

Table des matières

1	L'ensemble des nombres réels	4
1.1	Les bornes dans un ensemble ordonné	5
1.1.1	Relation d'ordre	5
1.1.2	Les majorants et les minorants d'un ensemble.	7
1.1.3	Le minimum et le maximum d'un ensemble	10
1.1.4	Les bornes supérieure et inférieure	11
1.1.5	Propriété de la borne supérieure et inférieure.	15
1.2	Construction axiomatique de l'ensemble des nombres réels	17
1.3	Les propriétés de l'ensemble \mathbb{R}	18
1.3.1	Propriétés de calcul	18
1.3.2	Valeur absolue d'un réel	19
1.3.3	Partie entière d'un réel	22
1.3.4	La n ^{ème} racine	23
1.3.5	Caractérisation de la borne supérieure et inférieure.	23
1.3.6	Intervalles de \mathbb{R}	24
1.3.7	Propriété d'Archimède	27
1.3.8	Densité des nombres rationnels et irrationnels dans \mathbb{R}	28
1.4	Exercices	30
2	Les suites numériques	47
2.1	Préliminaires	48

2.1.1	Opérations algébriques sur les suites	49
2.1.2	Suites numériques de signe constant	50
2.1.3	Suites numériques bornées	50
2.2	Suites numériques convergentes	52
2.2.1	Propriétés des suites convergentes	55
2.2.2	Opérations algébriques sur les limites des suites	56
2.2.3	Critères de convergence et de divergence	59
2.2.4	Les suites récurrentes	66
2.3	Exercices	68

3 Fonctions numériques d'une variable réelle 84

3.1	Limite de fonctions	85
3.1.1	Limite finie d'une fonction en un point	85
3.1.2	Limite à gauche et à droite	88
3.1.3	Limite infinie d'une fonction en un point	90
3.1.4	Limite finie d'une fonction à l'infinie	90
3.1.5	Limite infinie à l'infinie	91
3.2	Fonctions continues	92
3.2.1	Préliminaires	92
3.2.2	Continuité à gauche et à droite	94
3.2.3	Continuité sur un ensemble	94
3.2.4	Prolongement par continuité	96
3.2.5	Extrémums et extrémants	97
3.2.6	Continuité uniforme	100
3.2.7	Théorème des valeurs intermédiaires	102
3.3	Fonctions dérivables	103
3.3.1	Préliminaires	103
3.3.2	Fonctions dérivables sur un intervalle	104
3.4	Exercices	108

Chapitre 1

L'ensemble des nombres réels

1.1 Les bornes dans un ensemble ordonné

1.1.1 Relation d'ordre

Soient $E \neq \emptyset$ et R une relation définie sur E .

Définition 1.1.1 On dit que R est une relation d'ordre sur E si

1. R est réflexive :

$$\forall x \in E, xRx.$$

2. R est antisymétrique :

$$\forall x, y \in E, (xRy \wedge yRx) \implies (x = y).$$

3. R est transitive :

$$\forall x, y, z \in E, (xRy \wedge yRz) \implies (xRz).$$

Exemple 1 Considérons l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}$. Ici \mathbb{Z} représente l'ensemble des nombres entiers relatifs. On définit sur \mathbb{Q} la relation suivante

$$\forall r, r' \in \mathbb{Q} : rRr' \iff r \leq r'.$$

R est une relation d'ordre sur \mathbb{Q} . En effet,

1. On a, pour tout $r \in \mathbb{Q} : r \leq r$, alors rRr . Ce qui implique que R est réflexive.
2. Soient $r, r' \in \mathbb{Q}$ telles que rRr' et $r'Rr$, d'où $r \leq r'$ et $r' \leq r$ alors $r = r'$. Ce qui implique que R est antisymétrique
3. Soient $r, r', r'' \in \mathbb{Q}$ telles que rRr' et $r'Rr''$, d'où $r \leq r'$ et $r' \leq r''$ alors $r \leq r''$, donc rRr'' . Ce qui implique que R est transitive.

Exemple 2 On définit sur $P(E)$ (l'ensemble de toutes les parties de E) la relation suivante

$$\forall A, B \in P(E) : ARB \iff A \subseteq B.$$

R est une relation d'ordre. En effet,

1. On a, pour tout $A \in P(E) : A \subseteq A$, alors ARA . Ce qui implique que R est réflexive.
2. Soient $A, B \in P(E)$ telles que ARB et BRA , donc $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ alors $A = B$.
Ce qui implique que R est antisymétrique.
3. Soient $A, B, C \in P(E)$ telles que ARB et BRC , donc $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$ alors $A \subseteq C$, donc ARC . Ce qui implique que R est transitive.

Définition 1.1.2 Si l'ensemble E est muni d'une relation d'ordre R on dit que (E, R) est un ensemble ordonné.

Notation 1 Une relation d'ordre R est notée, parfois, par le signe \leq .

Dans tout ce qui suit, (E, \leq) est un ensemble ordonné.

Définition 1.1.3 Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont comparables si $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Exemple 3 Dans (\mathbb{Q}, \leq) , $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{3}$ sont comparables car $\frac{2}{3} \leq \frac{4}{3}$.

Exemple 4 Si $E = \{0, 3, \square\}$ alors $P(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{\square\}, \{0, 3\}, \{0, \square\}, \{3, \square\}, E\}$.
On munit $P(E)$ de la relation d'ordre $\leq := \subseteq$. Les éléments $\{0\}$ et $\{\square\}$ ne sont pas comparables car $\{0\} \not\subseteq \{\square\}$ et $\{\square\} \not\subseteq \{0\}$.

Définition 1.1.4 On dit que \leq est une relation d'ordre total sur E si deux éléments sont toujours comparables :

$$\forall x, y \in E, (x \leq y \vee y \leq x).$$

Définition 1.1.5 On dit que \leq est une relation d'ordre partiel sur E s'ils existent deux éléments de E noncomparables :

$$\exists x, y \in E, (x \not\leq y \wedge y \not\leq x).$$

Exemple 5 \leq est une relation d'ordre total sur \mathbb{Q} . (Pourquoi)

Exemple 6 Si E contient au moins deux éléments différents x et y alors \subseteq est une relation d'ordre partiel sur $P(E)$. En effet, on a $\{x\} \not\subseteq \{y\}$ et $\{y\} \not\subseteq \{x\}$.

1.1.2 Les majorants et les minorants d'un ensemble.

Soient $\emptyset \neq A \subseteq E$ et $m, M \in E$.

Définition 1.1.6 On dit que m est un minorant de A si

$$\forall x \in A : m \leq x.$$

Définition 1.1.7 On dit que M est un majorant de A si

$$\forall x \in A : x \leq M.$$

Exemple 7 Dans (\mathbb{Q}, \leq) , on considère $A = \{2, \frac{5}{2}, 7\}$.

1. On a $0 \leq 2, 0 \leq \frac{5}{2}$ et $0 \leq 7$. C. à d.

$$\forall x \in A : 0 \leq x.$$

Alors 0 est un minorant de A .

2. On a $1 \leq 2, 1 \leq \frac{5}{2}$ et $1 \leq 7$. Alors

$$\forall x \in A : 1 \leq x.$$

Donc 1 est un minorant de A .

3. On a $2 \leq 8, \frac{5}{2} \leq 8$ et $7 \leq 8$. Alors

$$\forall x \in A : x \leq 8.$$

Donc 8 est un majorant de A .

4. On a $2 \leq 9, \frac{5}{2} \leq 9$ et $7 \leq 9$. Alors

$$\forall x \in A : x \leq 9.$$

Alors 9 est un majorant de A .

Exemple 8 Soient $E = \{0, 3, \square\}$ et $\mathbb{A} = \{\{0\}, \{\square\}\} \subseteq P(E)$.

1. On a $\emptyset \subseteq \{0\}$ et $\emptyset \subseteq \{\square\}$. Alors

$$\forall X \in \mathbb{A} : \emptyset \subseteq X.$$

C. à d.

$$\forall X \in \mathbb{A} : \emptyset \leq X.$$

Alors \emptyset est un minorant de \mathbb{A} .

2. On a $\{0\} \subseteq \{0, \square\}$ et $\{\square\} \subseteq \{0, \square\}$. Alors

$$\forall X \in \mathbb{A} : X \subseteq \{0, \square\}.$$

C. à d.

$$\forall X \in \mathbb{A} : X \leq \{0, \square\}.$$

Alors $\{0, \square\}$ est un majorant de \mathbb{A} .

Remarque 1.1.1 Le majorant et le minorant d'un ensemble A peuvent appartenir ou

non à A . En effet, dans \mathbb{Q} , si $A = \{2, \frac{5}{2}, 7\}$ alors 0 est un minorant de A et il n'appartient pas à A . 8 est un majorant de A et il n'appartient pas à A .

Preuve 1 En général, le majorant et le minorant d'un ensemble A ne sont pas uniques (Voir les exemples précédents).

Définition 1.1.8 On dit que l'ensemble A est minoré (ou borné inférieurement) dans E s'il admet un minorant dans E c. à dire

$$\exists m \in E, \forall x \in A : m \leq x.$$

Définition 1.1.9 On dit que l'ensemble A est majoré (ou borné supérieurement) dans E s'il admet un majorant dans E c. à dire

$$\exists M \in E, \forall x \in A : x \leq M.$$

Définition 1.1.10 On dit que l'ensemble A est borné dans E s'il est majoré et minoré dans E c. à dire

$$\exists m, M \in E, \forall x \in A : m \leq x \leq M.$$

Exemple 9 L'ensemble $A = \{2, \frac{5}{2}, 7\}$ est borné dans \mathbb{Q} car

$$\forall x \in A : 1 \leq x \leq 8.$$

Exemple 10 Soit $E = \{0, 1, \square\}$. L'ensemble $\mathbb{A} = \{\{0\}, \{\square\}\}$ est borné dans $P(E)$ car

$$\forall X \in \mathbb{A} : \emptyset \leq X \leq E.$$

Remarque 1.1.2 On considère l'ordre strict correspondant à \leq défini comme suit : Pour tout $x, y \in E$ on a $(x < y) \equiv (x \leq y \text{ et } x \neq y)$.

On suppose que \leq est total.

1. L'ensemble A n'est pas minoré (ou n'est pas borné inférieurement) dans E s'il n'admet pas un minorant dans E :

$$\forall m \in E, \exists x \in A : x < m.$$

2. L'ensemble A n'est pas majoré (ou n'est pas borné supérieurement) dans E s'il n'admet pas un majorant dans E :

$$\forall M \in E, \exists x \in A : M < x.$$

1.1.3 Le minimum et le maximum d'un ensemble

Soit $\emptyset \neq A \subseteq E$.

Définition 1.1.11 Le minorant de A qui appartient à A est appelé le plus petit élément (minimum) de A . On le note par $\min A$. C. à d.

$$a = \min A \stackrel{\text{déf}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A : a \leq x \text{ (} a \text{ est un minorant de } A\text{)} \\ \text{et} \\ a \in A. \end{array} \right.$$

Définition 1.1.12 Le majorant de A qui appartient à A est appelé le plus grand élément (maximum) de A . On le note par $\max A$. C. à d.

$$b = \max A \stackrel{\text{déf}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A : x \leq b \text{ (} b \text{ est un majorant de } A\text{)} \\ \text{et} \\ b \in A. \end{array} \right.$$

Exemple 11 Dans (\mathbb{Q}, \leq) , on considère $A = \{2, \frac{5}{2}, 7\}$. On a

1. $\min A = 2$ car 2 est un minorant de A et $2 \in A$.
2. $\max A = 7$ car 7 est un majorant de A et $7 \in A$.

Exemple 12 Soient $E = \{0, 3, \square\}$ et $\mathbb{A} = \{\{0\}, \{\square\}\} \subseteq P(E)$. On a

1. $\min \mathbb{A}$ n'existe pas car il n'existe pas un minorant de \mathbb{A} qui appartient à \mathbb{A} .
2. $\max \mathbb{A}$ n'existe pas car il n'existe pas un majorant de \mathbb{A} qui appartient à \mathbb{A} .

Lemme 1.1.1 1. Si $\min A$ existe il est unique.

2. Si $\max A$ existe il est unique.

Preuve 2 1. Par l'absurde. Supposons que A admet deux minimums différents m_1 et m_2 ($m_2 \neq m_1$).

On a m_1 est un minorant de A (car m_1 est un minimum de A) et $m_2 \in A$ (car m_2 est un minimum de A) alors

$$m_1 \leq m_2. \quad (1.1)$$

De même, m_2 est un minorant de A et $m_1 \in A$ alors

$$m_2 \leq m_1. \quad (1.2)$$

(1.1) et (1.2) implique que $m_2 = m_1$, c'est une contradiction avec $m_2 \neq m_1$.

2. De même, on montre que $\max A$ est unique (A faire).

1.1.4 Les bornes supérieure et inférieure

Soit $\emptyset \neq A \subseteq E$.

Définition 1.1.13 Le plus grand minorant de A est appelé la borne inférieure de A . On la note par $\inf A$. C. à d. $\inf A := \max \{m : m \text{ est minorant de } A\}$.

Définition 1.1.14 Le plus petit majorant de A est appelé la borne supérieure de A . On la note par $\sup A$. C. à d. $\sup A := \min \{M : M \text{ est majorant de } A\}$.

Exemple 13 Dans (\mathbb{Q}, \leq) , on considère $A = \{2, \frac{5}{2}, 7\}$. On a

1. L'ensemble des minorants de A est $m(A) = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 2\}$, alors $\inf A = \max m(A) = 2$ car 2 est un majorant de $m(A)$ qui appartient à $m(A)$.
2. L'ensemble des majorants de A est $M(A) = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 7\}$, alors $\sup A = \min M(A) = 7$ car 7 est un minorant de $M(A)$ qui appartient à $M(A)$.

Exemple 14 Soient $E = \{0, 3, \square\}$ et $\mathbb{A} = \{\{0\}, \{\square\}\} \subseteq P(E)$. On a

1. L'ensemble des minorants de \mathbb{A} est $m(\mathbb{A}) = \{\emptyset\}$, alors $\inf \mathbb{A} = \max m(\mathbb{A}) = \emptyset$ car \emptyset est un majorant de $m(\mathbb{A})$ qui appartient à $m(\mathbb{A})$.
2. L'ensemble des majorants de \mathbb{A} est $M(\mathbb{A}) = \{\{0, \square\}, E\}$, alors $\sup \mathbb{A} = \min M(\mathbb{A}) = \{0, \square\}$ car $\{0, \square\}$ est un minorant de $M(\mathbb{A})$ qui appartient à $M(\mathbb{A})$.

Remarque 1.1.3 $\inf A$ et $\sup A$ peuvent appartenir ou non à A . (Voir les exemples précédents)

Lemme 1.1.2 1. $\inf A$ est un minorant de A .

2. $(\inf A \in A) \Rightarrow (\min A \text{ existe et } \min A = \inf A)$.
3. $(\min A \text{ existe}) \Rightarrow (\inf A \text{ existe et } \min A = \inf A)$.
4. $(\inf A \notin A) \Rightarrow (\min A \text{ n'existe pas})$.

Preuve 3 1. Montrons directement que $\inf A$ est un minorant de A .

Puisque $\inf A := \max \{m : m \text{ est minorant de } A\}$ alors, d'après la définition du maximum, $\inf A \in \{m : m \text{ est minorant de } A\}$. Ce qui implique que $\inf A$ est un minorant de A .

2. Montrons directement que $(\inf A \in A) \Rightarrow (\min A \text{ existe et } \min A = \inf A)$

On a $\inf A \in A$ (hypothèse) et $\inf A$ est un minorant de A (La propriété (1)). Donc $\min A$ existe et $\min A = \inf A$.

