = \frac{d}{dt}(dm\vec{U}) = dm \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho d\mathcal{V} \frac{d\vec{U}}{dt}$$

En divisant par $\rho d\mathcal{V}$ on trouve :

$$\vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{grad} p = \frac{d\vec{U}}{dt} \quad \text{(III-6)}$$

C'est l'équation d'Euler qui est l'équation fondamentale de l'écoulement instationnaire d'un fluide parfait.

On peut l'écrire aussi :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} + \frac{1}{\rho} \vec{grad} p - \vec{g} = \vec{0} \quad \text{(III-7)}$$

III-4-2 Equation de Bernoulli sans échange de travail

Pour établir l'équation de Bernoulli nous allons faire quelques considérations:

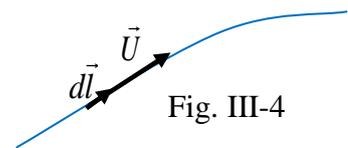


Fig. III-4

- considérer **une ligne de courant** (figure III-4) quelconque dans un écoulement **permanent** d'un fluide **parfait incompressible**,
- nous allons considérer un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ (dx, dy, dz) de la particule fluide ayant une vitesse \vec{U} le long de cette ligne de courant ($d\vec{l} = \vec{U}dt$)
- nous formons le produit scalaire de l'équation d'Euler (III-8) avec $d\vec{l}$ et obtenons:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} d\vec{l} + \frac{1}{\rho} \vec{grad} p d\vec{l} - \vec{g} d\vec{l} = 0 \quad \text{(III-8)}$$

Or $d\vec{l} = \vec{U}dt$ donc on obtient:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} \vec{U} dt + \frac{1}{\rho} \text{grad } p d\vec{l} - \vec{g} d\vec{l} = 0 \quad (\text{III-9})$$

$$\text{Sachant que } \begin{cases} \frac{d\vec{U}}{dt} \vec{U} dt = \vec{U} d\vec{U} = \frac{1}{2} d\vec{U}^2 = d \frac{U^2}{2} \\ \text{grad } p d\vec{l} = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp \\ \vec{g} d\vec{l} = -g dz \end{cases} \quad (\text{III-10})$$

En remplaçant l'équation (III-10) dans (III-9) on trouve

$$d \frac{U^2}{2} + \frac{1}{\rho} dp + g dz = 0 \quad (\text{III-11})$$

Puisque le fluide est incompressible l'équation (III-20) devient :

$$d \left(\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad (\text{III-12})$$

La variation d'une fonction est nulle donc cette fonction est constante alors

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C^{te} \quad (\text{III-13})$$

La relation (III-13) est la fameuse équation de Bernoulli (Daniel Bernoulli (1700-1782)). Elle traduit la conservation de l'énergie totale par unité de masse pour un fluide **parfait incompressible** en écoulement **permanent** dans le champ de pesanteur. La charge totale le long d'une ligne de courant pour un fluide parfait reste constante.

L'unité des termes de l'équation (III-13) est joule/kg.

- Le terme $\frac{U^2}{2}$ représente l'énergie cinétique par unité de masse
- Le terme $\frac{p}{\rho}$ représente le travail des forces de pression par unité de masse du fluide.
- Le terme gz représente l'énergie potentielle par unité de masse.

Divisons l'équation (III-13) par 'g' on obtient

$$\frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = C^{te} \quad (\text{III-14})$$

Tous les termes de l'équation de Bernoulli écrite sous la seconde forme (III-14) sont homogènes à une hauteur, leur unité est le mètre.

- $\frac{U^2}{2g}$ représente la hauteur dynamique
- $\frac{p}{\rho g} + z$ représente la hauteur piézométrique.
- z représente la cote ou la hauteur de position.

En multipliant l'équation (III-14) par ρg on obtient une équation où tous les termes sont équivalents à une pression tel que $\frac{\rho U^2}{2} + p + \rho g z = C^{te}$

Si on considère deux points 1 et 2 de la même ligne de courant l'équation de Bernoulli (III-14) s'écrit alors

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = C^{te} \quad \text{(III-15)}$$

III-4-3-Equation de Bernoulli avec échange de travail

En présence de machines, le fluide **fourni** un travail w_T à une machine telle qu'une **turbine** et **reçoit** un travail w_P d'une machine telle qu'une **pompe**, l'équation de Bernoulli généralisée s'écrit alors

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} + gz_1 + w_p = \frac{p_2}{\rho} + \frac{U_2^2}{2} + gz_2 + w_T \quad \text{(III-16)}$$

En termes de hauteur, en divisant l'équation III-16 par g on obtient

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} + z_1 + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g} + z_2 + h_T \quad \text{(III-17)}$$

La puissance d'une machine (M) installée dans le circuit du fluide entre les points 1 et 2 est donnée par l'expression

$$\mathcal{P}_M = \dot{m} w_M = \dot{m} g h_M = \rho Q g h_M \quad \text{(III-18)}$$

Exemple III-2

On pompe de l'huile de densité $d=0.861$ jusqu'au réservoir C par une conduite de 40 cm de diamètre (figure Exp. III-3). La pression effective en A est 1400 Pa quand le débit est de 197 litres/s.

- a- Quelle est la puissance fournie par la pompe?
- b- Quelle doit être la pression effective en B?

Solution

a-Calculer la puissance fournie par la pompe

Pour trouver la puissance de la pompe on utilise l'équation de Bernoulli entre A et C en présence d'une pompe (éq.III-28).

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{U_A^2}{2g} + z_A + h_p = \frac{p_C}{\rho g} + \frac{U_C^2}{2g} + z_C$$

On a choisi le point C car on a $U_C=0$, $p_C=p_{atm}$ et $z_C=54m$

$$p_{Aeff} = 1400 Pa, z_A=30m$$

De l'équation de continuité on a $Q=U_A A=U_A \pi D^2/4$

$$Donc U_A=4Q/\pi D^2=4.197.10^{-3} (m^3/s)/\pi. (0.4m)^2=1.57m/s$$

$$h_p = -\left(\frac{p_A - p_C}{\rho g}\right) - \frac{U_A^2}{2g} + z_C - z_A = \frac{-p_{Aeff}}{\rho g} - \frac{U_A^2}{2g} + z_C - z_A$$

$$= \frac{-1400(Pa)}{861(kg/m^3)9.81(N/kg)} - \frac{(1.57(m/s))^2}{2 \times 9.81(N/kg)} + 54 - 30(m)$$

$$h_p=23.75(m)$$

La puissance de la pompe est donnée par la formule

$$\mathcal{P}_p = \rho Q g h_p = 861 (kg/m^3) 197 \times 10^{-3} (m^3/s) 9.81 (N/kg) 23.75(m) = 39525.68Watt$$

b- La pression effective en B

On applique l'équation de Bernoulli entre A et B

$$\frac{p_{Aeff}}{\rho g} + \frac{U_A^2}{2g} + z_A + h_p = \frac{p_{Beff}}{\rho g} + \frac{U_B^2}{2g} + z_B$$

$$U_A = U_B \text{ (On a la même conduite)}$$

$$z_A = z_B$$

En remplaçant ces données dans l'équation de Bernoulli on trouve:

$$p_{Beff} = p_{Aeff} + \rho g h_p$$

On remarque que le rôle de la pompe est d'augmenter la pression du fluide par $\rho g h_p$

$$p_{Beff} = 1400(Pa) + 861(kg/m^3) 9.81(N/kg) 23.75(m) = 202002.24(Pa) = 2.02bar$$

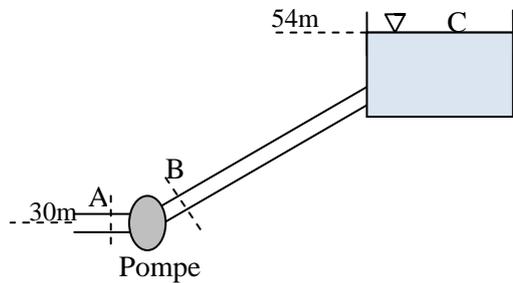


Fig. Exp.III-3

III-5- Applications de l'équation de Bernoulli: Cette équation constitue l'un des résultats le plus fondamental en M.D.F. En effet son application a permis de résoudre de nombreux problèmes. Nous allons présenter quelques un.

III-5-1-Ecoulement libre à travers un petit orifice

Considérons la figure ci-dessous qui représente un réservoir ayant une section A_1 , rempli d'un fluide qui s'écoule par un petit orifice de section A_2 .

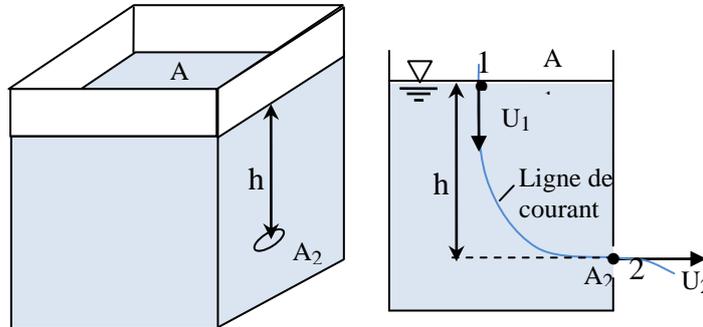


Fig. III-5 Réservoir à petit orifice

Appliquons l'équation de Bernoulli (III-24) le long de la ligne de courant passant par les points 1 et 2.

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

Les particules 1 et 2 sont en contact avec l'atmosphère alors $p_1 = p_2 = p_{atm}$ en les remplaçant dans l'équation précédente on trouve

$$z_1 - z_2 = \frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} = h \quad (III-31)$$

En supposant que les vitesses sont uniformes le long des sections du réservoir et de l'orifice, le principe de continuité nous permet d'écrire $Q = U_1 A_1 = U_2 A_2$ donc $U_1 = U_2 \frac{A_2}{A_1}$. En

remplaçant la valeur de U_1 dans (III-31) on obtient :

$$U_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

Si la section de l'orifice est négligeable devant celle du réservoir alors la vitesse d'écoulement du fluide à travers cet orifice est donnée par la formule (III-32).

$$U_2 = \sqrt{2gh} \quad (III-32)$$

C'est la formule de **Torricelli**.

Le débit volumique est $Q = A_2 \sqrt{2gh}$

III-5-2-Mesure des vitesses : Ils existent plusieurs appareils pour mesurer la vitesse dans des écoulements des fluides. Nous allons présenter les plus simples d'utilisation.

III-5-2-1-Tube de Pitot : Ce simple tube est utilisé pour mesurer la vitesse dans des écoulements à surface libre (les canaux, les rivières...).

Considérons une particule fluide M de vitesse U_M . Le tube de Pitot est placé dans le fluide au même niveau 'h' que le point M. Il est envahi par le fluide jusqu'à une hauteur Δh de la surface libre du fluide. Le point '0' est un point d'arrêt.

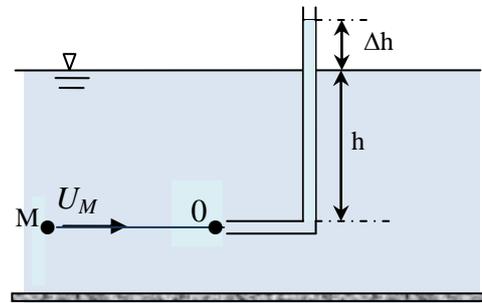


Fig. III-9 Tube de Pitot

Appliquons la relation de Bernoulli (III-24) entre le point M et le point 0 qui appartiennent à la même ligne de courant, on trouve:

$$\frac{p_M}{\rho g} + \frac{U_M^2}{2g} + z_M = \frac{p_0}{\rho g} + \frac{U_0^2}{2g} + z_0$$

Or $z_M = z_0$ et $U_0 = 0$ (point d'arrêt) donc :

$$\frac{p_M}{\rho g} + \frac{U_M^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g}$$

Alors
$$p_0 = p_M + \rho \frac{U_M^2}{2} \tag{III-33}$$

p_0 est la pression totale

p_M est la pression statique

$\rho \frac{U_M^2}{2}$ est la pression dynamique

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre M et un point de la surface libre on trouve

$$p_M = p_{atm} + \rho g h$$

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre '0' et un point de la surface libre dans le tube de Pitot on trouve

$$p_0 = p_{atm} + \rho g (h + \Delta h).$$

En remplaçant les expressions de p_M et p_0 dans la formule (III-33) on trouve la vitesse d'écoulement du fluide au point M comme suit $U_M = \sqrt{2g\Delta h}$

Connaissant la valeur Δh par lecture directe sur le tube de Pitot, on peut déterminer la valeur de la vitesse de l'écoulement de n'importe quel point de l'écoulement.

III-5-2-2-Tube de Pitot statique : Le tube de Pitot a été amélioré (voir figure ci-dessous) pour mesurer la vitesse des écoulements internes c'est-à-dire des écoulements dans des conduites.

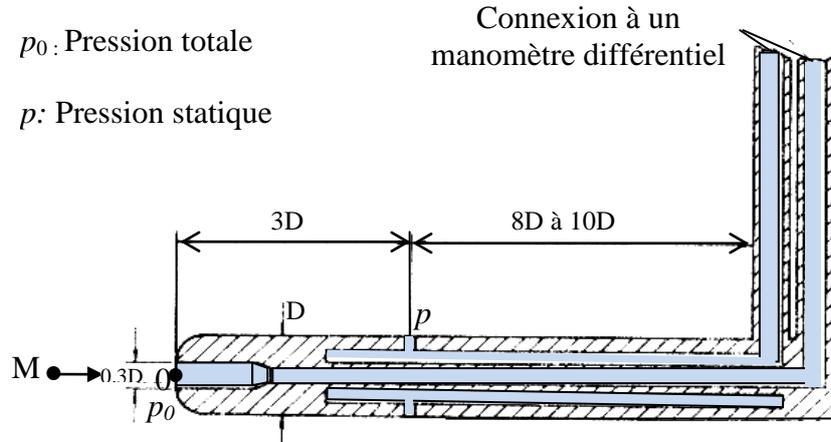


Fig. III-10 Tube de Pitot statique

Deux pressions, la pression statique p et la pression totale p_0 sont transmises à un manomètre différentiel qui indique la différence de pression $\Delta p = p_0 - p$.

La pression p_0 représente la pression au point d'arrêt, et p la pression au niveau des trous qui se trouvent sur le périmètre du tube de Pitot.