3. Montrons directement $(\min A \text{ existe}) \Rightarrow (\inf A \text{ existe et } \min A = \inf A)$: On suppose que $\min A$ existe. Soit m un minorant quelconque de A , puisque $\min A \in A$ alors $m \leq \min A$. Ceci implique que

$$\forall m \text{ minorant de } A : m \leq \min A.$$

Alors $\min A$ est un majorant de $\{m : m \text{ minorant de } A\}$, alors

$$\min A := \max \{m : m \text{ est minorant de } A\} = \inf A.$$

4. **Méthode 1** : Montrons que $(\inf A \notin A) \Rightarrow (\min A \text{ n'existe pas})$.

On suppose que $\inf A \notin A$ et on montre par l'absurde que $\min A$ n'existe pas. On suppose que $\min A$ existe alors $\inf A$ existe et $\inf A = \min A$ mais par définition $\min A \in A$ donc $\inf A \in A$ ce qui représente une contradiction avec $\inf A \notin A$.

Méthode 2 : Montrons par contraposition que $(\inf A \notin A) \Rightarrow (\min A \text{ n'existe pas})$.

Supposons que $\min A$ existe alors, d'après (3), $\inf A = \min A$ mais (par définition) $\min A \in A$ alors $\inf A \in A$.

De même, on montre le lemme suivant :

Lemme 1.1.3 1. $\sup A$ est un majorant de A .

2. $(\sup A \in A) \Rightarrow (\max A \text{ existe et } \max A = \sup A)$.

3. $(\max A \text{ existe}) \Rightarrow (\sup A \text{ existe et } \max A = \sup A)$.

4. $(\sup A \notin A) \Rightarrow (\max A \text{ n'existe pas})$.

Remarque 1.1.4 Soient $a, b \in E$.

1. Si on veut montrer que $a = \sup A$, il suffit de montrer que

$$\left\{ \begin{array}{l} a \text{ est un majorant de } A \\ \text{et} \\ \forall M \text{ majorant de } A : a \leq M \text{ (} a \leq \text{tous les majorants de } A \text{)}. \end{array} \right.$$

Ici on a utilisé la définition du minimum et le faite que $a = \min \{M : M \text{ est majorant de } A\}$.

2. De même, si on veut montrer que $b = \inf A$, il suffit de montrer que

$$\left\{ \begin{array}{l} b \text{ est un minorant de } A \\ \text{et} \\ \forall m \text{ minorant de } A : m \leq b \text{ (Tous les minorants de } A \leq b). \end{array} \right.$$

Définition 1.1.15 Soient $x, y \in E$.

1. Le maximum de x et y est le maximum de $\{x, y\}$. On le note par $\max(x, y)$.
2. Le minimum de x et y est le minimum de $\{x, y\}$. On le note par $\min(x, y)$.
3. La borne supérieure de x et y est la borne supérieure de $\{x, y\}$. On la note par $\sup(x, y)$.
4. La borne inférieure de x et y est la borne inférieure de $\{x, y\}$. On la note par $\inf(x, y)$.

Lemme 1.1.4 Si E est un ensemble totalement ordonné (C. à dire \leq est une relation d'ordre total) alors pour tout $x, y \in E$ on a

1. $\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } y \leq x. \\ y & \text{si } x \leq y. \end{cases}$
2. $\max(x, y) = \sup(x, y)$.
3. $\min(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y. \\ y & \text{si } y \leq x. \end{cases}$
4. $\min(x, y) = \inf(x, y)$.

Preuve 4 1. On a

(a) Si $x \leq y$ alors y est un majorant de $\{x, y\}$ et il appartient à $\{x, y\}$, alors $y = \max \{x, y\} = \max(x, y)$.

(b) Si $y \leq x$ alors x est un majorant de $\{x, y\}$ et il appartient à $\{x, y\}$, alors $x = \max \{x, y\} = \max(x, y)$. Alors $\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } y \leq x. \\ y & \text{si } x \leq y. \end{cases}$

2. Puisque $\max\{x, y\}$ existe alors $\sup\{x, y\}$ existe et $\max\{x, y\} = \sup\{x, y\}$, alors $\max(x, y) = \sup(x, y)$.

3 et 4 De même (A faire)

Remarque 1.1.5 D'après le lemme précédent on trouve que si E est un ensemble totalement ordonné alors $\max(x, y)$, $\sup(x, y)$, $\min(x, y)$ et $\inf(x, y)$ existent toujours.

1.1.5 Propriété de la borne supérieure et inférieure.

Définition 1.1.16 On dit que E vérifie la propriété de la borne supérieure si toute partie non vide de E qui est majorée admet une borne supérieure. C. à d.

$$\forall A \subseteq E (A \neq \emptyset) : A \text{ majorée} \Rightarrow \sup A \text{ existe.}$$

Définition 1.1.17 On dit que E vérifie la propriété de la borne inférieure si toute partie non vide de E qui est minorée admet une borne inférieure. C. à d.

$$\forall A \subseteq E (A \neq \emptyset) : A \text{ minorée} \Rightarrow \inf A \text{ existe.}$$

Théorème 1.1.1 Si E vérifie la propriété de la borne supérieure alors il vérifie la propriété de la borne inférieure.

Preuve 5 Voir exercice 4.

Remarque 1.1.6 On peut montrer aussi que si E vérifie la propriété de la borne inférieure alors il vérifie la propriété de la borne supérieure. (Voir exercice 4)

Exemple 15 $(P(E), \subseteq)$ vérifie la propriété de la borne supérieure. En effet, pour tout $\mathbb{A} \in P(E)$ on a (voir exercice 3) \mathbb{A} est borné par E et $\sup \mathbb{A} = \bigcup_{Y \in \mathbb{A}} Y$. Si on utilise le théorème précédent, on déduit que $(P(E), \subseteq)$ vérifie aussi la propriété de la borne inférieure.

Lemme 1.1.5 \mathbb{Q} ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure.

Preuve 6 Considérons l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 3\}$.

1. A est un ensemble majoré dans \mathbb{Q} car il admet un majorant M dans \mathbb{Q} . En effet, si $x \in A$ alors $x^2 \leq 3 \leq 4$, ceci implique que $-2 \leq x \leq 2$, alors $M = 2 = \frac{2}{1} \in \mathbb{Q}$.
2. Montrons que A n'admet pas une borne supérieure dans \mathbb{Q} . Par l'absurde. Supposons que $\sup A$ existe dans \mathbb{Q} , c'est à dire, $\sup A = \frac{p}{q}$ tel que $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$. On sait que l'équation $x^2 = 3$ n'admet pas une solution dans \mathbb{Q} (Voir exercice 8). Alors, $\frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \neq 3$, d'où $\frac{p^2}{q^2} < 3$ ou $\frac{p^2}{q^2} > 3$.

Cas $\frac{p^2}{q^2} < 3$. Soit $n \geq 1$. Puisque $n^2 \geq n$ alors $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, donc $\left(\frac{p}{q} + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} + \frac{2p}{qn} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{p^2}{q^2} + \frac{2p}{qn} + \frac{1}{n} = \frac{p^2}{q^2} + \frac{1}{n} \left(\frac{2p}{q} + 1\right)$ alors

$$\left(\frac{p}{q} + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{p^2}{q^2} + \frac{1}{n} \left(\frac{2p}{q} + 1\right). \quad (1.3)$$

Mais, on remarque qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2p}{q} + 1 \leq n \left(3 - \frac{p^2}{q^2}\right)$, alors $\frac{p^2}{q^2} + \frac{1}{n} \left(\frac{2p}{q} + 1\right) \leq 3$. De (1.3), on trouve qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(\frac{p}{q} + \frac{1}{n}\right)^2 \leq 3$ alors $\frac{p}{q} + \frac{1}{n} \in A$. On a $\frac{p}{q} < \frac{p}{q} + \frac{1}{n}$. C'est à dire on a trouvé un élément $r = \frac{p}{q} + \frac{1}{n} \in A$ tel que $\sup A = \frac{p}{q} < r$. C'est une contradiction avec $\sup A = \frac{p}{q}$ est un majorant de A .

Cas $\frac{p^2}{q^2} > 3$. De même, on montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{n}\right)^2 \geq 3$, alors

$$\forall x \in A : \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{n}\right)^2 \geq 3 \geq x^2,$$

ceci implique que $\frac{p}{q} - \frac{1}{n}$ est un majorant de A mais $\frac{p}{q} - \frac{1}{n} < \sup A = \frac{p}{q}$. Contradiction avec $\sup A \leq$ tous les majorants de A .

1.2 Construction axiomatique de l'ensemble des nombres réels

Théorème 1.2.1 *Il existe un ensemble unique E , qui contient \mathbb{Q} , dans lequel sont définies deux lois de composition internes :*

$$(x, y) \mapsto x + y \text{ (l'addition), } (x, y) \mapsto xy \text{ (la multiplication)}$$

et une relation d'ordre total notée \leq satisfaisant les axiomes suivants :

(A1) L'addition et la multiplication sont commutatives :

$$\forall x, y \in E, x + y = y + x \text{ et } xy = yx.$$

(A2) L'addition et la multiplication sont associatives :

$$\forall x, y, z \in E, x + (y + z) = (x + y) + z \text{ et } x(yz) = (xy)z.$$

(A3) Il existent deux éléments distincts $e, e' \in E$ tels que

$$\forall x \in E : x + e = x \text{ et } xe' = x.$$

e est appelé l'élément neutre par rapport à l'addition et e' est appelé l'élément neutre par rapport à la multiplication.

(A4) Pour tout $x \in E$ il existe $x' \in E$ tels que $x + x' = e$ et si $x \neq e$ il existe $x^* \in E$ telque $xx^* = e'$.

(A5) La multiplication est distributive sur l'addition :

$$\forall x, y \in E : x(y + z) = xy + xz.$$

(A6)

$$\forall x, y, z \in E : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z.$$

(A7)

$$\forall x, y \in E : (e \leq x \wedge e \leq y) \Rightarrow (e \leq xy).$$

(A8) E vérifie la propriété de la borne supérieure.

Preuve 7 Ici on va construire un ensemble (qui vérifie les axiomes A1-A8) à partir de l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} . Ceci peut être réalisé de plusieurs manières. (Voir par exemple, le document de Kada Alab élément d'analyse, où il a utilisé une construction due à Dedekind basée sur les coupures.)

Corollaire 1.2.1 E vérifie la propriété de la borne inférieure. (Pourquoi)

Remarque 1.2.1 1. L'ensemble E du théorème précédent est appelé l'ensemble des nombres réels, on le note par \mathbb{R} . e est noté par 0, x' par $(-x)$, e' par 1 et x^* par x^{-1} .

2. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\}$ est appelé l'ensemble des nombres irrationnels.

Corollaire 1.2.2 Toute partie non vide bornée de \mathbb{R} a une borne supérieure et une borne inférieure. (Pourquoi)

1.3 Les propriétés de l'ensemble \mathbb{R}

1.3.1 Propriétés de calcul

(P1) *Opérations* : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Si $x \leq y$ alors $x - z \leq y - z$, $xz \leq yz$ si $z \geq 0$ et $xz \geq yz$ si $z \leq 0$.

Remarque 1.3.1 On modifie le sens d'une inégalité seulement si on multiplie par un nombre négatif.

(P2) *Passage au carré* : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x \leq y$ alors $x^2 \leq y^2$ si $0 \leq x \leq y$ et $x^2 \geq y^2$ si $x \leq y \leq 0$.

Attention : Si $x < 0$ et $y > 0$ alors on ne peut pas connaître la comparaison de leurs carrés. Par exemple $-3 \leq 1$ mais $(-3)^2 \geq 1^2$ et $-2 \leq 4$ mais $(-2)^2 \leq 4^2$.

(P3) *Passage à l'inverse* : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

1. Si $0 < x \leq y$ alors $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.
2. Si $x \leq y < 0$ alors $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$.
3. Si $x < 0$ et $y > 0$ alors $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

(P4) *Puissance* : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

1. Si $0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq x^n \leq \dots \leq x^2 \leq x \leq 1$.
2. Si $1 \leq x$ alors $1 \leq x \leq \dots \leq x^n$.

(P5) *Sommes et produits d'inégalités* :

1. Si $x \leq y$ et $z \leq t$ alors $x + z \leq y + t$.
2. Si $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq z \leq t$ alors $0 \leq xz \leq yt$.

1.3.2 Valeur absolue d'un réel

Définition 1.3.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la valeur absolue de x , notée $|x|$, par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

Théorème 1.3.1 On a

1. $\forall x \in \mathbb{R} :$

(P1) $|x| \geq 0$. (La valeur absolue est toujours positive)

(P2) $|-x| = |x|$.

(P3) $|x| \geq x$ et $|x| \geq -x$.

$$(P4) \quad |x| = \max(-x, x).$$

$$(P5) \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R} :$

$$(P6) \quad |xy| = |x| |y| \text{ (La valeur absolue du produit égal au produit des valeurs absolue)}$$

$$(P7) \quad \text{Soit } \alpha \geq 0 \text{ alors } |x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha.$$

$$(P8) \quad ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

$$(P9) \quad ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(P1) Par disjonction des cas :

$$\text{i. Si } x \geq 0 \text{ alors } |x| = x \geq 0.$$

$$\text{ii. Si } x \leq 0 \text{ alors } |x| = -x \geq 0.$$

$$(P2) \quad \text{On a } |-x| = \begin{cases} -x & \text{si } (-x) \geq 0 \\ -(-x) & \text{si } (-x) \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = |x|.$$

(P3) Par disjonction des cas :

$$\text{i. Si } x \geq 0 \text{ alors } |x| = x \geq x.$$

$$\text{ii. Si } x \leq 0 \text{ alors } |x| = -x \geq x, \text{ car } x \leq 0, -x \geq 0 \text{ et on sait que le nombre positif est supérieur au nombre négatif.}$$

De même, on montre $|x| \geq -x$. (A faire)

(P4) On a $|x| \geq x$ et $|x| \geq -x$ alors $|x|$ est un majorant de $\{-x, x\}$. En plus

$$|x| = \begin{cases} x \\ \text{ou} \\ -x \end{cases} \text{ alors } |x| \in \{-x, x\}.$$

Ce qui implique que $|x| = \max\{-x, x\}$, mais $\max\{-x, x\} = \max(-x, x)$, d'où le résultat.

(P5) On montre l'implication et l'implication inverse.

- i. Montrons $x = 0 \Rightarrow |x| = 0$. On a $x = 0 \geq 0$, donc $|x| = x = 0$.
- ii. Montrons que $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$. On a $|x| = 0$ mais $|x| = x$ ou $|x| = -x$ alors $x = 0$ ou $-x = 0$, donc dans les deux cas on trouve $x = 0$.

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

(P6) Par disjonction des cas :

- i. Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $|x| = x$ et $|y| = y$, en plus $xy \geq 0$, alors $|xy| = xy = |x| |y|$.
- ii. Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$ alors $|x| = -x$ et $|y| = -y$, en plus $xy \geq 0$, alors $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x| |y|$.
- iii. Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$ alors $|x| = x$ et $|y| = -y$, en plus $xy \leq 0$, alors $|xy| = -(xy) = x(-y) = |x| |y|$.
- iv. Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$ alors $|x| = -x$ et $|y| = y$, en plus $xy \leq 0$, alors $|xy| = -(xy) = (-x)y = |x| |y|$.

(P7) On montre l'implication et l'implication inverse.