Si on considère que la vitesse au droit de la fente est égale à U_M et la pression est p_M , l'équation de Bernoulli entre M et le point d'arrêt 0 s'écrit:

$$\frac{p_M}{\rho g} + \frac{U_M^2}{2g} + z_M = \frac{p_0}{\rho g} + \frac{U_0^2}{2g} + z_0$$

Or $z_M = z_0$, $U_0 = 0$ (point d'arrêt) et $p_M = p$ donc : $\frac{p}{\rho g} + \frac{U_M^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g}$

En termes de pression, l'équation précédente peut s'écrire: $p_0 = p + \rho \frac{U_M^2}{2}$

La valeur de la vitesse d'écoulement de n'importe quel point dans la conduite est déterminée en connaissant la différence de pression ($p_0 - p$) par la relation suivante:

$$U_M = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}$$

($p_0 - p$) est calculée à partir d'un tube manométrique.

Connaissant la valeur de la vitesse, dans une station de la conduite, le débit volumique peut être déduit.

III-5-3-Tube de Venturi : c'est l'effet le plus courant et le plus spectaculaire associé à l'équation de Bernoulli. Il est utilisé pour déterminer la vitesse moyenne d'un écoulement donc le débit de l'écoulement dans une conduite (voir figure III-11).

L'application de l'équation de Bernoulli entre les points 1 et 2 donne:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g} + z_2$$

Dans le cas d'un venturi horizontal, $z_1 = z_2$

En considérant le principe de continuité et en l'appliquant entre les deux surfaces 1 et 2 on obtient $U_1 A_1 = U_2 A_2$

Où $A_1 = \frac{\pi D^2}{4}$, et $A_2 = \frac{\pi d^2}{4}$, donc $U_2 = U_1 \frac{D^2}{d^2}$. En remplaçant cette expression dans l'équation de

Bernoulli on trouve l'expression de la vitesse par la relation: $U_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho(1 - (D/d)^4)}}$

L'application de l'équation de l'hydrostatique permet d'obtenir $p_2 - p_1$ où

$$p_1 = p_{atm} + \rho g(h + \Delta h)$$

$$p_2 = p_{atm} + \rho g h$$

En remplaçant ces expressions dans la relation de U_1 on peut déterminer la valeur de la vitesse moyenne de l'écoulement en connaissant la déviation obtenue dans les tubes manométriques du

Venturi et ainsi que le débit de l'écoulement par les relations: $U_1 = \sqrt{2g\Delta h}$ et $Q = U_1 \frac{\pi D^2}{4}$

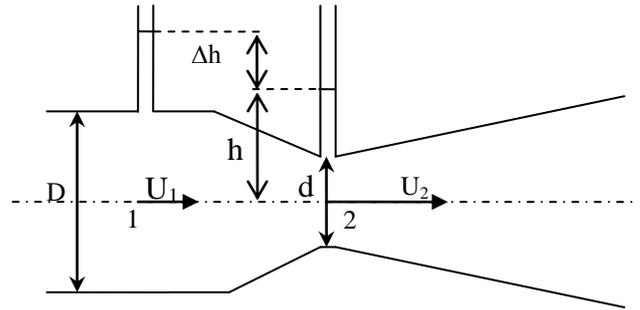


Fig. III-11 Tube de Venturi

Chapitre IV

Dynamiques des fluides incompressibles réels

Pertes de charge dans les conduites

IV-1-Régimes d'écoulement, expérience de Reynolds

En 1883 Osborne Reynolds (1842-1912) professeur de l'ingénierie à l'université de Manchester a réalisé des expériences lors de l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique rectiligne. En injectant sur l'axe de la conduite un colorant (figure IV-1-a) il a remarqué qu'à faible vitesse, le colorant reste concentré très près de l'axe, caractéristique d'un écoulement stable laminaire (figure IV-1-b), puis à vitesse/débit plus important, des structures tourbillonnaires se forment, de plus en plus énergétiques, provoquant une diffusion rapide due à la turbulence (figure IV-1-c et d) qui prend largement le dessus sur la diffusion moléculaire à peine observable à faible vitesse.

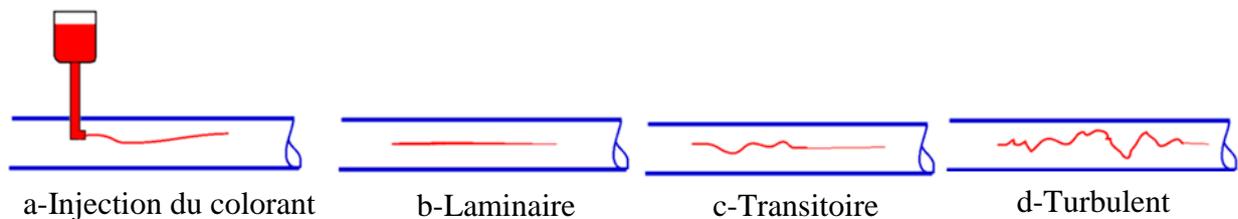


Fig. VI-1 Expérience de Reynolds

En utilisant des fluides divers (viscosité différente), en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds Re . Il exprime le rapport entre la force d'inertie et la force visqueuse. Il est donné par

$$\text{la relation suivante : } Re = \frac{\text{Force d'inertie}}{\text{Force visqueuse}} = \frac{\rho U D_H}{\mu} = \frac{UD}{\nu}$$

U : vitesse moyenne d'écoulement en m/s

D : diamètre de la conduite en m

μ : viscosité dynamique du fluide en Nm^{-2}s

ν : viscosité cinématique du fluide en m^2/s .

- ◆ Si $Re < 2000$: l'écoulement est laminaire.
- ◆ Si $2000 < Re < 3000$: l'écoulement est transitoire.
- ◆ Si $Re > 3000$: l'écoulement est turbulent.

Chapitre IV - Dynamiques des fluides incompressibles réels

Ces valeurs peuvent varier légèrement d'un ouvrage à un autre, mais en pratique, les valeurs ne laissent pas d'ambiguïté. Elles seront franchement supérieures ou inférieures à ces limites. Dans les écoulements turbulents, la valeur de Re est très importante et peut atteindre 10^5 jusqu'à 10^8 .

Exemple IV-1

Un fluide s'écoule dans une conduite de 5 cm de diamètre. Quelle est sa vitesse de transition du régime laminaire au régime turbulent si le fluide est (a) l'air et (b) l'eau.

Solution

La transition du régime laminaire au régime turbulent est déterminée par le nombre de Reynolds $Re = 2300$.

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} \text{ donc } U = \frac{Re \mu}{\rho D}$$

$$\text{a) L'air: } U = \frac{2300 \times 1.80 \times 10^{-5} \left(\frac{kg}{ms}\right)}{1.225 \left(\frac{kg}{m^3}\right) 0.05 (m)} = 6.76 \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\text{b) L'eau } U = \frac{2300 \times 10^{-3} \left(\frac{kg}{ms}\right)}{1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right) 0.05 (m)} = 0.046 \left(\frac{m}{s}\right)$$

On remarque que ce sont de très faibles vitesses. La plus part des écoulements de fluides dans des conduites sont turbulents et non laminaires.