- i. Montrons $|x| \leq \alpha \Rightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$. Par disjonction des cas :
 - A. Si $x \geq 0$ alors $x = |x| \leq \alpha$, alors $x \leq \alpha$. D'autre part, on a $(-\alpha) \leq 0$ et $x \geq 0$ alors $-\alpha \leq x$ (Pourquoi). Alors, on a démontré que $x \leq \alpha$ et $-\alpha \leq x$ ce qui implique que $-\alpha \leq x \leq \alpha$.
 - B. De même pour le cas $x \leq 0$ (A faire).
- ii. Montrons $-\alpha \leq x \leq \alpha \Rightarrow |x| \leq \alpha$. On a

$$\begin{aligned}
 (-\alpha \leq x \leq \alpha) &\Rightarrow (0 \leq x \leq \alpha \text{ ou } -\alpha \leq x \leq 0) \\
 &\Rightarrow (|x| = x \leq \alpha \text{ ou } -\alpha \leq x = -|x|) \Rightarrow (|x| \leq \alpha).
 \end{aligned}$$

(P8) Montrons $|x + y| \leq |x| + |y|$. (La valeur absolue de la somme est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolue) Puisque $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq$

$y \leq |y|$ alors $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. Ce qui implique en utilisant la propriété (P7) avec $\alpha = |x| + |y| \geq 0$ que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Montrons $||x| - |y|| \leq |x + y|$. Puisque $x = (x + y) + (-y)$ alors $|x| = |(x + y) + (-y)| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|$ alors $|x| - |y| \leq |x + y|$.

De même, on a $y = (x + y) + (-x)$ alors $|y| = |x + y + (-x)| \leq |x + y| + |-x| = |x + y| + |x|$ alors $-|x + y| \leq |x| - |y|$. C. à d. on a montré que $-|x + y| \leq |x| - |y| \leq |x + y|$. Ce qui implique $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

(P9) *Montrons* $|x - y| \leq |x| + |y|$. On a $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$.

De même, on montre $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

1.3.3 Partie entière d'un réel

Lemme 1.3.1 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leq x < m + 1$.*

Définition 1.3.2 m est appelé la *partie entière* du réel x . On la note $E(x)$ ou $[x]$.

Remarque 1.3.2 $E(x)$ représente le *premier entier relatif classé avant* x .

Exemple 16 On a $E(0) = 0, E(0,5) = 0, E(1,5) = 1, E(-0,5) = -1$ et $E(-1,5) = -2$.

Lemme 1.3.2 1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $E(x) \leq x < E(x + 1) = E(x) + 1$.*

2. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a $E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$.*

Remarque

La deuxième propriété représente un encadrement de la partie entière de la somme de deux réels. Puisque $E(x + y) \in \mathbb{Z}$ alors $E(x + y) = \begin{cases} E(x) + E(y) \\ \text{ou} \\ E(x) + E(y) + 1. \end{cases}$

1.3.4 La n'ème racine

Théorème 1.3.2 Soient $x \geq 0$ et $n > 1$. L'équation $y^n = x$ avec l'inconnue y admet une solution unique dans \mathbb{R}^+ .

Cette solution est appelé la n'ème racine de x . On la note $\sqrt[n]{x}$.

Notation 2 Pour $n = 2$ alors on note $\sqrt[2]{x}$ par \sqrt{x} .

Corollaire 1.3.1 Soit p un nombre premier alors $\sqrt{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Preuve 8 \sqrt{p} représente la solution unique dans \mathbb{R}^+ de l'équation $x^2 = p$. Comme dans l'exercice 8 on peut montrer que cette équation n'admet pas une solution dans \mathbb{Q} ce qui implique que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.3.5 Caractérisation de la borne supérieure et inférieure.

Théorème 1.3.3 Soit $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$.

1.

$$a = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : x \leq a \dots\dots\dots (*) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : a - \varepsilon < x \dots\dots (**) \end{cases}$$

2.

$$b = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : b \leq x. \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < b + \varepsilon. \end{cases}$$

1. On montre l'implication et l'implication inverse.

- (a) Montrons $a = \sup A \Rightarrow [(*) \text{ et } (**)]$. Puisque $a = \sup A$ alors a est un majorant de A (car la borne supérieure est un majorant) ce qui implique $(*)$. Montrons $(**)$. Par l'absurde. Supposons qu'elle n'est pas vérifiée c. à d.

$$\overline{\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : a - \varepsilon < x},$$

alors

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A : x \leq a - \varepsilon,$$

ceci implique que $(a - \varepsilon)$ est un majorant de A mais $a - \varepsilon < a = \sup A$. C. à d. on a trouvé un majorant de A qui est strictement inférieur au $\sup A$, ce qui représente une contradiction avec $\sup A \leq$ tous les majorants de A .

(b) *Montrons* $[(*) \text{ et } (**)] \Rightarrow a = \sup A$.

i. $(*)$ veut dire que a est un majorant de A .

ii. *Montrons maintenant que*

$$\forall M \text{ majorant de } A : a \leq M \text{ (} a \leq \text{ tous les majorants de } A \text{)}.$$

Par l'absurde, supposons que

$$\overline{\forall M \text{ majorant de } A : a \leq M}$$

alors il existe M majorant de A telque $a > M$. Posons $\varepsilon = a - M > 0$,

d'après $(**)$ il existe $x \in A$ telle que $a - \underbrace{(a - M)}_{\varepsilon} < x$. Alors $M < x$.

C. à d. on a trouvé un élément x de A qui est strictement supérieur au majorant M . C'est une contradiction avec la définition du majorant.

2. De même, on montre la caractérisation de la borne inférieure. (A faire)

1.3.6 Intervalles de \mathbb{R}

Définition 1.3.3 Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de \mathbb{R} si pour tout $x, y \in I$ on a

$$\forall r : x \leq r \leq y \Rightarrow r \in I.$$

Définition 1.3.4 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ telque $a < b$.

1. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ est appelé intervalle fermé de \mathbb{R} et il est noté par $[a, b]$.

2. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ est appelé intervalle ouvert à gauche et fermé à droite de \mathbb{R} et il est noté par $]a, b]$.
3. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ est appelé intervalle ouvert à droite et fermé à gauche de \mathbb{R} et il est noté par $[a, b[$.
4. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ est appelé intervalle ouvert de \mathbb{R} et il est noté par $]a, b[$.
5. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ est appelé intervalle ouvert à droite et non borné à gauche (on va voir pourquoi cette définition) de \mathbb{R} et il est noté par $] -\infty, a[$.
6. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ est appelé intervalle ouvert à gauche et non borné à droite de \mathbb{R} et il est noté par $]a, +\infty[$.

Lemme 1.3.3 1. $\sup [a, b] = \max [a, b] = b$ et $\inf [a, b] = \min [a, b] = a$.

2. $\sup]a, b] = \max]a, b] = b$, $\inf]a, b] = a$ et $\min]a, b]$ n'existe pas.

3. $\sup [a, b[= b$ et $\inf [a, b[= \min [a, b[= a$ et $\max [a, b[$ n'existe pas.

4. $\sup]a, b[= b$, $\inf]a, b[= a$ et $\min]a, b[$ et $\max]a, b[$ n'existe pas.

5. $] -\infty, a[$ n'est pas borné inférieurement alors $\inf] -\infty, a[$ n'existe pas. En plus, $\sup] -\infty, a[= a$ et $\max] -\infty, a[$ n'existe pas.

6. $]a, +\infty[$ n'est pas borné supérieurement alors $\sup]a, +\infty[$ n'existe pas. En plus, $\inf]a, +\infty[= a$ et $\min]a, +\infty[$ n'existe pas.

1. On a

$$\forall x \in [a, b] : x \leq b$$

alors b est un majorant de $[a, b]$, en plus $b \in [a, b]$. C. à d. b est un majorant de $[a, b]$ qui appartient à $[a, b]$, ce qui implique que $b = \max [a, b]$. On sait que si $\max A$ existe alors $\sup A$ existe et $\sup A = \max A$, alors $\sup [a, b] = \max [a, b] = b$.

De même, on montre que $\inf [a, b] = \min [a, b] = a$. (A faire)

2. De même que dans (1) on montre que $\sup]a, b] = \max]a, b] = b$.

Montrons que $\inf]a, b] = a$. Pour cela, on va démontrer

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in]a, b] : a \leq x \dots\dots\dots (*) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in]a, b] : x < a + \varepsilon \dots\dots\dots (**) \end{array} \right.$$

(a) Puisque

$$\forall x \in]a, b] : a < x$$

alors (*) est vérifiée (ici on a utilisé $a < x \Rightarrow a \leq x$).

(b) Montrons (**). Soit $\varepsilon > 0$, on essaye de montrer qu'il existe $x \in]a, b]$ tel que $x < a + \varepsilon$ c'est à dire de trouver $x \in]a, b] \cap]-\infty, a + \varepsilon[$. Ceci est possible car $]a, b] \cap]-\infty, a + \varepsilon[\supset]a, \min(b, a + \varepsilon)[\neq \emptyset$.

Pour (3) et (4), on procède comme dans (1) et (2).

5. Montrons que $] -\infty, a[$ n'est pas borné inférieurement. Par l'absurde. Supposons qu'il est borné inférieurement alors il existe $m \in \mathbb{R}$ telque

$$\forall x \in] -\infty, a[: m \leq x,$$

alors

$$\forall x : x \in] -\infty, a[\Rightarrow x \in [m, +\infty[,$$

Puisque

$$(\forall x : x \in B \Rightarrow x \in C) \Leftrightarrow (B \subseteq C)$$

alors $] -\infty, a[\subset [m, +\infty[$. Ceci représente une contradiction .

Montrons que $\inf] -\infty, a[$ n'existe pas. Par l'absurde. Supposons qu'il existe, on a $\inf] -\infty, a[$ est un minorant de $] -\infty, a[$ (Pourquoi). Ceci est une contradiction avec $] -\infty, a[$ n'est pas minoré.

Pour montrer que $\sup] -\infty, a[= a$ on procède comme dans (2). (A faire)

6. On procède comme dans (5) (A faire)

- Remarque 1.3.3** 1. I est un intervalle de \mathbb{R} si et seulement si pour tout $x, y \in I$ on a $[x, y] \subset I$.
2. L'intersection de deux intervalles de \mathbb{R} est un intervalle de \mathbb{R} . (Pourquoi)
3. La réunion de deux intervalles de \mathbb{R} n'est pas nécessairement un intervalle de \mathbb{R} . (Pourquoi)

Lemme 1.3.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $E(x) = \max(\mathbb{Z} \cap]-\infty, x])$. (A faire)

1.3.7 Propriété d'Archimède

Théorème 1.3.4 \mathbb{R} vérifie la propriété d'Archimède :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^* : nx > y.$$

Preuve 9 Par l'absurde. Supposons qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : nx_0 \leq y_0.$$

Posons $A = \{nx_0 : n \in \mathbb{N}^*\}$. Si on utilise l'hypothèse de l'absurde, on obtient A est borné supérieurement par y_0 . Alors $\sup A$ existe car $A \subset \mathbb{R}$ et \mathbb{R} vérifie la propriété de la borne supérieure. Si on applique la caractérisation de la borne supérieure sur $\varepsilon = x_0 > 0$ on trouve $mx_0 \in A$ ($m \in \mathbb{N}^*$) tel que $\sup A < mx_0 + \underbrace{x_0}_{\varepsilon} = (m+1)x_0 \in A$. C. à d. on a trouvé un élément de A qui est strictement supérieur à $\sup A$. Ce qui représente une contradiction avec $\sup A$ est un majorant de A .

Applications de la propriété d'Archimède

1. L'existence d'une solution dans \mathbb{N} d'inéquations linéaire d'ordre un : On peut utiliser la propriété d'Archimède pour montrer que les inéquations linéaire d'ordre un admet au moins une solution dans \mathbb{N} .

Exemple 17 Soit $x > 1$. L'inéquation $nx - n > 1$ dont l'inconnue est n admet une solution dans \mathbb{N} . En effet, si on applique la propriété d'Archimède sur $(x - 1, 1) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on trouve $n \in \mathbb{N}^*$ telque $n(x - 1) > 1$. C. à d. il existe $n \in \mathbb{N}^*$ telque $nx - n > 1$.

2. \mathbb{N} n'est pas borné supérieurement dans \mathbb{R} : Soit $M \in \mathbb{R}$. Si on applique la propriété d'Archimède sur $(1, M) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on trouve $n \in \mathbb{N}^*$ telque $n.1 > M$. C. à d. on a démontré que :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^* : n > M,$$

alors

$$\forall M \in \mathbb{R}, \overline{\forall n \in \mathbb{N} : n \leq M},$$

alors

$$\forall M \in \mathbb{R} : M \text{ n'est pas un majorant de } \mathbb{N}^*.$$

Ce qui implique que \mathbb{N}^* n'admet pas un majorant dans \mathbb{R} alors elle n'est pas borné supérieurement dans \mathbb{R} . Puisque $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$ alors on trouve que \mathbb{N} n'est pas majoré dans \mathbb{R} .

Remarque 1.3.4 \mathbb{N} est borné inférieurement et on a $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 0$ (Pourquoi).

1.3.8 Densité des nombres rationnels et irrationnels dans \mathbb{R}

Définition 1.3.5 Soit $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$. On dit que D est dense dans \mathbb{R} si entre chaque deux éléments distincts de \mathbb{R} il existe un élément de D . C. à dire

$$\forall x, y \in \mathbb{R} (x < y), \exists d \in D : x < d < y.$$

Lemme 1.3.5 \mathbb{Z} n'est pas dense dans \mathbb{R} . (Pourquoi)

Théorème 1.3.5 \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

Preuve 10 Soient $x, y \in \mathbb{R}$ telque $x < y$. Si on applique la propriété d'Archimède sur $(y - x, 1) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on trouve $n \in \mathbb{N}^*$ telque $n(y - x) > 1$, alors $ny > nx + 1$. D'autre part, il existe $m \in \mathbb{Z}$ telque $m - 1 \leq nx < m$, ici $m - 1 = E(nx)$. On a $ny > nx + 1 \geq (m - 1) + 1 = m$ alors $nx < m < ny$, si on dévise par n on obtient $x < r < y$ avec $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Donc, on a démontré que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ telque $x < y$ il existe $r \in \mathbb{Q}$ [$r = \frac{m}{n}$ où n représente le nombre entier donné par l'application d'Achimède sur $(y - x, 1)$ et $m = E(nx) + 1$] telque $x < r < y$. Ceci implique la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

Corollaire 1.3.2 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} .

Preuve 11 Soient $x, y \in \mathbb{R}$ telque $x < y$. Si on utilise la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} on trouve $r \in \mathbb{Q}$ telque $x < r < y$. Si on applique la propriété d'Archimède sur $(y - r, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on trouve $n \in \mathbb{N}^*$ telque $n(y - r) > \sqrt{2}$, alors $y > \frac{\sqrt{2}}{n} + r$ mais $\frac{\sqrt{2}}{n} + r > r > x$ d'où $x < \frac{\sqrt{2}}{n} + r < y$.

Posons $r' = \frac{\sqrt{2}}{n} + r$. On a $r' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (Pourquoi). Donc on a démontré que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ telque $x < y$ il existe $r' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ [$r' = \frac{\sqrt{2}}{n} + r$ où $r \in \mathbb{Q}$ telque $x < r < y$ et n représente le nombre entier donné par l'application d'Achimède sur $(y - r, \sqrt{2})$] telque $x < r' < y$. Ceci implique la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} .

1.4 Exercices

Exercice 1 (Relation d'ordre)

Soit \leq une relation binaire définie sur $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ comme suit

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : (x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow (x \leq x' \text{ et } y \leq y').$$

1. Montrer que \leq est une relation d'ordre sur $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
2. Est ce que \leq est un ordre total. (Justifier)
3. Classer les éléments suivants $(1, 2)$, $(5, 8)$ et $(0, 0)$.
4. Soit $A = \{(1, 2), (3, 1)\}$.
 - (a) Trouver l'ensemble des majorants et des minorants de A .
 - (b) Trouver la borne supérieure et inférieure de A . (s'ils existent)
 - (c) Est ce que $\max A$ et $\min A$ existent. (Justifier)

Solution 1

2. \leq n'est pas un ordre total car $(1, 2) \not\leq (2, 1)$ et $(2, 1) \not\leq (1, 2)$. C. à dire, ils existent deux éléments de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ noncomparables.
3. On a $0 \leq 1 \leq 5$ et $0 \leq 2 \leq 8$ alors $(0, 0) \leq (1, 2) \leq (5, 8)$.
- 4.a On a

$$\begin{aligned} (M = (M_1, M_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \text{ est un majorant de } A) &\Leftrightarrow ((1, 2) \leq M \text{ et } (3, 1) \leq M) \\ &\Leftrightarrow (1 \leq M_1, 3 \leq M_1 \text{ et } 2 \leq M_2, 1 \leq M_2) \\ &\Leftrightarrow (3 \leq M_1 \text{ et } 2 \leq M_2) \\ &\Leftrightarrow (3, 2) \leq M = (M_1, M_2). \end{aligned}$$

L'ensemble des majorants de A est $M(A) = \{M \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : (3, 2) \leq M\}$.