IV-2 Généralisation de l'équation de Bernoulli aux fluides réels-Pertes de charge

Un fluide visqueux ou réel, à l'opposé de fluide parfait, qui s'écoule dans une conduite ou à travers une singularité (coude, élargissement brusque, robinet,...) subit des pertes d'énergie dues au frottement entre le fluide et la paroi de la conduite, ou entre les particules de fluide elles même. L'énergie utile se dégrade. L'énergie perdue est transformée ou dissipée sous forme de chaleur lors de la déformation continue des particules fluides.

Le principe de conservation de l'énergie entre deux points 1 et 2 appartenant à la même ligne de courant est exprimé par l'équation (IV-1).

$$e_1 + \frac{U_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + q = e_2 + \frac{U_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + w' \quad (\text{IV-1})$$

Où e : L'énergie interne par unité de masse

q : La chaleur transférée vers le système fluide par unité de masse.

w' : Le travail fourni par le système fluide par unité de masse.

Chapitre IV - Dynamiques des fluides incompressibles réels

Si on suppose qu'il n'y a pas de transfert de chaleur $q=0$ et s'il n'y a pas de travail fourni par le fluide $w'=0$, l'équation (IV-1) devient:

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{(e_2 - e_1)}{g} \quad (\text{IV-2})$$

$(e_2 - e_1)$ représente l'augmentation en énergie interne par kg de fluide équivalente à l'énergie utile perdue entre les deux positions 1 et 2 sur une ligne de courant. On appelle le rapport $\frac{(e_2 - e_1)}{g}$ perte de charge. Il est exprimé par

$$\Delta H_{1-2} = \frac{(e_2 - e_1)}{g}. \text{ Son unité est le mètre.}$$

L'équation de Bernoulli pour un fluide réel (IV-2) s'écrit alors:

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta H_{1-2} \quad (\text{IV-3})$$

Il y a deux types de pertes de charges, des pertes de charge linéaires ou dites régulières et des pertes de charge singulières.

La perte de charge totale dans une conduite est la somme des pertes de charge linéaires et singulières

$$\Delta H = \sum_i \Delta H_{\text{linéaire}_i} + \sum_j \Delta H_{\text{singulière}_j} \quad (\text{IV-4})$$

IV-3-Pertes de charge linéaires dans une conduite:

Considérons l'écoulement d'un fluide **réel** de volume \mathcal{V} et de masse volumique ρ en **régime stationnaire** dans une conduite droite à section A et de longueur L . Elle est inclinée par rapport au plan horizontal par un angle α (voir figure (IV-2)).

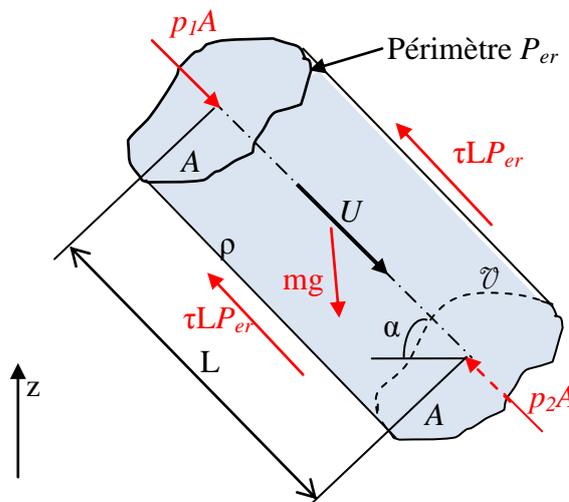


Fig. IV-2 Bilan des forces sur un volume fluide

Chapitre IV - Dynamiques des fluides incompressibles réels

Les forces extérieures appliquées sur ce volume de fluide sont:

- les forces de pression du fluide extérieur à \mathcal{V} : $p_1 A$ et $p_2 A$
- le poids du volume: $p_{ds} = mg$
- la force de frottement de la paroi de la conduite avec le fluide: $F = \tau P_{er} L$

P_{er} est le périmètre de la paroi de la conduite mouillée par le fluide.

Le bilan des forces sur le volume \mathcal{V} suivant la direction de l'écoulement donne:

$$p_1 A + mg \sin \alpha - \tau P_{er} L - p_2 A = 0 \quad (IV-5)$$

Sachant que $m = \rho \mathcal{V} = \rho A L$ et en divisant l'équation (IV-5) par $\rho g A$ on obtient:

$$\left(\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} \right) + L \sin \alpha = \tau \frac{P_{er} L}{\rho g A} \quad (IV-6)$$

Puisque $z_1 - z_2 = L \sin \alpha$, l'équation (IV-6) s'écrit alors

$$\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right) + (z_1 - z_2) = \tau \frac{P_{er} L}{\rho g A} \quad (IV-7)$$

D'autre part en appliquant l'équation de Bernoulli pour un fluide réel (équation IV-3) s'écoulant dans une conduite droite entre 1 et 2 avec une vitesse moyenne U on trouve:

$$\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right) + (z_1 - z_2) = \Delta H_{l(1-2)} \quad (IV-8)$$

Où $\Delta H_{l(1-2)}$ est la perte de charge linéaire causée par le frottement entre les sections 1 et 2.

En comparant les deux équations (IV-7) et (IV-8) on déduit que

$$\Delta H_{l(1-2)} = \tau \frac{P_{er} L}{\rho g A} \quad (IV-9)$$

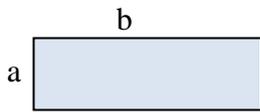
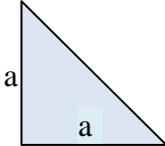
La perte de charge linéaire est exprimée par la relation IV-10

$$\Delta H_{l(1-2)} = 4\tau \frac{L}{\rho g D_H} \quad (IV-10)$$

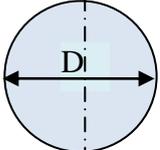
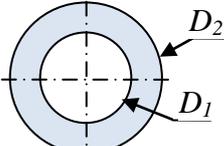
Où D_H est le diamètre hydraulique défini par:

$$D_H = 4 \frac{A}{P_{er}} = 4 \frac{\text{Section de passage du fluide}}{\text{Périmètre mouillé de la conduite}}$$

On présente ci-dessous l'expression du diamètre hydraulique de quelques formes géométriques

- Section rectangulaire : $D_H = \frac{2ab}{a+b}$	
- Section triangulaire : $D_H = \frac{2a}{2+\sqrt{2}}$	

Chapitre IV - Dynamiques des fluides incompressibles réels

- Section circulaire : $D_H = D$	
- Section annulaire: $D_H = D_2 - D_1$	

Un coefficient adimensionnel f représentant le frottement appelé coefficient de frottement ou coefficient de perte de charge linéaire est considéré. Il exprime le rapport entre la contrainte de cisaillement et la pression dynamique, où $f = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U^2}$. U est la vitesse moyenne d'écoulement du fluide dans la conduite. En introduisant ce coefficient dans l'équation (IV-10) on aboutit à **la formule de Darcy** donnée par l'équation (IV-11).

$$\Delta H_{l(1-2)} = 4f \frac{U^2 L}{2g D_H} \quad (IV-11)$$

On définit un autre coefficient de frottement $\lambda = 4f$. L'équation (IV-11) s'écrit alors:

$$\Delta H_{l(1-2)} = \lambda \frac{U^2 L}{2g D_H} \quad (IV-12)$$

C'est la perte d'énergie (en mètre) due au frottement entre le fluide et la paroi d'une conduite droite à section constante.

Ce raisonnement est valable aussi pour le cas d'une conduite partiellement remplie de liquide (figure IV-3). La section est celle du liquide et le périmètre est celui du contact entre liquide et paroi de la conduite, c'est à dire là où il y a frottement entre liquide et conduite. Il est appelé périmètre mouillé.

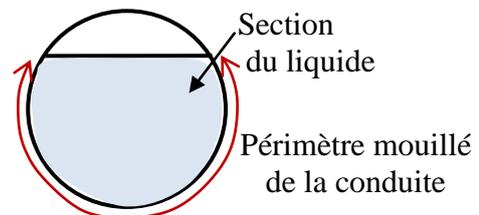


Fig. IV-3 Conduite partiellement remplie

L'équation (IV-12) est applicable aux régimes laminaire ou turbulent.

IV-3-1-Coefficient de frottement, cas d'un régime laminaire

Dans ce cas une expression théorique exacte du coefficient de frottement f est obtenue. Il est donné par l'expression

$$f = \frac{16}{Re} \text{ et } \lambda = \frac{64}{Re} \quad (IV-13)$$

Exemple IV-2

Chapitre IV - Dynamiques des fluides incompressibles réels

De l'eau de viscosité dynamique $\mu=10^{-3}\text{kg/ms}$ s'écoule avec une vitesse de 10 cm/s dans l'espace annulaire de deux tubes circulaires concentriques. Le diamètre intérieur du tube externe est $D=5\text{cm}$ et celui du tube interne est $d=3\text{cm}$. Calculer la perte de charge linéaire pour 1m de longueur de la conduite.

Solution

La perte de charge linéaire est $\Delta H_l = \lambda \frac{U^2 L}{2g D_H}$

λ dépend du régime d'écoulement. On calcule Re .

$$Re = \frac{\rho U D_H}{\mu}$$

$$U = 10\text{cm/s} = 0.1\text{m/s}$$

Le diamètre hydraulique d'un espace annulaire entre deux tubes circulaires concentriques, comme il a été montré précédemment, est $D_H = D - d = 0.05(m) - 0.03(m) = 0.02(m)$

$$Re = \frac{1000 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) 0.1 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) 0.02(m)}{10^{-3} \left(\frac{\text{kg}}{\text{ms}}\right)} = 2000 < 2300 \text{ donc l'écoulement est laminaire.}$$

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{2000} = 0.032$$

$$\Delta H_l = 0.032 \frac{(0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \times 9.81 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} \frac{1(m)}{0.02(m)} = 0.815(\text{mm})$$

IV-3-2-Coefficient de frottement, cas d'un régime turbulent : Dans ce cas il n'y a pas de relation théorique exacte donnant le coefficient de perte de charge linéaire. Il est donné par des relations empiriques, qui mettent en évidence l'effet du nombre de Reynolds, le diamètre hydraulique et aussi l'état de surface de la conduite. Celle-ci est exprimée par **la rugosité absolue équivalente** de la paroi de la conduite ε . C'est une épaisseur moyenne caractérisant la hauteur, la forme, le nombre, et la répartition des aspérités. (figure.IV-3).

Le profil des vitesses et la perte de charge dépendent fortement de la rugosité des parois en régime turbulent. Pour une conduite de diamètre « D », on définit **une rugosité relative** par le quotient $\frac{\varepsilon}{D}$.

Chapitre IV - Dynamiques des fluides incompressibles réels

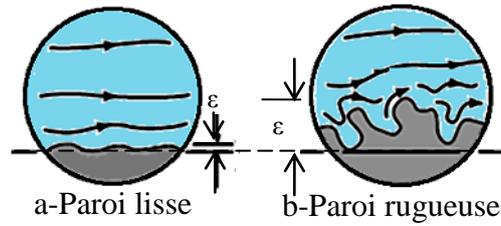


Fig. IV-3 Rugosité des parois [MUNSON]

Quelques valeurs de rugosité absolue sont données dans le tableau [Bigot]

Matière	Etat	Rugosité absolue ε (mm)
Tube étiré (verre, cuivre, laiton)		< 0.001
Tube industriel en laiton		0.025
Tuyau en acier laminé	Neuf	0.05
	Rouillé	$0.15 < \varepsilon < 0.25$
	Bitumé	0.015
Tuyau en acier soudé	Neuf	$0.03 < \varepsilon < 0.1$
	Rouillé	0.4
Tuyau en fonte moulé	Neuf	0.25
	Rouillé	$1 < \varepsilon < 1.5$
	Bitumé	0.1
Tuyau en ciment	Brut	$1 < \varepsilon < 3$
	Lissé	$0.3 < \varepsilon < 0.8$

Les formules empiriques les plus utilisées pour donner la valeur de λ sont :

- ♦ **Formule de Blasius** : elle est utilisée quand $4000 < Re < 10^5$ et le fluide s'écoule dans une conduite de paroi lisse

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} \quad (IV-14)$$

- ♦ **Formule de Von Karman**: elle est utilisée si $Re > 10^5$ et la paroi de la conduite est lisse:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \quad (IV-15)$$

Chapitre IV - Dynamiques des fluides incompressibles réels

- ◆ **Formule de Nikuradse:** elle est appliquée pour des nombres de Reynolds importants et une conduite rugueuse. Dans ce cas le coefficient de frottement ne dépend plus de Re et dépend seulement de la rugosité relative de la conduite

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \frac{\varepsilon}{3.7 D_H} \quad (IV-16)$$

- ◆ **Formule de Colebrook:** En 1939 Colebrook a combiné entre les formules des parois lisses et des parois rugueuses dans une formule astucieuse.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \text{Log}_{10} \left[\frac{\varepsilon}{3.71 D_H} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right] \quad (IV-17)$$

- **Diagramme de Moody**

La formule de Colebrook est représentée par un graphe en 1944 par Moody appelé le diagramme de Moody (figure IV-4). C'est une représentation graphique de λ en fonction de Re paramétrée par les valeurs de la rugosité relative $\frac{\varepsilon}{D_H}$. Ce diagramme est très utilisé dans la mécanique des fluides.