De même, on montre que l'ensemble des minorants de A est $m(A) = \{m \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : m \leq (1, 1)\}$

4.b On montre que $\sup A = (3, 2)$.

i On a $(3, 2)$ est un majorant de A .

ii De la question (4a) on a pour tout M majorant de A on a $(3, 2) \leq M$, alors $(3, 2) \leq$ tous les majorants de A .

4c Puisque $\sup A = (3, 2) \notin A$ alors $\max A$ n'existe pas.

Exercice 2 (Maximum et minimum de deux éléments)

Soit \leq une relation d'ordre définie sur \mathbb{Q}^3 comme suit : pour tout $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{Q}^3$ on a

$$[(x, y, z) \leq (x', y', z')] \Leftrightarrow [x \leq x' \wedge y \leq y' \wedge z \leq z'].$$

1. Soit $A = \{(1, 2, 3), (3, 0, 1)\}$.

(a) Trouver l'ensemble des majorants et des minorants de A .

(b) Trouver $\sup A$ et $\inf A$ (s'ils existent).

(c) Est ce que $\max A$ et $\min A$ existent. (Justifier)

(d) Que peut on dire sur $\max((1, 2, 3), (3, 0, 1))$ et $\min((1, 2, 3), (3, 0, 1))$. (Justifier)

2. Trouver deux éléments a et b de \mathbb{Q}^3 tels que $\max(a, b)$ et $\min(a, b)$ existent.

Exercice 3 (Propriété de la borne supérieure et inférieure)

Soit $E \neq \emptyset$. $P(E)$ l'ensemble de parties de E muni de la relation d'ordre \subseteq .

1. Soit $\emptyset \neq \mathbb{A} \subseteq P(E)$.

(a) Montrer que \mathbb{A} est borné dans $P(E)$.

(b) Montrer que $\sup \mathbb{A} = \bigcup_{Y \in \mathbb{A}} Y$ et $\inf \mathbb{A} = \bigcap_{Y \in \mathbb{A}} Y$.

2. Que peut on dire sur $P(E)$.

Solution 3

1.a Puisque $\mathbb{A} \subset P(E)$ alors

$$\forall X \in \mathbb{A} : X \in P(E),$$

alors

$$\forall X \in \mathbb{A} : X \subset E.$$

En plus, on a

$$\forall X \in \mathbb{A} : \emptyset \subset X.$$

C. à d.

$$\forall X \in \mathbb{A} : \emptyset \subset X \subset E.$$

Ce qui implique que \mathbb{A} est borné dans $P(E)$.

1.b Montrons que $\sup \mathbb{A} = \bigcup_{Y \in \mathbb{A}} Y$.

i On a

$$\forall X \in \mathbb{A} : X \subset \bigcup_{Y \in \mathbb{A}} Y$$

alors $\bigcup_{Y \in \mathbb{A}} Y$ est un majorant de \mathbb{A} .

ii Montrons que $\bigcup_{Y \in \mathbb{A}} Y \subseteq$ tous les majorants de \mathbb{A} . Soit M majorant de \mathbb{A} alors

$$\forall Y \in \mathbb{A} : Y \subseteq M,$$

donc $\bigcup_{Y \in \mathbb{A}} Y \subseteq M$.

2. Chaque $\underbrace{\text{ensemble } \mathbb{A} \text{ de } P(E)}_p$ est majoré et il admet une $\underbrace{\text{borne supérieure}}_q$ alors $P(E)$ vérifie la propriété de la borne supérieure.

Rappel : Soient p, q deux propriétés logiques on a $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

Exercice 4 (Relation entre la propriété de la borne supérieure et de la borne inférieure)

- I. **Questions de cours :** Donner la définition de la propriété de la borne supérieure et de la borne inférieure. Est ce que $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, (P(E), \subset)$ vérifient ces propriétés.
- II. Soit (E, \leq) un ensemble ordonné.
 1. On suppose que E vérifie la propriété de la borne supérieure. Soit A un ensemble non vide et minoré de E . Posons $L = \{m : m \leq x, \forall x \in A\}$.
 - (a) Que représente l'ensemble L . Pourquoi $L \neq \emptyset$.
 - (b) Montrer que L admet une borne supérieure dans E . On la note par α .
 - (c) Montrer que $\inf A = \alpha$.
 - (d) Que peut on dire sur E . Faite une conclusion de cette partie.
 2. Montrer que si E vérifie la propriété de la borne inférieure alors il vérifie la propriété de la borne supérieure.

Solution 4

- II.1.a L représente l'ensemble des minorants de A . $L \neq \emptyset$ car il existe au moins un minorant de A . (car A est minoré)
- II.1.b Puisque $A \neq \emptyset$ alors il existe $x_0 \in A$. On a, d'après la définition de L ,

$$\forall m \in L : m \leq x_0,$$

ce qui implique que L est majoré. D'autre part $L \subseteq E$ et E vérifie la propriété de la borne supérieure alors L admet une borne supérieure.

- II.1.c Montrons que α est un minorant de A et (Tous les minorants de $A \leq \alpha$)

- (i) Soit $x \in A$ on a

$$\forall m \in L : m \leq x,$$

alors x est un majorant de L donc $\alpha = \sup L \leq x$ (car $\sup L \leq$ tous les majorants de L). C. à d. on a démontré que

$$\forall x \in A : \alpha \leq x,$$

alors α est un minorant de A .

(ii) Soit m un minorant de A alors $m \in L$ ce qui implique que $m \leq \sup L = \alpha$ (car $\sup L$ est un majorant de L). C. à d. on a démontré que

$$\forall m \text{ minorant de } A : m \leq \alpha.$$

II.1.d On a démontré que si E vérifie la propriété de la borne supérieure alors chaque ensemble non vide et minoré de E admet une borne inférieure, ce qui implique que E vérifie la propriété de la borne inférieure.

On déduit que

$(E \text{ vérifie la propriété de la borne supérieure}) \Rightarrow (E \text{ vérifie la propriété de la borne inférieure})$

Exercice 5 (Sous ensemble d'un ensemble borné)

Soient A et B deux parties non vide de \mathbb{R} tel que $A \subseteq B$. Supposons que B est bornée.

1. Pourquoi $\sup B$ et $\inf B$ existent.
2. Montrer que A est bornée.
3. Montrer que $\sup A \leq \sup B$ et $\inf B \leq \inf A$.

Exercice 6 (L'union de deux ensembles bornés)

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que

- (a) $(x \leq a \vee x \leq b) \Rightarrow (x \leq \max(a, b))$.
 - (b) $(x \geq a \vee x \geq b) \Rightarrow (x \geq \min(a, b))$.
2. Soient A et B deux parties non vide bornées de \mathbb{R} . Montrer que $A \cup B$ est bornée.
 3. Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

Exercice 7 (L'intersection de deux ensembles bornés)

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que
 - (a) $(x \leq a \wedge x \leq b) \Rightarrow (x \leq \min(a, b))$.
 - (b) $(x \geq a \wedge x \geq b) \Rightarrow (x \geq \max(a, b))$.
2. Soient A et B deux parties non vide bornées de \mathbb{R} telque $A \cap B \neq \emptyset$.
 - (a) Montrer que $A \cap B$ est bornée.
 - (b) Montrer que $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$.
3. Supposons que $A = \{-1, 1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 4\}$.
 - (a) Calculer $\sup(A \cap B)$ et $\min(\sup A, \sup B)$.
 - (b) Est ce que $\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$.
 - (c) Calculer $\inf(A \cap B)$ et $\max(\inf A, \inf B)$.
 - (d) Est ce que $\inf(A \cap B) = \max(\inf A, \inf B)$.
 - (e) Que peut on déduire.

Solution 7

- 1.a Montrons $(x \leq a \wedge x \leq b) \Rightarrow x \leq \min(a, b)$.

$$\begin{aligned}
 (x \leq a \wedge x \leq b) &\Rightarrow (x \in]-\infty, a] \wedge x \in]-\infty, b]) \\
 &\Rightarrow (x \in]-\infty, a] \cap]-\infty, b] =]-\infty, \min(a, b)]) \\
 &\Rightarrow x \leq \min(a, b).
 \end{aligned}$$

Exercice 8 (L'insuffisance des nombres irrationnels)

1. **Question de cours :** *Quelle est le principe du raisonnement par l'absurde.*
2. Montrer que l'équation $x^2 = 3$ n'admet pas une solution dans \mathbb{Q} .

Solution 8

2. On montre, par l'absurde, que l'équation $x^2 = 3$ n'admet pas une solution dans \mathbb{Q} .

On suppose le contraire, donc ils existent $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ telque p et q sont premiers entre eux et

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 3. \quad (1.4)$$

Alors $p^2 = 3q^2$ ce qui implique que $3 \mid p^2$ puisque 3 est un entier premier et $p^2 = p.p$ alors $3 \mid p$ donc $p = 3k$. Remplaçons dans (1.4) pour trouver $\frac{9k^2}{q^2} = 3$ alors $q^2 = 3k^2$ d'où $3 \mid q$ contradiction avec p et q sont premiers entre eux.

Exercice 9 (Calcul de la borne supérieure et inférieure)

Les parties 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes.

1. Soient $p, q \in \mathbb{Q}$ ($p < q$) et $A = \{r \in \mathbb{Q} : p \leq r < q\}$. Montrer que $\sup A = q$ et $\inf A = p$.
2. Soit $A = \left\{\frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
 - (a) Montrer que A est borné.
 - (b) Montrer que $\sup A = 1$ et $\inf A = \frac{1}{2}$.
 - (c) Est ce que $\max A$ et $\min A$ existent. (Justifier)
3. Soient $A = [2, 4[\cup]0, 1]$, $B = \{x^2 + 1 : x \in]1, 2]\}$, $C = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et $D = \{n + 1 : n \in \mathbb{N}^*\}$.

Est ce que les ensembles A, B, C et D sont des ensembles bornés. Calculer leurs bornes supérieure et inférieure puis leurs maximum et minimum (s'ils existent).

4. Etudier l'existence de la borne supérieure, inférieure, maximum et minimum des ensembles : $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ et $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$. Déterminer leurs ensembles des majorants et des minorants.

Solution 9

1. Puisque

$$\forall r \in A : p \leq r$$

alors p est un minorant de A , en plus $p \in \mathbb{Q}$ et $p \leq p < q$ alors $p \in A$, donc $p = \min A$ alors $\inf A = \min A = p$.

Montrons maintenant que $\sup A = q$. Puisque

$$\forall r \in A : r < q$$

alors q est un majorant de A . *Reste à démontrer que pour tout M majorant de A on a $q \leq M$.* Par l'absurde, on suppose qu'il existe un majorant M de A tel $M < q$. Si on applique la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} on trouve $r' \in \mathbb{Q}$ telque $M < r' < q$. D'autre part, on a

$$\forall r \in A : r \leq M$$

mais $p \leq r$ alors $p \leq M$. Donc $p \leq r' < q$, c'est à dire on a trouvé un élément $r' \in A$ strictement supérieur au majorant M de A , c'est une contradiction avec la définition du majorant.

2. $A = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

- (a) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2}$ (car $2n < 2n+1$) donc

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} < 1, \quad (1.5)$$

alors A est borné

- (b) De (1.5), on trouve que $\frac{1}{2}$ est un minorant de A , en plus $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{0}{2 \cdot 0 + 1}$ alors

$\frac{1}{2} \in A$, donc $\frac{1}{2} = \min A$ alors $\inf A = \min A = \frac{1}{2}$.

Montrons que $\sup A = 1$. De (1.5), on trouve que 1 est un majorant de A . Soit M un majorant de A telque $M < 1$, alors $1 - M > 0$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} \leq M$ donc $\frac{n}{2n+1} \leq M - \frac{1}{2}$ d'où $n \leq (M - \frac{1}{2})(2n+1)$ alors $n \leq \frac{M - \frac{1}{2}}{2(1-M)}$. C'est à dire on a trouvé que

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \leq \frac{M - \frac{1}{2}}{2(1-M)},$$

alors \mathbb{N} est majoré par $\frac{M - \frac{1}{2}}{2(1-M)}$, ce qui représente une contradiction avec \mathbb{N} n'est pas majoré.

(c) Puisque il n'existe pas $n \in \mathbb{N}$ telque $1 = \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1}$ (sinon, on aura $1 = 0$) alors $\sup A = 1 \notin A$ donc $\max A$ n'existe pas.

4.a On a $[0, 1] \cap \mathbb{Q} \subset [0, 1]$, mais $[0, 1]$ est borné alors $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ est borné (voir le résultat de l'exercice 5). En plus,

$$\forall x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 1,$$

et $0, 1 \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Ce qui implique que 1 est un majorant de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ qui appartient à $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, alors $\max([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 1$. En plus, $\sup([0, 1] \cap \mathbb{Q})$ existe et on a $\sup([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = \max([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 1$.

De même 0 est un minorant de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ qui appartient à $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, alors $\min([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0$. En plus, $\inf([0, 1] \cap \mathbb{Q})$ existe et on a $\inf([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = \min([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0$.

On déduit que l'ensemble des majorants de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ est $[1, +\infty[$ et l'ensemble des minorants de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ est $] -\infty, 0]$.

4.b On a

$$x \in]0, 1[\cap \mathbb{Q} \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1,$$

alors $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ est borné, en plus 1 est un majorant de $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ et 0 est un minorant

de $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ (mais il faut faire attention ici $0, 1 \notin]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ donc on ne peut pas procéder comme la question précédente).

On montre que $\sup (]0, 1[\cap \mathbb{Q}) = 1$.

On a montré que 1 est un majorant de $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$. On montre par l'absurde que $1 \leq$ tous les majorants de $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$.

On suppose le contraire, c'est à dire, on suppose qu'il existe un majorant M de $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ tel que $1 > M$.

Puisque M est majorant de $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ donc $0 \leq M$.

D'autre part, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $1 > r > M$ (car \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R}). D'où $1 > r > M \geq 0$. Ce qui implique que $r \in \mathbb{Q}$ et $r \in]0, 1[$, d'où $r \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}$. c'est à dire, on a trouvé un élément r de $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ qui est strictement supérieur au majorant M . contradiction.

On montre que $\inf (]0, 1[\cap \mathbb{Q}) = 0$.

On a montré que 0 est un minorant de $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$. On montre

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in]0, 1[\cap \mathbb{Q} : x < \varepsilon = 0 + \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, notre objectif est de trouver $x \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ qui soit inférieur à ε . En réalité, ceci est possible car

$$\begin{aligned} (\varepsilon > 0) &\Rightarrow (0 < \varepsilon < 1 \text{ ou } 1 \leq \varepsilon) \Rightarrow \left(0 < \varepsilon < 1 \text{ ou } \frac{1}{2} < 1 \leq \varepsilon \right) \\ &\Rightarrow \left(\exists r \in \mathbb{Q} : 0 < r < \varepsilon < 1 \text{ ou } \exists \frac{1}{2} \in]0, 1[\cap \mathbb{Q} : \frac{1}{2} < \varepsilon \right) \\ &\Rightarrow \left(\exists r \in]0, 1[\cap \mathbb{Q} : r < \varepsilon \text{ ou } \exists \frac{1}{2} \in]0, 1[\cap \mathbb{Q} : \frac{1}{2} < \varepsilon \right) \\ &\Rightarrow \left(\exists x = \min \left(\frac{1}{2}, r \right) \in]0, 1[\cap \mathbb{Q} : x < \varepsilon. \right) \end{aligned}$$

On déduit que l'ensemble des majorants de $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ est $[1, +\infty[$ et l'ensemble des minorants de $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ est $] -\infty, 0]$. $\max (]0, 1[\cap \mathbb{Q})$ et $\min (]0, 1[\cap \mathbb{Q})$ n'existent

pas car $\sup (]0, 1[\cap \mathbb{Q}) = 1 \notin]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ et $\inf (]0, 1[\cap \mathbb{Q}) = 0 \notin]0, 1[\cap \mathbb{Q}$.

4.c On pose $A = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$.

On remarque que

$$\begin{aligned}
 A &= \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n \text{ est pair } \neq 0 \text{ ou impaire} \right\} \\
 &= \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n \text{ est pair } \neq 0 \right\} \cup \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n \text{ est impaire} \right\} \\
 &= \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n = 2k \text{ et } k \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n = 2k + 1 \text{ et } k \in \mathbb{N} \right\} \\
 &= \left\{ (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \left\{ (-1)^{2k+1} + \frac{1}{2k+1} : k \in \mathbb{N} \right\} \\
 &= \left\{ 1 + \frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2k+1} - 1 : k \in \mathbb{N} \right\} \\
 &= A_1 \cup A_2,
 \end{aligned}$$

avec $A_1 = \{1 + \frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N}^*\}$ et $A_2 = \{\frac{1}{2k+1} - 1 : k \in \mathbb{N}\}$.

Donc $\sup A = \sup (A_1 \cup A_2) = \max(\sup A_1, \sup A_2)$ et $\inf A = \inf (A_1 \cup A_2) = \min(\inf A_1, \inf A_2)$. On a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : 1 = 1 + 0 < 1 + \frac{1}{2k} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : 1 < 1 + \frac{1}{2k} \leq \frac{3}{2},$$

ce qui implique que A_1 est borné. En plus, $\frac{3}{2}$ est un majorant de A_1 qui appartient à A_1 (car $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1}$). Donc, $\max A_1 = \frac{3}{2}$ et $\sup A_1 = \max A_1 = \frac{3}{2}$.

On montre que $\inf A_1 = 1$. On a 1 est un minorant de A_1 . On montre qu'il est supérieur à tout les minorants de A_1 : Par l'absurde. On suppose qu'il existe une minorant m de A_1 tel que $m > 1$ ($m - 1 > 0$).

Puisque

$$\begin{aligned}
 \left(\forall k \in \mathbb{N}^* : m \leq 1 + \frac{1}{2k} \right) &\Rightarrow \left(\forall k \in \mathbb{N}^* : m - 1 \leq \frac{1}{2k} \right) \\
 &\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}^* : 2k(m-1) \leq 1) \\
 &\stackrel{m-1 > 0}{\Rightarrow} \left(\forall k \in \mathbb{N}^* : 2k \leq \frac{1}{m-1} \right) \\
 &\Rightarrow \left(\forall k \in \mathbb{N}^* : k \leq \frac{1}{2(m-1)} \right),
 \end{aligned}$$

ce qui implique que $\frac{1}{2(m-1)}$ est un majorant de \mathbb{N}^* donc \mathbb{N}^* est supérieurement borné.

Contradiction.

Finalement, on trouve $\sup A = \max(\sup A_1, \sup A_2) = \max(\frac{3}{2}, 0) = \frac{3}{2}$ et $\inf A = \min(\inf A_1, \inf A_2) = \min(1, -1) = -1$.

Exercice 10 (Les intervalles de \mathbb{R})

Soit A un ensemble non vide de \mathbb{R} . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. A est borné dans \mathbb{R} .
2. $\exists M \geq 0, \forall x \in A : |x| \leq M$.
3. A est inclus dans un intervalle borné de \mathbb{R} .

(Rappel : Chaque intervalle borné de \mathbb{R} est inclus dans un intervalle de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.)

Solution 10

Montrons $1 \Rightarrow 2$:

On suppose que A est borné dans \mathbb{R} alors

$$\forall x \in A : \inf A \leq x \leq \sup A.$$

Mais $\sup A \leq |\sup A| \leq \max(|\sup A|, |\inf A|)$ et $-\inf A \leq |\inf A| \leq \max(|\sup A|, |\inf A|)$

alors $\sup A \leq \max(|\sup A|, |\inf A|)$ et $-\max(|\sup A|, |\inf A|) \leq \inf A$ donc pour tout $x \in A$ on a $-\max(|\sup A|, |\inf A|) \leq \inf A \leq x \leq \sup A \leq \max(|\sup A|, |\inf A|)$, ce qui implique

$$\forall x \in A : -\max(|\sup A|, |\inf A|) \leq x \leq \max(|\sup A|, |\inf A|).$$

Alors

$$\forall x \in A : |x| \leq \max(|\sup A|, |\inf A|).$$

Il suffit de prendre $M = \max(|\sup A|, |\inf A|)$.

Montrons $2 \implies 3$:

On suppose qu'il existe $M \geq 0$ telle que

$$\forall x \in A : |x| \leq M,$$

donc

$$\forall x \in A : x \in [-M, M],$$

alors A est inclus dans l'intervalle borné $[-M, M]$.

Montrons $3 \implies 1$:

On suppose que A est inclus dans un intervalle borné I , puisque I est inclus dans un intervalle de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ alors A est inclus dans $[a, b]$ ce qui implique que

$$\forall x \in A : x \in [a, b],$$

alors

$$\forall x \in A : a \leq x \leq b,$$

d'où A est borné.

Exercice 11 (Application de la propriété d'Archimède dans \mathbb{R})

1. **Question de cours :** *Enoncer la propriété d'Archimède dans \mathbb{R} .*

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ telque $a < 0 < b$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a < -\frac{1}{n} < \frac{1}{n} < b$.

Solution 11

2. On applique Archimède sur $(b, 1) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on trouve $n_1 \in \mathbb{N}^*$ telque $n_1 b > 1$ alors $\frac{1}{n_1} < b$. Puis, sur $(-a, 1) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on trouve $n_2 \in \mathbb{N}^*$ telque $n_2(-a) > 1$ alors $a < -\frac{1}{n_2}$. Si on prend $n = \max(n_1, n_2)$ on trouve $a < -\frac{1}{n_2} \leq -\frac{1}{n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_1} < b$ alors $a < -\frac{1}{n} < \frac{1}{n} < b$.

Exercice 12 (Application de la propriété d'Archimède)

Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < a < n$.

Exercice 13 (Application de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R})

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r \in \mathbb{Q} : |r - a| < \varepsilon.$$

Solution 13

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $a - \varepsilon < a + \varepsilon$ alors d'après la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} on trouve $r \in \mathbb{Q}$ telque $a - \varepsilon < r < a + \varepsilon$ mais

$$(a - \varepsilon < r < a + \varepsilon) \implies (-\varepsilon < r - a < \varepsilon) \implies (|r - a| < \varepsilon).$$

Exercice 14 (Application de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R})

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $a < r < a + 1$.

Exercice 15 (Valeur absolue)

1. **Questions de cours :** Donner la définition de la valeur absolue puis énoncer littérairement ses propriétés.

Les parties 2,3 et 4 sont indépendantes.

2. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a $\inf(x, y) = \frac{1}{2} [x + y - |x - y|]$ et $\sup(x, y) = \frac{1}{2} [x + y + |x - y|]$.
3. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$[|x + y| \leq z \text{ et } |x - y| \leq z] \Rightarrow [|x| + |y| \leq 2z].$$

(Indication : Utiliser $x = \frac{1}{2} [(x + y) + (x - y)]$, $y = \frac{1}{2} [(x + y) - (x - y)]$ et les inégalités triangulaires.)

4. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que $|a + b| = |a| + |b|$ si et seulement si a et b sont tous deux positifs ou tous deux négatifs.
 - (b) Dédurre que $|a - b| = |a - c| + |c - b|$ si et seulement si $a \leq c \leq b$ ou $b \leq c \leq a$.

Solution 15

2. On a

$$\frac{1}{2} [x + y - |x - y|] = \begin{cases} \frac{1}{2} [x + y - (x - y)] & \text{si } x \geq y \\ \frac{1}{2} [x + y + (x - y)] & \text{si } x \leq y \end{cases} = \begin{cases} y & \text{si } x \geq y \\ x & \text{si } x \leq y \end{cases} = \inf(x, y).$$

3. On a $x = \frac{1}{2} [(x + y) + (x - y)]$ et $y = \frac{1}{2} [(x + y) - (x - y)]$ alors $|x| \leq \frac{1}{2} [|x + y| + |x - y|] \leq z$. De même, on montre que $|y| \leq z$ ce qui implique que $|x| + |y| \leq 2z$.

Exercice 16 (Opérations entre les nombres rationnels et irrationnels)

1. **Questions de cours :** Que représente l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres irrationnels. Est ce qu'il y'a un élément dans l'intersection (Justifier).
2. Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $r \in \mathbb{Q}$.

- (a) Montrer que $x + r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- (b) Que peut on dire sur $x.r$ (*Indication : distinguer les deux cas $r = 0$ et $r \neq 0$*).
- 3. Est ce que $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2, 2 + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}$ sont des éléments rationnels (Justifier).
- 4. Montrer que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne sont pas internes.

Exercice 17 (Partie entière d'un réel)

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit $x = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2009)^2}$. Déterminer $E(x)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que $x - 1 < E(x) \leq x$.
 - (b) Montrer que si $x \geq 0$ alors $-x < (E(x))^2 - xE(x) \leq 0$.
 - (c) Montrer que si $x \leq 0$ alors $0 \leq (E(x))^2 - xE(x) < 1 - x$.

Solution 17

1. Pour tout $n \geq 2$ on a $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ alors

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2009)^2} < \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2008} - \frac{1}{2009}\right) = 1 - \frac{1}{2009} < 1,$$

donc $1 < x < 2$. Ceci implique que $E(x) = 1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
 - (a) Puisque $x < E(x) + 1$ alors $x - 1 < E(x)$. L'autre inégalité est évidente.
 - (b) $x \geq 0$ alors $E(x) \geq 0$. On multiplie $x - 1 < E(x) \leq x$ par $E(x)$ on trouve $(x - 1)E(x) < (E(x))^2 \leq xE(x)$, d'où $-E(x) < (E(x))^2 - xE(x) \leq 0$.
 - (c) $x \leq 0$ alors $E(x) \leq 0$. On multiplie $x - 1 < E(x) \leq x$ par $E(x)$ on trouve $xE(x) \leq (E(x))^2 < (x - 1)E(x)$, d'où $0 \leq (E(x))^2 - xE(x) < -E(x)$, mais $-E(x) < 1 - x$ alors $0 \leq (E(x))^2 - xE(x) < 1 - x$.

Exercice 18 (Densité dans \mathbb{R})

Soit D un ensemble dense dans \mathbb{R} .

1. **Questions de cours :** Donner la définition de D est un ensemble dense dans \mathbb{R} .
Est ce que \mathbb{Z} , \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} .
2. Montrer que si E est un ensemble tel que $D \subset E \subset \mathbb{R}$ alors E est dense dans \mathbb{R} .
Enoncer littérairement ce résultat.
3. Soit F un ensemble fini de \mathbb{R} . Montrer que $D \setminus F$ est dense dans \mathbb{R} . Enoncer littérairement ce résultat.

Exercice 19 (Densité dans \mathbb{R})

Soit I un intervalle de \mathbb{R} qui contient au moins deux éléments distincts. Montrer que I contient une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.

Solution 19

Si on applique la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} on trouve que I contient un intervalle de la forme $[x, y]$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R}$. Pour montrer que I contient une infinité de nombres rationnels il suffit de montrer que $[x, y]$ contient une infinité de nombres rationnels. Par l'absurde. Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres rationnels dans $[x, y]$. Soit B l'ensemble de ces nombres. Alors il n'existe aucun nombre rationnel entre x et $\min B$. Contradiction avec la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

De même, on montre que I contient une infinité de nombres irrationnels. (A faire)

Chapitre 2

Les suites numériques

2.1 Préliminaires

Définition 2.1.1 Soit $E \neq \emptyset$. Toute fonction f définie de \mathbb{N} vers E est appelée suite des éléments de E .

Remarque 2.1.1 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'image de n par la fonction f est notée par u_n .
2. u_n est appelé le terme général de la fonction f .
3. La fonction f est notée par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) .

Définition 2.1.2 Si $E = \mathbb{R}$ alors (u_n) est appelée suite numérique.

Remarque 2.1.2 On peut définir (donner) une suite par plusieurs manières :

1. Formule explicite : Exprimer u_n en terme de n . Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = n$.
2. Propriété : Donner une caractérisation des termes de la suite (u_n) . Par exemple, u_n représente le $n^{\text{ème}}$ entier premier.
3. Relation de récurrence : Donner le premier terme et u_{n+1} en fonction de u_n . Par exemple,
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarque 2.1.3 Ils existent des suites qui ne sont pas définies sur tout \mathbb{N} . En général, elles sont définies à partir d'un certain rang c'est à dire $(u_n)_{n \geq n_0}$, où $n_0 \in \mathbb{N}$. Par exemple, la suite $\left(\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\right)$ est définie pour $n \geq n_0 = 3$.

Définition 2.1.3 L'ensemble $A = \{u_n : n \geq n_0\}$ est appelé l'ensemble des valeurs de la suite (u_n) .

Exemple 18 Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = -1$ alors l'ensemble des valeurs de (u_n) est $A = \{-1\}$.

Définition 2.1.4 Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = a$ est appelée la suite constante (a) .

Exemple 19 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 1$, alors (u_n) est la suite constante (1) .

Définition 2.1.5 La suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 0$ est appelée la suite nulle.

2.1.1 Opérations algébriques sur les suites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

Définition 2.1.6 La somme de (u_n) et (v_n) est la suite numérique dont le terme général est $u_n + v_n$, c'est à dire $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$.

Exemple 20 On a $\left(\frac{n+1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+2}{n}\right)$.

Définition 2.1.7 Le produit de (u_n) et (v_n) est la suite numérique dont le terme général est $u_n.v_n$, c'est à dire $(u_n) \cdot (v_n) = (u_n.v_n)$.

Exemple 21 On a $\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{n^2}\right)$.

Définition 2.1.8 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le produit de (u_n) par λ est la suite numérique dont le terme général est λu_n , c'est à dire $\lambda \cdot (u_n) = (\lambda.u_n)$.

Exemple 22 On a $4 \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(4\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{4n+4}{n}\right)$.

Définition 2.1.9 Si pour tout n on a $v_n \neq 0$ alors la dévision de (u_n) sur (v_n) est la suite numérique dont le terme général est $\frac{u_n}{v_n}$, c'est à dire $\frac{(u_n)}{(v_n)} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Exemple 23 On a $\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = (n+1)$.

Définition 2.1.10 Si pour tout n on a $u_n \neq 0$ alors l'inverse de la suite (u_n) est la suite numérique dont le terme général est $\frac{1}{u_n}$, c'est à dire $\frac{1}{(u_n)} = \left(\frac{1}{u_n}\right)$.

Exemple 24 On a $\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right) = (n)$.

2.1.2 Suites numériques de signe constant

Soit (u_n) une suite numérique.

Définition 2.1.11 On dit que (u_n) est positive si $u_n \geq 0$ pour tout n .

Exemple 25 On considère la suite numérique dont le terme général est $u_n = n^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = n^2 \geq 0$, alors (u_n) est positive.

Définition 2.1.12 On dit que (u_n) est strictement positive si $u_n > 0$ pour tout n .

Exemple 26 On considère la suite numérique dont le terme général est $u_n = n + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = n + 1 \geq 1 > 0$, alors (u_n) est strictement positive.

Définition 2.1.13 On dit que (u_n) est négative si $u_n \leq 0$ pour tout n .

Exemple 27 On considère la suite numérique dont le terme général est $u_n = -n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = -n \leq 0$, alors (u_n) est négative.