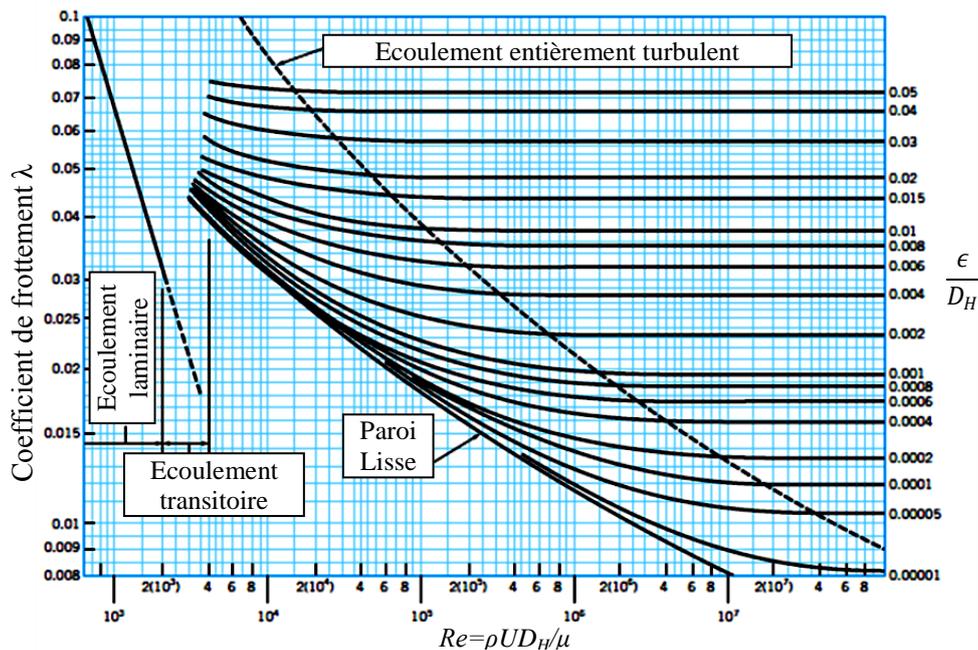


Fig. IV-4 Diagramme de Moody [MUNSON]

Exemple IV-3

On considère une conduite cylindrique de diamètre $D=1\text{m}$ et de rugosité $\varepsilon=3.71\text{mm}$, qui véhicule de l'eau avec une vitesse de 2.51m/s . Calculer la perte de charge par unité de longueur.

Solution

La perte de charge linéaire est $\Delta H_l = \lambda \frac{U^2 L}{2g D_H}$

Chapitre IV - Dynamiques des fluides incompressibles réels

λ dépend du régime d'écoulement. On calcule Re .

$$Re = \frac{\rho U D_H}{\mu}$$

$$U = 2.51 \text{ m/s}$$

$$D_H = D = 1 \text{ (m)}$$

$$Re = \frac{1000 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) 2.51 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) 1 \text{ (m)}}{10^{-3} \left(\frac{\text{kg}}{\text{ms}}\right)} = 2.51 \times 10^6 > 2300 \text{ donc l'écoulement est turbulent.}$$

On calcule λ à partir de la formule de Colebrook (IV-17)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.71 D_H} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

C'est une équation non linéaire. Pour la résoudre on utilise la méthode du point fixe. C'est une méthode numérique itérative.

$$\text{On met } x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \text{ la formule devient } x = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.71 D_H} + \frac{2.51}{Re} x \right)$$

$$x = -2 \log_{10} \left(\frac{(3.71 \times 10^{-3}) \text{ m}}{3.71 \times 1 \text{ (m)}} + \frac{2.51}{2.51 \times 10^6} x \right)$$

$$x = -2 \log_{10} (10^{-3} + 10^{-6} x)$$

$$x = 6 - 2 \log_{10} (1 + 0.001 x)$$

On propose une première valeur $x_0 = 0$ qu'on remplace dans la formule précédente puis on estime une nouvelle valeur x_1 . De même on fait plusieurs itérations jusqu'à ce que les valeurs calculées se rapprochent.

$$x_0 = 0, x_1 = 6, x_2 = 5.9948, x_3 = 5.9948$$

$$\lambda = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{5.9948^2} = 0.0278$$

On peut déduire λ directement du diagramme de Moody.

$$\lambda \left(Re, \frac{\varepsilon}{D_H} \right) = \lambda (2.51 \times 10^6, 0.00371) \approx 0.028$$

$$\text{Ainsi } \Delta H_l = 0.0278 \frac{(2.51 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \times 9.81 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} \frac{1 \text{ (m)}}{1 \text{ (m)}} = 0.0089 \text{ (m)} \approx 9 \text{ (mm)}$$

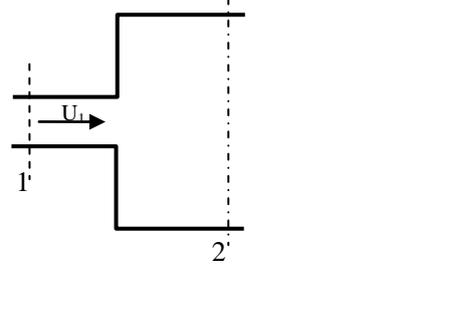
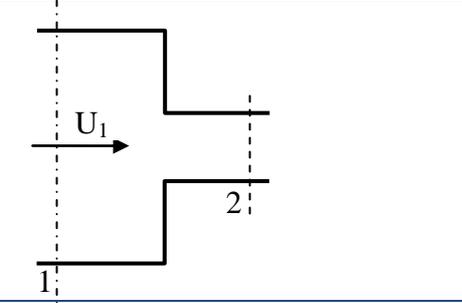
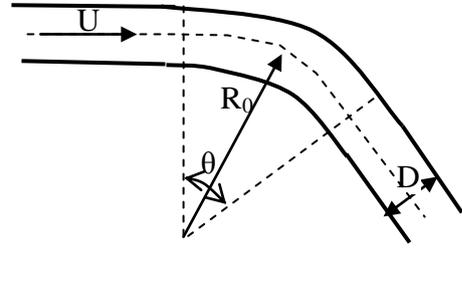
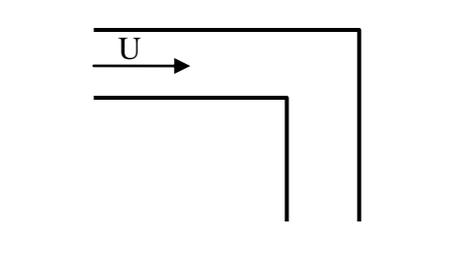
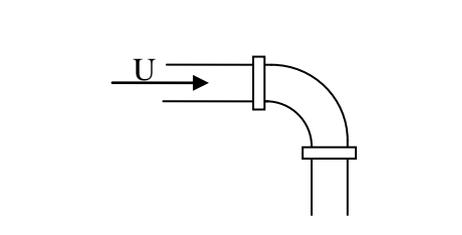
IV-5- Pertes de charge singulières : Ces pertes appelées aussi pertes de charge locales ont pour cause la destruction du profil de vitesse par les singularités placées en travers de l'écoulement (coudes, vannes, changement de section...). Elles sont données par des formules empiriques exprimées sous la forme:-

$$\Delta H_s = k \frac{U^2}{2g} \tag{IV-18}$$

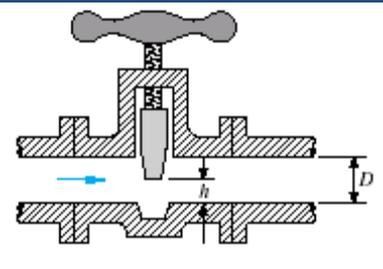
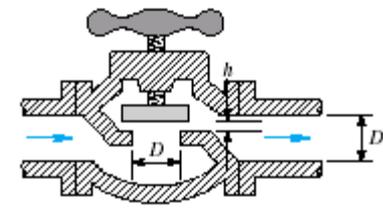
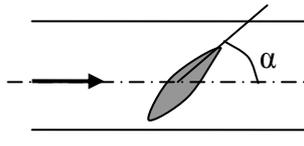
Chapitre IV - Dynamiques des fluides incompressibles réels

k est une constante pour chaque type de singularité. Elle correspond à une vitesse U en amont ou en aval (à spécifier) de la singularité.