Définition 2.1.14 On dit que (u_n) est strictement négative si $u_n < 0$ pour tout n .

Exemple 28 On considère la suite numérique dont le terme général est $u_n = -\frac{1}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = -\frac{1}{n} < 0$, alors (u_n) est strictement négative.

Remarque 2.1.4 Ils existent des suites qui n'ont pas un signe constant. Par exemple, la suite $((-1)^n)$ n'a pas un signe constant. En effet, ils existent des termes positifs et d'autres négatifs.

2.1.3 Suites numériques bornées

Soit (u_n) une suite numérique.

Définition 2.1.15 On dit que (u_n) est majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n : u_n \leq M.$$

Exemple 29 On considère la suite numérique dont le terme général est $u_n = \frac{1}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \frac{1}{n} \leq 1$, alors (u_n) est majorée par 1.

Définition 2.1.16 On dit que (u_n) est minorée si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n : m \leq u_n.$$

Exemple 30 Soit $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \frac{1}{n} \geq 0$, alors (u_n) est minorée par 0.

Définition 2.1.17 On dit que (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée.

Exemple 31 Soit $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Cette suite est bornée car elle est majorée et minorée.

Remarque 2.1.5 La suite (u_n) est majorée si et seulement si l'ensemble de ces valeurs est majoré. La suite (u_n) est minorée si et seulement si l'ensemble de ces valeurs est minoré. La suite (u_n) est bornée si et seulement si l'ensemble de ces valeurs est borné (Pourquoi).

Lemme 2.1.1 Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. (u_n) est bornée.
2. $\exists M > 0, \forall n : |u_n| \leq M$.

Application

La suite $((-1)^n)$ est bornée car pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n| = |(-1)^n| = 1$. Donc, on peut prendre $M = 1$.

2.2 Suites numériques convergentes

Définition 2.2.1 Soit (u_n) une suite numérique et $l \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) converge vers l (ou tend vers l) quand n tend vers l'infini, et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \implies |u_n - l| < \varepsilon.$$

Remarque 2.2.1 Puisque

$$|u_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$$

alors la définition ci-dessus signifie que pour tout réel strictement positif ε il existe un entier N (rang) telle que tous les termes $u_N, u_{N+1}, u_{N+2}, \dots$ sont dans l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

Remarque 2.2.2 En général, on peut trouver N qui vérifie

$$n \geq N \implies |u_n - l| < \varepsilon$$

comme suit :

1. On essaye de trouver une fonction f telle que $|u_n - l| \leq f(n)$. (En général, $f(n) = \frac{k}{n^m}$ avec $k, m \geq 0$).
2. Puis établir l'équivalence

$$f(n) < \varepsilon \Leftrightarrow n > g(\varepsilon)$$

où g est une fonction appropriée.

3. Ainsi la solution est $N = \max(0, E(g(\varepsilon)) + 1)$.

Justification : Vérifions que $N = \max(0, E(g(\varepsilon)) + 1)$ vérifie

$$n \geq N \implies |u_n - l| < \varepsilon.$$

Soit $n \geq N = \max(0, E(g(\varepsilon)) + 1)$ alors $n \geq E(g(\varepsilon)) + 1$ car $\max(0, E(g(\varepsilon)) + 1) \geq E(g(\varepsilon)) + 1$, mais $E(g(\varepsilon)) + 1 > g(\varepsilon)$ alors $n > g(\varepsilon)$ si on utilise l'équivalence (b) on trouve $f(n) < \varepsilon$ mais, de (a), $|u_n - l| \leq f(n)$ alors $|u_n - l| < \varepsilon$.

Exemple 32 La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente vers zéro. En effet,

1. $|u_n - l| = \left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = f(n)$.
2. $f(n) = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} = g(\varepsilon)$.
3. $N = \max(0, E(g(\varepsilon)) + 1) = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1 \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Exemple 33 Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite constante (a) est convergente vers a . En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n - l| = |a - a| = 0$ donc $|u_n - l| = 0 < \varepsilon$ est vérifiée pour tout $n \geq 0$ alors $N = 0$ ce qui implique que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = 0, \forall n : n \geq 0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a = a$.

Définition 2.2.2 On dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \Rightarrow u_n > A.$$

Remarque 2.2.3 Cette définition signifie que pour tout réel strictement positif A il existe un entier N (rang) telle que tous les termes $u_N, u_{N+1}, u_{N+2}, \dots$ sont dans l'intervalle $]A, +\infty[$.

Exemple 34 On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$. En effet, si $n \geq E(A) + 1$ alors $n > A$ (car $E(A) + 1 > A$) donc $u_n = n > A$ alors $N = E(A) + 1$. Ce qui implique que

$$\forall A > 0, \exists N = E(A) + 1 \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \implies u_n = n > A.$$

Définition 2.2.3 On dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \implies u_n < -A.$$

Remarque 2.2.4 Cette définition signifie que pour tout réel strictement positif A il existe un entier N (rang) telle que tous les termes $u_N, u_{N+1}, u_{N+2}, \dots$ sont dans l'intervalle $]-\infty, -A[$.

Exemple 35 On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$. En effet, si $n \geq E(A) + 1$ alors $n > A$ donc $u_n = -n < -A$ donc $N = E(A) + 1$. Alors

$$\forall A > 0, \exists N = E(A) + 1 \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \implies u_n = -n < -A.$$

Définition 2.2.4 Une suite est dite convergente s'il existe $l \in \mathbb{R}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Exemple 36 Toute suite constante (a) est convergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} a = a \in \mathbb{R}$.

Définition 2.2.5 La suite numérique (u_n) est dite divergente si elle n'est pas convergente c'est à dire

$$\forall l \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n : n \geq N \wedge |u_n - l| \geq \varepsilon.$$

Exemple 37 La suite (n) est divergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \notin \mathbb{R}$.

Remarque 2.2.5 Il y'a deux types de divergence :

1. Divergence de type infini : suite qui a une limite infinie. Par exemple, la suite de terme général $u_n = n$.

2. Divergence de type limite n'existe pas : suite qui n'a pas de limite finie ou infinie.

Par exemple, la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'a pas une limite finie ou infinie. En effet,

(a) Elle n'a pas une limite finie. Par absurde, on suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = l \in \mathbb{R}$ alors pour $\varepsilon = \frac{1}{3}$ on trouve $N \in \mathbb{N}$ telle que si $n \geq N$ alors $u_n \in]l - \frac{1}{3}, l + \frac{1}{3}[$ donc $-1, 1 \in]l - \frac{1}{3}, l + \frac{1}{3}[$ ce qui représente une contradiction.

(b) Elle n'a pas une limite infinie. Par l'absurde, on suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = -\infty$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = +\infty$ pour $A = 1$ on trouve $N \in \mathbb{N}$ telle que si $n \geq N$ alors $u_n \in]A, +\infty[$ donc $-1 \in]A, +\infty[$ ce qui représente une contradiction.

De même, on obtient une contradiction dans le cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = -\infty$.

2.2.1 Propriétés des suites convergentes

Théorème 2.2.1 La limite d'une suite convergente est unique.

Preuve 12 On suppose que (u_n) admet deux limites différentes l_1 et l_2 . Alors pour $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2} > 0$ on a

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N_1 \implies |u_n - l_1| < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

et

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N_2 \implies |u_n - l_2| < \frac{|l_1 - l_2|}{2}.$$

Donc, si $n \geq \max(N_1, N_2)$ on trouve $|l_1 - l_2| = |(u_n - l_2) - (u_n - l_1)| \leq |u_n - l_2| + |u_n - l_1| < \frac{|l_1 - l_2|}{2} + \frac{|l_1 - l_2|}{2} = |l_1 - l_2|$, c'est à dire $|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$ ce qui représente une contradiction.

Théorème 2.2.2 Toute suite convergente est bornée.

Preuve 13 Soit (u_n) une suite convergente vers l alors pour $\varepsilon = 1$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $l - 1 < u_n < l + 1$ donc l'ensemble $\{u_N, u_{N+1}, \dots\}$ est borné.

D'autre part, l'ensemble $\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$ est borné (Pourquoi). Alors, l'ensemble des valeurs de la suite (u_n) donné par $\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, u_N, u_{N+1}, \dots\} = \{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\} \cup \{u_N, u_{N+1}, \dots\}$ est borné.

Remarque 2.2.6 La réciproque est fausse. En effet, il existent des suites bornées non convergentes. Par exemple, la suite $((-1)^n)$ est bornée mais elle n'est pas convergente.

2.2.2 Opérations algébriques sur les limites des suites

Théorème 2.2.3 Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

1. Si (u_n) et (v_n) sont convergentes, respectivement, vers l et l' . Alors $(u_n + v_n)$ et $(u_n \cdot v_n)$ sont convergentes, respectivement, vers $l + l'$ et $l \cdot l'$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La suite (λu_n) est convergente vers $\lambda \cdot l$.
3. On suppose que $u_n \neq 0$ pour tout n . Si (u_n) est convergente vers $l \neq 0$ alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est convergente vers $\frac{1}{l}$.
4. Si (u_n) est convergente vers l et (v_n) est une suite telle que $v_n \neq 0$ pour tout n , de plus, elle est convergente vers $l' \neq 0$ alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente vers $\frac{l}{l'}$.

Preuve 14 1. Au début, on remarque que $|(u_n + v_n) - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'|$. Soit $\varepsilon > 0$. Si on applique la définition de la convergence de (u_n) et de (v_n) sur $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ on trouve $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ telles que

$$\forall n : n \geq N_1 \implies |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\forall n : n \geq N_2 \implies |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$ et soit $n \in \mathbb{N}$ telle que $n \geq N$ alors $|(u_n + v_n) - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. C'est à dire, on a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \implies |(u_n + v_n) - (l + l')| < \varepsilon.$$

Ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$ alors $(u_n + v_n)$ est convergente vers $l + l'$.

Montrons que $(u_n.v_n)$ est convergente vers $l.l'$. Puisque (v_n) est convergente alors elle est bornée donc il existe $M > 0$ telle que $|v_n| \leq M$ pour tout n . D'autre part, pour tout n on a $u_n.v_n - l.l' = (u_n - l).v_n + (v_n - l')l$, alors

$$\begin{aligned} |u_n.v_n - l.l'| &= |(u_n - l).v_n + (v_n - l')l| \\ &\leq |u_n - l||v_n| + |l||v_n - l'| \leq M|u_n - l| + |l||v_n - l'|. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si on applique la définition de la convergence de (u_n) et de (v_n) , respectivement, sur $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M}$ et $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2|l|}$ on trouve $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ telles que

$$\forall n : n \geq N_1 \implies |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

et

$$\forall n : n \geq N_2 \implies |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2|l|}.$$

Si $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ alors $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$ d'où $|u_n.v_n - l.l'| < M\frac{\varepsilon}{2M} + |l|\frac{\varepsilon}{2|l|} = \varepsilon$. C'est à dire on a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \implies |u_n.v_n - l.l'| < \varepsilon.$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.v_n = l.l'$.

2. Pour montrer que (λu_n) est convergente vers $\lambda.l$, il suffit d'appliquer le résultat précédent sur la suite constante (v_n) définie par $v_n = \lambda$ pour tout n . Cette suite est convergente vers λ .

3. Au début, on remarque que $\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = \left| \frac{l - u_n}{lu_n} \right| = |u_n - l| \frac{1}{|l||u_n|}$. Mais si on applique la définition de la convergence de (u_n) sur $\varepsilon_1 = \frac{|l|}{2}$ on trouve $N_1 \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geq N_1$ on a $|u_n - l| < \frac{|l|}{2}$ mais $|l| - |u_n| = -(|u_n| - |l|) \leq ||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$,

alors si $n \geq N_1$ on a $|l| - |u_n| < |u_n - l| < \frac{|l|}{2}$, ce qui implique que $\frac{|l|}{2} < |u_n|$ donc $\frac{1}{|l||u_n|} < \frac{2}{|l|^2}$. Ceci implique que pour tout $n \geq N_1$ on a $\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = |u_n - l| \frac{1}{|l||u_n|} < |u_n - l| \frac{2}{|l|^2}$. Soit $\varepsilon > 0$, si on applique la définition de la convergence (u_n) sur $\varepsilon_2 = \frac{|l|^2 \varepsilon}{2}$ on trouve $N_2 \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geq N_2$ on a $|u_n - l| < \frac{|l|^2 \varepsilon}{2}$.

4. Si $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ alors $\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| < \frac{|l|^2 \varepsilon}{2} \frac{2}{|l|^2} = \varepsilon$. C'est à dire, on a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \implies \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| < \varepsilon,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$.

5. Il suffit de remarquer que $\frac{u_n}{v_n} = u_n \cdot \frac{1}{v_n}$ puis d'appliquer 1 et 2.

Proposition 2.2.1 1. Si (u_n) est une suite convergente et (v_n) est une suite divergente alors $(u_n + v_n)$ est divergente.

2. On suppose que $u_n \neq 0$ pour tout n en plus elle est convergente vers une limite non nulle. Si (v_n) est une suite divergente alors $(u_n \cdot v_n)$ est divergente.

3. Si (u_n) est une suite convergente vers zéro et (v_n) est une suite bornée alors $(u_n \cdot v_n)$ est convergente vers zéro.

Preuve 15 1. Par l'absurde, on suppose que $(u_n + v_n)$ est convergente. Puisque $v_n = (u_n + v_n) + (-1) \cdot u_n$. Alors, si on utilise le théorème précédent on trouve que (v_n) est convergente ce qui représente une contradiction avec (v_n) est divergente.

2. De même, on montre que $(u_n \cdot v_n)$ est divergente. (A faire).

3. (v_n) est une suite bornée alors il existe $M > 0$ telle que pour tout n on a $|v_n| \leq M$. On a $|u_n \cdot v_n - 0| = |u_n \cdot v_n| = |u_n| |v_n| < M |u_n|$. Soit $\varepsilon > 0$, si on applique la définition de la convergence de (u_n) sur $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$ on trouve $N \in \mathbb{N}$ telle que si $n \geq N$ on a $|u_n| = |u_n - 0| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$, alors $|u_n \cdot v_n - 0| < M |u_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$. C'est à dire, on a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |u_n \cdot v_n - 0| < \varepsilon,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \cdot v_n = 0$.

Applications

1. La suite $((-1)^n + \frac{1}{n+1})$ est divergente car c'est la somme d'une suite convergente $(\frac{1}{n+1})$ et une suite divergente $((-1)^n)$. La suite $((-1)^n (1 + \frac{1}{n}))$ est divergente car c'est le produit d'une suite divergente $((-1)^n)$ et une suite convergente $(1 + \frac{1}{n})$ qui vérifie $1 + \frac{1}{n} \neq 0$ pour tout n en plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1 \neq 0$.
2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ car $\frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \frac{1}{n}$, la suite $((-1)^n)$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Formes indéterminées

? signifie on ne peut rien dire.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = ?$
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = ?$
3. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n) = ?$
4. Soit (v_n) une suite telle que $v_n \neq 0$ pour tout n .
 - (a) Si (u_n) est une suite non nulle et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = ?$
 - (b) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = ?$

2.2.3 Critères de convergence et de divergence

Critère d'encadrement (de gendarmes)

Théorème 2.2.4 (*Critère d'encadrement (de gendarmes)*) Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites numériques telle que, à partir d'un certain rang, on a $v_n \leq u_n \leq w_n$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Preuve 16 Soit $\varepsilon > 0$ alors

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N_1 \implies |v_n - l| < \varepsilon \implies -\varepsilon < v_n - l < \varepsilon$$

et

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N_2 \implies |w_n - l| < \varepsilon \implies -\varepsilon < w_n - l < \varepsilon.$$

Puisque $v_n \leq u_n \leq w_n$ alors $v_n - l \leq u_n - l \leq w_n - l$. Donc si $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ alors $-\varepsilon < v_n - l \leq u_n - l \leq w_n - l < \varepsilon$ ce qui implique que $-\varepsilon < u_n - l < \varepsilon$ donc $|u_n - l| < \varepsilon$. C'est à dire, on a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \implies |u_n - l| < \varepsilon,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Application

Montrons que $\left(\frac{1}{n!}\right)$ est convergente vers zéro. Par récurrence, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $n! = 1.2 \dots (n-1)n \geq \underbrace{2.2 \dots 2}_{n-1} = \frac{1}{2}2^n$, donc $v_n = 0 \leq u_n = \frac{1}{n!} \leq w_n = 2\frac{1}{2^n}$. Mais, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ car (v_n) est la suite constante (0) convergente vers 0, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\frac{1}{2^n} = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2.0 = 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. D'après le théorème d'encadrement, la suite $\left(\frac{1}{n!}\right)$ est convergente vers zéro.