IV-5-1 Coefficients de pertes de charge singulières: Voici quelques valeurs du coefficient de singularité k pour différentes configurations de conduites dans lesquelles s'écoule un fluide.

<p>- Elargissement brusque :</p> $\Delta H_s = k \frac{U_1^2}{2g} \text{ avec } k = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$ <p>A_1 et A_2: sections de la conduite aux stations 1 et 2.</p>											
<p>- Rétrécissement brusque :</p> $\Delta H_s = k \frac{U_1^2}{2g}$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <tbody> <tr> <td style="padding: 2px;">A_2/A_1</td> <td style="padding: 2px;">0.1</td> <td style="padding: 2px;">0.4</td> <td style="padding: 2px;">0.7</td> <td style="padding: 2px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">k</td> <td style="padding: 2px;">0.37</td> <td style="padding: 2px;">0.27</td> <td style="padding: 2px;">0.1</td> <td style="padding: 2px;">0</td> </tr> </tbody> </table>	A_2/A_1	0.1	0.4	0.7	1	k	0.37	0.27	0.1	0	
A_2/A_1	0.1	0.4	0.7	1							
k	0.37	0.27	0.1	0							
<p>- Coudes arrondis (Formule de Weisbach)</p> $\Delta H_s = k \frac{U^2}{2g}$ $k = \left[0.131 + 1.847 \left(\frac{D}{2R_0} \right)^{1/2} \right] \frac{\theta(\text{deg ré})}{90}$											
<p>- Coude à 90° à angle vif :</p> $\Delta H_s = k \frac{U^2}{2g}$ <p>$k=1.3$</p>											
<p>- Coude commercial à 90°:</p> $\Delta H_s = k \frac{U^2}{2g}$ <p>$k=0.75$</p>											

Chapitre IV - Dynamiques des fluides incompressibles réels

<p>- Vanne guillotine (porte) $k=0.2$</p>									
<p>Vanne globe $k=2$</p>									
<p>Vanne papillon</p> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">$\alpha(^{\circ})$</td> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;">30</td> <td style="padding: 5px;">60</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">k</td> <td style="padding: 5px;">0.24</td> <td style="padding: 5px;">3.91</td> <td style="padding: 5px;">118</td> </tr> </table>	$\alpha(^{\circ})$	5	30	60	k	0.24	3.91	118	
$\alpha(^{\circ})$	5	30	60						
k	0.24	3.91	118						

Entrée et sortie d'une conduite: L'écoulement d'un fluide d'un réservoir vers une conduite (entrée) (figure IV-5) ou d'une conduite vers un réservoir (sortie) (figure IV-6) cause une perte de charge à cause du changement de section de l'écoulement et la forme de la région d'entrée.

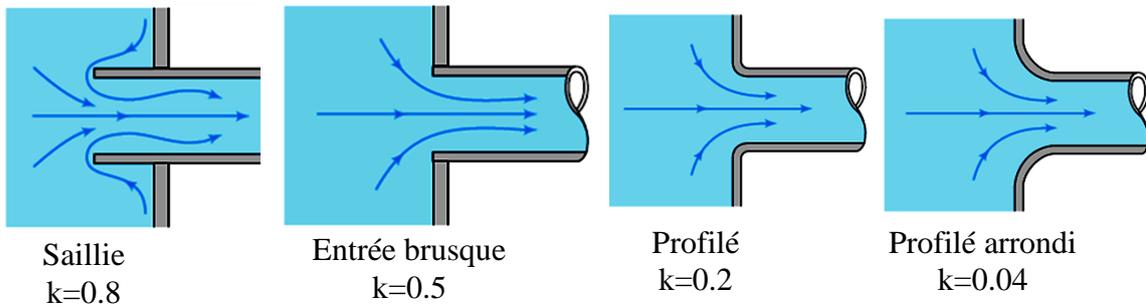


Fig. IV-5 Entrée dans une conduite

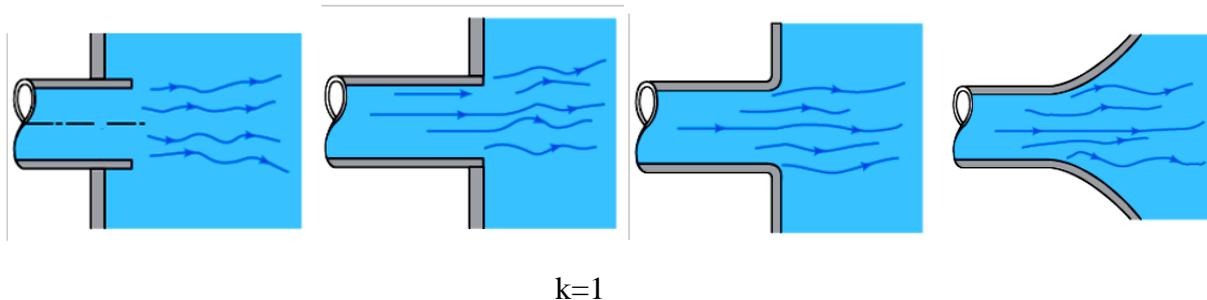


Fig. IV-6 Sortie d'une conduite

IV-6- Méthode générale de calcul d'un réseau

Il existe plusieurs types de réseaux de conduites, éléments en série (Fig. IV-7-(a)) et éléments en parallèles (Fig. IV-7-(b)).

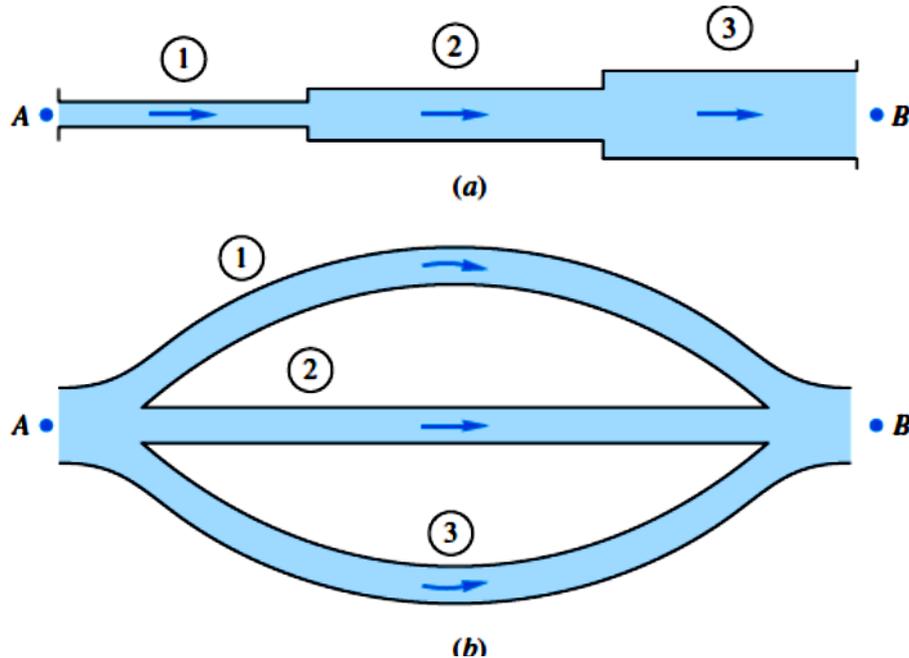


Fig. IV-7 Exemples de systèmes de conduites [WHITE]
(a) système en série, (b) système en parallèle

a-Eléments en série

Lorsque des éléments de conduites (tronçons droits et singularités) sont placés en série (Fig. VI-7-a), ils sont tous traversés par le même débit et la perte de charge totale apparaît comme la somme de toutes les pertes de charge (linéaires et singulières).