Critère des suites monotones

Définition 2.2.6 On dit que (u_n) est croissante si

$$\forall n \geq n_0 : u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

Exemple 38 On considère la suite numérique dont le terme général est $u_n = n^2 - 5n$. Pour tout $n \geq 2$, on a $u_{n+1} - u_n = (n^2 - 3n - 4) - (n^2 - 5n) = 2n - 4 \geq 0$, alors (u_n) est croissante.

Définition 2.2.7 On dit que (u_n) est strictement croissante si

$$\forall n \geq n_0 : u_{n+1} - u_n > 0.$$

Exemple 39 On considère la suite numérique dont le terme général est $u_n = n + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = (n + 2) - (n + 1) = 1 > 0$, alors (u_n) est strictement croissante.

Définition 2.2.8 On dit que (u_n) est décroissante si

$$\forall n \geq n_0 : u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

Exemple 40 On considère la suite numérique dont le terme général est $u_n = 5n - n^2$. Pour tout $n \geq 2$, on a $u_{n+1} - u_n = 4 - 2n \leq 0$, alors (u_n) est décroissante.

Définition 2.2.9 On dit que (u_n) est strictement décroissante si

$$\forall n \geq n_0 : u_{n+1} - u_n < 0.$$

Exemple 41 On considère la suite numérique dont le terme général est $u_n = \frac{1}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.

Définition 2.2.10 On dit que (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Exemple 42 La suite $(5n - n^2)$ est décroissante alors elle est monotone.

Définition 2.2.11 On dit que (u_n) est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple 43 La suite $(\frac{1}{n})$ est strictement décroissante alors elle est strictement monotone.

Remarque 2.2.7 Il existent des suites qui ne sont pas monotones. Par exemple, la suite $((-1)^n)$ n'est pas monotone.

Théorème 2.2.5 (*Critère des suites monotones*) Soit A l'ensemble des valeurs de la suite (u_n) .

1. Si (u_n) est croissante et majorée alors elle est convergente vers $\sup A$.
2. Si (u_n) est décroissante et minorée alors elle est convergente vers $\inf A$.

Critère des suites extraites (sous suites)

Définition 2.2.12 On dit que (n_k) est une suite des entiers positifs si pour tout k on a $n_k \in \mathbb{N}$.

Exemple 44 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $n_k = 2k \in \mathbb{N}$ alors (n_k) est une suite des entiers positifs.

Définition 2.2.13 La suite (u_{n_k}) est appelée une suite extraite (sous suite) de (u_n) si (n_k) est une suite des entiers positifs strictement croissante.

Exemple 45 (u_{2k}) , (u_{2k+1}) et (u_{3k}) sont des sous suites de (u_n) .

Définition 2.2.14 (u_{2k}) est appelée la suite des termes paires et (u_{2k+1}) la suite des termes impaires.

Théorème 2.2.6 (*Bolzano Weierstrass*)

Toute suite bornée possède une suite extraite convergente.

Théorème 2.2.7 (*Critère des suites extraites*)

La suite (u_n) est convergente vers l si et seulement si toutes les suites extraites de (u_n) sont convergentes vers la même limite l .

Proposition 2.2.2 (*Critères de divergence*)

1. Si la suite (u_n) possède une suite extraite divergente alors (u_n) est divergente.
2. Si la suite (u_n) possède deux suites extraites convergentes vers deux limites différentes alors (u_n) est divergente.

Application

1. La suite $((-1)^n n)$ est divergente car elle possède une suite extraite divergente qui est la suite $(u_{2k}) = (2k)$. En effet, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{2k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 2k = +\infty$.
2. La suite $((-1)^n)$ est divergente car elle possède deux sous suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) convergentes vers deux limites différentes 1 et -1 . En effet, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{2k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (-1)^{2k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (-1)^{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (-1) = -1$.

Proposition 2.2.3 (*Critères de convergence*)

1. La suite (u_n) est convergente vers l si et seulement si (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont convergentes vers la même limite l .
2. La suite (u_n) est convergente vers l si et seulement si (u_{3k}) , (u_{3k+1}) et (u_{3k+2}) sont convergentes vers la même limite l .

Remarque 2.2.8 Le résultat de cette proposition signifie que la convergence de (u_{2k}) et (u_{2k+1}) (ou de (u_{3k}) , (u_{3k+1}) et (u_{3k+2})) vers la même limite l est suffisante pour la convergence de toutes les suites extraites de (u_n) vers la même limite l .

Critère des suites adjacentes

Définition 2.2.15 On dit que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes si l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence est une suite convergente vers zéro.

Exemple 46 Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et posons $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$. On a

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0,$$

alors (u_n) est croissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right) = (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{(n+1)n!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{n+1} - 1\right) \leq 0 \text{ car } \frac{2}{n+1} - 1 \leq 0, \end{aligned}$$

alors (v_n) est décroissante.

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0.$$

Alors (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

Théorème 2.2.8 (*Critère des suites adjacentes*)

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles sont convergentes vers la même limite.

Application

Puisque les deux suites (u_n) et (v_n) définies dans l'exemple précédent sont adjacentes alors elles sont convergentes vers la même limite.

Critère de Cauchy

Définition 2.2.16 *On dit que la suite (u_n) est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q : p, q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Remarque 2.2.9 *Si on suppose que $q \geq p$ alors $q = p + n$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors (2.1) est équivalente à*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} : p \geq N \Rightarrow |u_{p+n} - u_p| < \varepsilon.$$

Exemple 47 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\begin{aligned} |u_{p+n} - u_p| &= \left| \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{(p+n)^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{p^2} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{(p+1)^2} + \dots + \frac{1}{(p+n)^2} \right| = \frac{1}{(p+1)^2} + \dots + \frac{1}{(p+n)^2}. \end{aligned}$$

Mais $\frac{1}{(p+1)^2} < \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$. De même,

$$\frac{1}{(p+2)^2} < \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}, \dots, \frac{1}{(p+n)^2} < \frac{1}{p+n-1} - \frac{1}{p+n}.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p+1)^2} + \dots + \frac{1}{(p+n)^2} &< \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{p+n-1} - \frac{1}{p+n} \right) \\ &< \frac{1}{p} - \frac{1}{p+n} < \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $p, n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u_{p+n} - u_p| < \frac{1}{p}$. Mais $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} = 0$ alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : p \geq N \implies \frac{1}{p} = \left| \frac{1}{p} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Ce qui implique que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} : p \geq N \implies |u_{p+n} - u_p| < \frac{1}{p} < \varepsilon,$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} : p \geq N \implies |u_{p+n} - u_p| < \varepsilon.$$

Donc, (u_n) est une suite de Cauchy.

Théorème 2.2.9 (*Critère de Cauchy*)

Soit (u_n) une suite numérique. (u_n) est convergente si et seulement si elle est une suite de Cauchy.

Application La suite considérée dans l'exemple précédent est convergente car c'est une suite de Cauchy.

Proposition 2.2.4 (*Critère de divergence*)

Si (u_n) n'est pas une suite de Cauchy alors elle n'est pas convergente.

Preuve 17 Il suffit de remarquer que le résultat de cette conséquence représente la contraposé de l'implication :

$$(u_n) \text{ est convergente} \implies (u_n) \text{ est Cauchy.}$$

2.2.4 Les suites récurrentes

Définition 2.2.17 Une suite récurrente est une suite qui est déterminée en donnant le premier terme u_{n_0} où $n_0 \in \mathbb{N}$ et u_{n+1} en terme de u_n :
$$\begin{cases} \text{Premier terme } u_{n_0}, \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \geq n_0. \end{cases}$$
 Où f est une fonction définie sur un ensemble D qui vérifie $f(D) \subset D$.

Lemme 2.2.1 Si f est continue sur D (Voir la définition de la continuité dans le chapitre 3) et (u_n) est convergente vers $l \in D$ alors l vérifie l'équation $f(l) = l$.

Application On considère la suite
$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \frac{7u_n+4}{3u_n+3} \text{ pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$
 La fonction f définie par $f(x) = \frac{7x+4}{3x+3}$ est continue sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 2$. En effet, par récurrence :

(a) On a $0 \leq u_0 = 0 \leq 2$, donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

(b) On suppose que $0 \leq u_n \leq 2$ alors d'une part $7u_n + 4 \geq 0$ et $3u_n + 3 > 0$ ce qui implique que $u_{n+1} = \frac{7u_n+4}{3u_n+3} \geq 0$. D'autre part, puisque $u_n \leq 2$ c.à.d. $(7-6)u_n \leq (6-4)$ alors $7u_n + 4 \leq 2(3u_n + 3)$ d'où $u_{n+1} = \frac{7u_n+4}{3u_n+3} \leq 2$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7u_n + 4}{3u_n + 3} - u_n = \frac{4u_n + 4 - 3u_n^2}{3u_n + 3} = \frac{-(u_n - 2)(3u_n + 2)}{3u_n + 3} \geq 0,$$

car $u_n - 2 \leq 0$ et $\frac{(3u_n+2)}{3u_n+3} \geq 0$. Ceci implique que (u_n) est croissante.

Alors la suite (u_n) est croissante et majorée par 2 alors, d'après le critère des suites monotones, on trouve que (u_n) est convergente vers l . Puisque f est continue car c'est la dévision de deux fonctions polynômes dont le doniminateur est non nul alors l vérifie l'équation $l = f(l) = \frac{7l+4}{3l+3}$ c. à. d. $3l^2 - 4l - 4 = 0$ d'où $l = 2$ ou $l = \frac{-2}{3}$. Mais $0 \leq u_n \leq 2$ alors $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \leq 2$, donc, la solution acceptée est $l = 2$, c. à d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

2.3 Exercices

Exercice 1 (Suites fractionnaires)

1. En utilisant la définition, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la suite $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ est convergente vers 0 et (n^k) est divergente.
2. Soient $k, l \in \mathbb{N}^*$, a_0, a_1, \dots, a_k et b_0, b_1, \dots, b_l des nombres réels (avec $a_k \cdot b_l \neq 0$). On pose $u_n = \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_1 n + b_0}$, pour tout $n > n_0$ où n_0 est le maximum de l'ensemble des racines du polynôme $b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_1 n + b_0$.
Montrer que la suite (u_n) a la même nature que la suite $\left(\frac{a_k}{b_l} n^{k-l}\right)$.
(Rappel : La nature d'une suite est la convergence ou la divergence de cette suite.)
3. Que peut on déduire.
4. Application : Calculer la limite des suites $\left(\frac{2n^2+1}{n+2}\right)$, $\left(\frac{n^2+n+3}{3n^2+n}\right)$, $\left(\frac{n^2+2n+4}{2n^3+2n^2+1}\right)$.

Exercice 2 (Suites convergentes)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \frac{2n+1}{n}$.

1. Montrer, en utilisant la définition, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.
2. Est ce que la suite (u_n) est convergente. (Justifier)
3. Utiliser d'autre méthode pour démontrer le résultat de la question 1.

Solution 2

1. On a

$$(a) \quad |u_n - 2| = \left| \frac{2n+1}{n} - 2 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} = f(n).$$

$$(b) \quad f(n) = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} = g(\varepsilon).$$

$$(c) \quad \text{Donc } N = \max\left(0, E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1\right) = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1.$$

Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1 \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \implies |u_n - 2| < \varepsilon.$$

2. Oui, cette suite est convergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \in \mathbb{R}$.
3. On a $u_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$, alors (u_n) est convergente car c'est la somme de deux suites convergentes (2) et $(\frac{1}{n})$. En plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$.

Exercice 3 (Suites géométriques)

1. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \neq 0$ pour tout n , en plus, elle est convergente vers zéro. Montrer que $(\frac{1}{u_n})$ est divergente.

Formuler ce résultat littérairement.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Montre que si $|a| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$.

(Indication : Distinguer deux cas $a = 0$ et $a \neq 0$ dans le deuxième cas utiliser la définition de la convergence et la relation $\alpha^\beta = e^{\beta \ln \alpha}$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$.)

Formuler ce résultat littérairement.

- (b) On suppose que $|a| > 1$. Posons $b = \frac{1}{a}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = 0$, puis déduire que (a^n) est divergente.

- (c) Etudier la nature de (a^n) dans le cas où $|a| = 1$.

- (d) Application : Etudier la nature des suites (2^n) , $((-3)^n)$, $(\frac{1}{2^n})$, $(\frac{(-1)^n}{3^n})$.

Solution 3

1. Par l'absurde, on suppose que $(\frac{1}{u_n})$ est convergente vers l . On a $1 = \frac{1}{u_n} \cdot u_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{u_n} \cdot u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \cdot 0 = 0$. Ceci est une contradiction car la suite constante (1) est convergente vers 1.

Le résultat de cette partie veut dire que l'inverse d'une suite, dont ses termes sont non nuls et elle est convergente vers zéro, est une suite divergente.

2.a Si $a = 0$ alors $a^n = 0$ pour tout $n \geq 1$, dans ce cas la suite (a^n) représente la suite constante (0) , elle est convergente vers 0.

Si $a \neq 0$ alors $0 \neq |a| < 1$. On a

$$(a) \quad |u_n - 0| = |a^n| = |a|^n = e^{n \ln |a|} = f(n).$$

$$(b) \quad f(n) < \varepsilon \iff n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |a|} = \ln(\varepsilon - |a|) = g(\varepsilon)$$

$$(c) \quad \text{Alors } N = \max(0, E(\ln(\varepsilon - |a|)) + 1).$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \max(0, E(\ln(\varepsilon - |a|)) + 1) \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \implies |a^n - 0| < \varepsilon.$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$.

Le résultat de cette partie veut dire que la suite géométrique, dont la valeur absolue de la base est strictement inférieure à un, est une suite convergente vers zéro.

2.b On a $|b| = \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} < 1$ car $|a| > 1$ alors (b^n) est une suite géométrique de base b qui vérifie $|b| < 1$ alors d'après la question (2.a) on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = 0$.

On a $a^n = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = \frac{1}{b^n}$ alors (a^n) est l'inverse de la suite (b^n) telles que $b^n \neq 0$ pour tout n en plus, elle est convergente vers zéro (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = 0$) alors d'après la question 1 on trouve que (a^n) est divergente.

2.c Si $|a| = 1$ alors $a = 1$ ou $a = -1$. Si $a = 1$ alors $a^n = 1^n = 1$ dans ce cas (a^n) est la suite constante (1) et elle est convergente vers 1. Si $a = -1$ alors $a^n = (-1)^n$ dans ce cas (a^n) est une suite divergente car elle possède deux sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergentes vers deux limites différentes.

2.d On a $|2| = 2 > 1$ alors (2^n) est une suite divergente.

On a $|-3| = 3 > 1$ alors $((-3)^n)$ est une suite divergente.

On a $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, alors $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est une suite convergente vers zéro.

On a $\frac{(-1)^n}{3^n} = \left(\frac{-1}{3}\right)^n$ et $\left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$, alors $\left(\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$ est une suite convergente vers zéro.