$$Q_1 = Q_2 = Q_3$$

Pour des conduites cylindriques $V_1 d_1^2 = V_2 d_2^2$

$$\Delta H_{A-B} = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3$$

b-Eléments en parallèle

Lorsque les conduites sont liées en parallèle, le débit total est la somme des débits des différentes branches (1), (2), et (3) et la perte de charge est commune à tous les éléments en parallèle

$$Q_A = Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_B$$

$$\Delta H_{A-B} = \Delta H_1 = \Delta H_2 = \Delta H_3$$

Exemple IV-4

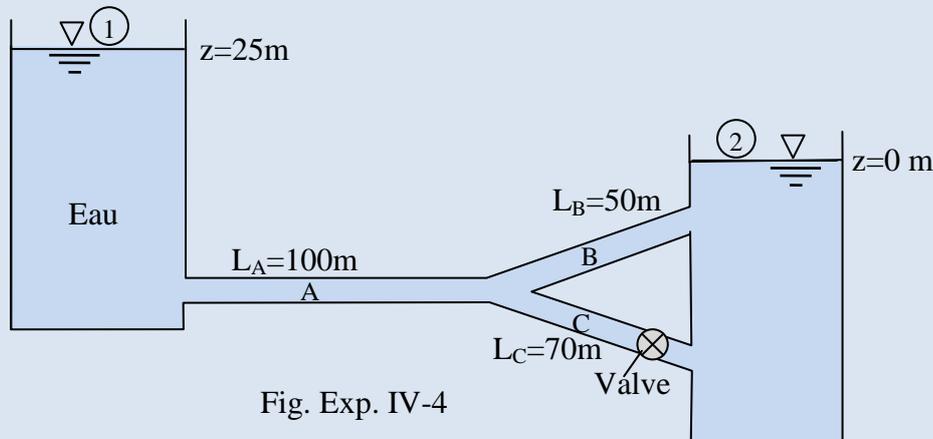
Deux grands réservoirs remplis d'eau sont reliés par un système de trois conduites A, B et C de même diamètre $d=8\text{cm}$, voir figure Exp. IV-4.

Chapitre IV - Dynamiques des fluides incompressibles réels

Les coefficients de perte de charge linéaire des conduites sont $\lambda_A=0.027$, $\lambda_B=0.03$ et $\lambda_C=0.035$.

Le coefficient de perte de charge singulière de la vanne est $k=0.5$.

Calculer les débits volumiques dans les trois conduites.



Solution

Pour déterminer les débits d'eau à travers les trois conduites on a besoin de trois équations.

Ces équations sont:

1- L'équation de Bernoulli entre 1 et 2 à travers les conduites A et B.

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta H_{l(1-2)A-B}$$

$$V_1 = V_2 = 0 \text{ (Surface d'un réservoir)}$$

$$p_1 = p_2 = p_{atm}$$

$$z_1 = 25m, z_2 = 0$$

La perte de charge linéaire entre 1 et 2 à travers les conduites A et B est

$$\Delta H_{l(1-2)A-B} = z_1 - z_2 = 25(m)$$

2- L'équation de Bernoulli entre 1 et 2 à travers les conduites A et C.

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta H_{l(1-2)AC}$$

On a les mêmes conditions donc on trouve

$$\Delta H_{l(1-2)A-C} = z_1 - z_2 = 25(m)$$

3- L'équation de continuité.

$$Q_A = Q_B + Q_C$$

On remarque que les conduites sont en parallèles, donc les pertes de charges sont égales et le débit est la somme des débits à travers les autres conduites.

$$\diamond \quad \Delta H_{l(1-2)A-B} = \Delta H_{l(1-2)A} + \Delta H_{l(1-2)B} = \lambda_A \frac{V_A^2 L_A}{2g d} + \lambda_B \frac{V_B^2 L_B}{2g d}$$

Chapitre IV - Dynamiques des fluides incompressibles réels

$$V_A = \frac{4Q_A}{\pi d^2} \text{ et } V_B = \frac{4Q_B}{\pi d^2}$$

$$\Delta H_{l(1-2)A-B} = \lambda_A \frac{8Q_A^2 L_A}{\pi^2 g d^5} + \lambda_B \frac{8Q_B^2 L_B}{\pi^2 g d^5}$$

$$\Delta H_{l(1-2)A-B} = 0.027 \frac{8 \times 100(m)}{\pi^2 \times 9.81 \left(\frac{N}{kg}\right) \times (0.08 m)^5} Q_A^2 + 0.03 \frac{8 \times 50(m)}{\pi^2 \times 9.81 \left(\frac{N}{kg}\right) \times (0.08 m)^5} Q_B^2$$

$$\Delta H_{l(1-2)A-B} = 68082.43 Q_A^2 + 37823.57 Q_B^2 = 25(m)$$

$$\blacklozenge \Delta H_{l(1-2)A-C} = \Delta H_{l(1-2)A} + \Delta H_{l(1-2)C} = \lambda_A \frac{V_A^2 L_A}{2g d} + \lambda_C \frac{V_C^2 L_C}{2g d} + k_v \frac{V_C^2}{2g}$$

$$V_C = \frac{4Q_C}{\pi d^2}$$

$$\Delta H_{l(1-2)A-C} = \lambda_A \frac{8Q_A^2 L_A}{\pi^2 g d^5} + \frac{8Q_C^2}{\pi^2 g d^4} \left(\lambda_C \frac{L_C}{d} + k_v \right) = 25(m)$$

$$\Delta H_{l(1-2)A-C} = 68082.43 Q_A^2 + \frac{8Q_C^2}{\pi^2 \times 9.81 \left(\frac{N}{kg}\right) \times (0.08 m)^4} \left(0.035 \frac{70}{0.08} + 0.5 \right) = 25(m)$$

$$\Delta H_{l(1-2)A-C} = 68082.43 Q_A^2 + 62787.13 Q_C^2 = 25(m)$$

Les trois équations obtenues sont:

$$68082.43 Q_A^2 + 37823.57 Q_B^2 = 25 \quad (\text{éq.1})$$

$$68082.43 Q_A^2 + 62787.13 Q_C^2 = 25 \quad (\text{éq.2})$$

$$Q_A = Q_B + Q_C \quad (\text{éq.3})$$

$$(\text{éq.2}) - (\text{éq.1}) \text{ donne: } Q_C = \sqrt{\frac{37823.57}{62787.13}} Q_B = 0.776 Q_B$$

On remplace la valeur de Q_C dans (éq.3) on trouve

$Q_A = 1.776 Q_B$, on remplace ce résultat dans (éq. 1) on trouve

$Q_B = 0.0099 \left(\frac{m^3}{s}\right)$, et donc $Q_A = 0.01758 \left(\frac{m^3}{s}\right)$, et $Q_C = 0.00768 \left(\frac{m^3}{s}\right)$