Exercice 4 (Signe de la suite convergente et de sa limite)

1. Montrer que si la suite convergente (u_n) est positive alors sa limite est positive.
2. Montrer que si (u_n) est une suite convergente vers une limite l strictement positive alors les termes u_n sont strictement positifs à partir d'un certain rang N .
3. Dédurre des résultats analogues dans la cas négatif. (*Indication : Utiliser la relation entre le positif et le négatif*)

A retenir : Il se peut qu'on démontre un résultat dans le cas négatif (respectivement dans le cas positif) puis, en utilisant la relation entre le positif et le négatif, on déduit le résultat analogue dans le cas positif (respectivement dans le cas négatif).

4. Que peut on dire sur le signe d'une suite convergente vers zéro.
(*Indication : Considérer la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.*)
5. *Application :*
 - (a) Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers l et l' , en plus on suppose que pour tout n on a $u_n \leq v_n$. Montrer que $l \leq l'$.
 - (b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \leq b$). Si (u_n) est une suite convergente vers l et $a \leq u_n \leq b$ pour tout n . Montrer que $a \leq l \leq b$.

Solution 4

1. (u_n) est convergente alors il existe $l \in \mathbb{R}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. On veut démontrer que si (u_n) est positive alors l est positive. Par l'absurde, si $l < 0$ alors on applique la définition de la convergence sur $\varepsilon = \frac{-l}{2} > 0$ pour trouver $N \in \mathbb{N}$ telle que si $n \geq N$ alors $l - \frac{-l}{2} < u_n < l + \frac{-l}{2}$ alors $u_n < l + \frac{-l}{2} = \frac{l}{2} < 0$ donc $u_n < 0$ ceci est une contradiction avec (u_n) est positive.
2. Puisque (u_n) est convergente vers $l > 0$ alors si on applique la définition de la convergence sur $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$ on trouve un rang $N \in \mathbb{N}$ telle que si $n \geq N$ on a

$\frac{-l}{2} < u_n - l < \frac{l}{2}$ alors $0 < \frac{l}{2} = l - \frac{l}{2} < u_n$ donc les termes u_n sont positifs à partir du rang N .

3. Posons $v_n = -u_n$ pour tout n .

Si (u_n) est une suite négative convergente vers l alors (v_n) est une suite positive convergente vers $(-l)$. D'après la question 1 on trouve que $(-l)$ est positive donc l est négative.

Si maintenant (u_n) est convergente vers $l < 0$ alors (v_n) est une suite convergente vers $(-l) > 0$. D'après la question 2 on trouve que (v_n) est positive à partir d'un certain rang N donc (u_n) est négative à partir du même rang N .

4. On ne peut rien dire sur le signe d'une suite convergente vers zéro. En effet, si on considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, elle représente le produit d'une suite bornée et une suite convergente vers zéro, donc elle est convergente vers zéro mais elle n'a pas un signe constant car elle contient des termes positifs et des termes négatifs.

5.a Pour tout n on a $u_n \leq v_n$ alors $(v_n - u_n)$ est une suite positive en plus elle est convergente vers $l' - l$. D'après la question 1 on trouve $l' - l \geq 0$ alors $l \leq l'$.

5.b Puisque $a \leq u_n \leq b$, pour tout n , alors les deux suites $(u_n - a)$ et $(b - u_n)$ sont positives en plus elles sont convergentes respectivement vers $l - a$ et $b - l$ alors d'après la question 1 on trouve $l - a \geq 0$ et $b - l \geq 0$, d'où $a \leq l \leq b$.

Exercice 5 (Un critère de divergence)

On suppose que $u_n \leq v_n$ pour tout n .

1. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Si (u_n) est convergente ou elle est divergente de type limite n'existe pas que peut on dire sur la nature de (v_n) .

2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ que peut on dire sur la nature de (u_n) .

Si (v_n) est convergente ou elle est divergente de type limite n'existe pas que peut on dire sur la nature de (u_n) .

Solution 5

1. Soit $A > 0$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que si $n \geq N$ on a $u_n > A$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
Mais $u_n \leq v_n$ alors $v_n > A$. C'est à dire, on a démontré que

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \implies v_n > A,$$

ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Si (u_n) est convergente alors on ne peut rien dire sur la nature de (v_n) . En effet, on considère la suite $(u_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ qui est convergente vers 0 et

- (a) $\frac{(-1)^n}{n} \leq n$ mais la suite (n) est divergente.
- (b) $\frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ mais la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente vers 0.

Aussi, si (u_n) est divergente de type limite n'existe pas alors on ne peut rien dire sur la nature de (v_n) . En effet, on considère la suite $(u_n) = ((-1)^n)$ qui est divergente de type limite n'existe pas et

- (a) $(-1)^n \leq n$ mais la suite (n) est divergente.
- (b) $(-1)^n \leq 2$ mais la suite (2) est convergente vers 2.

2. Puisque $u_n \leq v_n$ pour tout n alors $(-v_n) \leq (-u_n)$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-v_n) = -\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ d'après la question 1 on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -(-u_n) = -\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = -\infty$. Comme dans la question 1, on peut construire des exemples convenables pour démontrer que si (v_n) est convergente ou elle est divergente de type limite n'existe pas alors on ne peut rien dire sur la nature de (u_n) .

Exercice 6 (Suite valeur absolue)

1. Montrer que

$$[\text{La convergence de } (u_n) \text{ vers } l] \implies [\text{La convergence de } (|u_n|) \text{ vers } |l|].$$

2. Considérons les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = (-1)^n$ et $w_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n}$.

(a) Etudier la nature de (v_n) , (w_n) et de $(|v_n|)$ et de $(|w_n|)$.

(b) Que peut on déduire.

3. On suppose que $(|u_n|)$ est convergente vers 0.

(a) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers 0.

(Indication : Utiliser le critère d'encadrement et la propriété $-|x| \leq x \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$)

(b) Que peut on déduire.

(c) Application : Etudier la nature de la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

4. Montrer que si $(|u_n|)$ est divergente alors (u_n) est divergente. (Indication : Utiliser la relation entre ce résultat et celui de la question 1)

A retenir : Si on a un résultat sous forme d'une implication $P \implies Q$ alors

1. **Sa contraposée $\overline{Q} \implies \overline{P}$ est vraie.**

2. **On se pose la question : Est ce que son inverse $Q \implies P$ est vrai.**

Solution 6

1. Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que si $n \geq N$ on a $|u_n - l| < \varepsilon$ mais $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$ alors $||u_n| - |l|| < \varepsilon$. Donc on a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \implies ||u_n| - |l|| < \varepsilon,$$

ce qui implique que $(|u_n|)$ est convergente vers $|l|$.

2.a On a

(a) i. $|v_n| = |(-1)^n| = 1$ alors la suite $(|v_n|)$ **est convergente** car c'est la suite constante (1). Mais la suite (v_n) **est divergente** car elle possède deux sous suites convergentes vers deux limites différentes.

ii. On peut vérifier que $(|w_n|)$ **est convergente** et (w_n) **est aussi convergente**.

2.b Si la suite valeur absolue $(|u_n|)$ est convergente alors on ne peut rien dire sur la suite (u_n) .

3.a On a $w_n = -|u_n| \leq u_n \leq |u_n| = v_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -|u_n| = -\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, alors, d'après le critère d'encadrement, on trouve que (u_n) est convergente vers 0.

3.b On déduit que si la suite valeur absolue $(|u_n|)$ **est convergente vers zéro** alors la suite (u_n) est aussi convergente vers zéro.

3.c Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n} \right)$ est convergente vers 0.

4 Puisque l'implication de la question 1 est vraie alors sa contraposée est vraie c'est à dire

$$\overline{[(|u_n|) \text{ est convergente vers } |l|]} \implies \overline{[(u_n) \text{ est convergente vers } l]},$$

est vraie, alors

$$[(|u_n|) \text{ est divergente}] \implies [(u_n) \text{ est divergente}].$$

Exercice 7 (Critère de convergence)

Soit (u_n) une suite dont tous ces termes sont non nuls et tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L$.

1. Montrer que si $L < 1$ alors (u_n) est convergente vers 0.

2. Montrer que si $L > 1$ alors (u_n) est divergente.

3. Que peut on dire si $L = 1$.

4. *Application* : Etudier la nature des suites $\left(\frac{a^n}{n^p}\right), \left(\frac{a^n}{n!}\right), \left(\frac{n!}{(2n)!}\right)$ avec $a, p \in \mathbb{R}$.

Solution 7

Au début, on signe que $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ est convergente vers L alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n, n \geq N \Rightarrow \left| \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - L \right| < \varepsilon,$$

mais $\left| \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - L \right| < \varepsilon$ implique que $L - \varepsilon < \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < L + \varepsilon$ c.à.d. $(L - \varepsilon) |u_n| < |u_{n+1}| < (L + \varepsilon) |u_n|$, d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n, n \geq N \Rightarrow (L - \varepsilon) |u_n| < |u_{n+1}| < (L + \varepsilon) |u_n|, \quad (3)$$

1. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L < 1$ alors $1 - L > 0$. Prenons la deuxième inégalité de (3) pour obtenir : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\text{pour tout } n \geq N, \quad |u_{n+1}| < (L + \varepsilon) |u_n|. \quad (4)$$

Puisque $n \geq n - 1 \geq n - 2 \geq \dots \geq N + 1 \geq N$ alors de (4) on obtient $|u_n| < (L + \varepsilon) |u_{n-1}|, |u_{n-1}| < (L + \varepsilon) |u_{n-2}|, \dots, |u_{N+1}| < (L + \varepsilon) |u_N|$, d'où $|u_n| < (L + \varepsilon) |u_{n-1}| < (L + \varepsilon)^2 |u_{n-2}| < \dots < (L + \varepsilon)^{n-N} |u_N| = (L + \varepsilon)^n \left[(L + \varepsilon)^{-N} |u_N| \right]$, c.à.d.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n, n \geq N \Rightarrow 0 < |u_n| < (L + \varepsilon)^n \left[(L + \varepsilon)^{-N} |u_N| \right]. \quad (5)$$

On a $v_n = (L + \varepsilon)^n \left[(L + \varepsilon)^{-N} |u_N| \right]$ est le terme général d'une suite donnée par un paramètre ε , elle représente le produit de deux suites : la suite géométrique $((L + \varepsilon)^n)$ et la suite constante $\left((L + \varepsilon)^{-N} |u_N| \right)$. D'après (5), pour que $(|u_n|)$ soit convergente vers 0 il suffit que (v_n) soit convergente vers 0 (d'après le théorème d'encadrement). Donc, on choisit ε de facons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (L + \varepsilon)^n = 0$ c. à d. $L + \varepsilon =$

$|L + \varepsilon| < 1$ c. à d. $\varepsilon < 1 - L$ et ce choix est possible ; exemple $\varepsilon = \frac{1-L}{2} > 0$.

2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L > 1$ alors $L - 1 > 0$. En utilisant la même idée que dans (1) mais cette fois ci avec la première inégalité de (3) on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n, n \geq N \Rightarrow (L - \varepsilon)^n \left((L - \varepsilon)^{-N} |u_N| \right) < |u_n| \quad (5)$$

On choisit ε de facons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(L - \varepsilon)^n \left((L - \varepsilon)^{-N} |u_N| \right) \right] = +\infty$ c.à d. satisfait $|L - \varepsilon| > 1$ pour cela il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$. Avec ce choix de ε on a

$$\forall n, n \geq N : v_n < |u_n|$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ ce qui implique que $(|u_n|)$ est divergente, d'où le résultat.

3. Si $L = 1$ on ne peut rien dire sur la convergence de la suite (u_n) . En effet, on considère trois suites tels que $L = 1$ mais ils ont des résultats différents de convergence :

Si on prend $u_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, cette suite est convergente vers 1.

Si on prend $u_n = (-1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, cette suite n'a pas de limite.

Si on prend $u_n = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, cette suite est divergente de type infini.

Exercice 8 (Suites adjacentes 1)

En utilisant le critère des suites adjacentes, montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 + \frac{1}{n+1}$ et $v_n = 3 - \frac{1}{(n+1)^2}$ sont convergentes vers la même limite.

Solution 8

Pour tout n on a $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} \leq 0$, $v_{n+1} - v_n = \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} \geq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) = 0$ alors (u_n) est décroissante, (v_n) est croissante et leur différence est une suite convergente vers zéro, donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes. D'après le critère des suites adjacentes, on déduit qu'elles sont convergentes vers la même limite.

Exercice 9 (Suites adjacentes 2)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies comme suit
$$\begin{cases} u_1 = 1 \text{ et } v_1 = 12, \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. On pose $w_n = v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ecrire w_{n+1} en terme de w_n puis déduire le signe et la nature de (w_n) .
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.
3. On pose $t_n = 3u_n + 8v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ecrire t_{n+1} en terme de t_n puis déduire la nature de (t_n) .
4. Trouver la limite de (u_n) et (v_n) .

Exercice 10 (Application du critère des suites monotones)

1. Soit A l'ensemble des valeurs d'une suite croissante majorée $(u_n)_{n \geq n_0}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

Montrer que $\sup A = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\inf A = u_{n_0}$.

Application : Soit $A = \{2 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Trouver $\sup A$ et $\inf A$ s'ils existent.

2. Enoncer un résultat analogue sur les suites décroissantes minorées.
3. Est ce qu'on peut utiliser cette méthode pour calculer $\sup \{\cos n : n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\inf \{\cos n : n \in \mathbb{N}^*\}$ (Justifier)

Solution 10

1. Puisque $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite croissante majorée alors d'après le critère des suites monotones on trouve qu'elle est convergente vers $\sup A$ c. à dire $\sup A = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
On a $\inf A = u_{n_0}$. En effet, (u_n) est croissante alors pour tout n on a $u_{n_0} \leq u_n$ ce qui implique que u_{n_0} est un minorant de A et il appartient à A , donc $\inf A = \min A = u_{n_0}$.

On remarque que $A = \{2 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ représente l'ensemble des valeurs de la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 0$ par $u_n = 2 - \frac{1}{n+1}$. Cette suite est croissante car

pour tout n on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0$ et elle est majorée par 2 car pour tout n on a $u_n = 2 - \frac{1}{n+1} \leq 2$, donc $\sup A = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - \frac{1}{n+1}) = 2$ et $\inf A = u_0 = 1$.

2. On montre de même que si A est l'ensemble des valeurs d'une suite décroissante minorée $(u_n)_{n \geq n_0}$ alors $\sup A = u_{n_0}$ et $\inf A = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 11 (Suite récurrente 1)

On considère la suite (u_n) définie comme suit :
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + \sqrt{1 + u_n^2}}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer que (u_n) est positive puis calculer sa limite si elle existe.

Exercice 12 (Suites récurrentes 2)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies comme suit

$$\begin{cases} u_0 = a \text{ et } v_0 = b & (1 < a < b) \\ \forall n \geq 1 : u_{n+1} = \frac{1}{2} (u_n + \sqrt{v_n}) & \dots\dots\dots (*) \\ \forall n \geq 1 : v_{n+1} = \frac{1}{2} (v_n + \sqrt{u_n}) & \dots\dots\dots (**) \end{cases}$$

1. Montrer que

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : (u_n > 1 \wedge v_n > 1)$. (Remarquer que cette proposition est sous la forme $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$)

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : (u_n - v_n^2 < 0)$. (Rappelons que si $\alpha > 1$ alors $\alpha^2 > \alpha$.)

2. Montrer que (v_n) est monotone puis déduire sa convergence.

3. En utilisant $(**)$, trouver u_n en terme de v_n et v_{n+1} puis déduire la convergence de (u_n) .

4. En utilisant $(*)$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

Exercice 13 (Suite récurrente 3)

On considère la suite récurrente (u_n) suivante $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(a - u_n^2) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \sqrt{a} - u_n$ et $y_n = \sqrt{a} + u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \geq 0$ et $y_n \geq 0$. Puis déduire que (u_n) est monotone.
3. Montrer que (u_n) est convergente puis calculer sa limite.

Exercice 14 (Critère de Cauchy)

Soit $0 < \alpha < 1$. On considère la suite (u_n) qui vérifie $|u_{n+1} - u_n| \leq \alpha |u_n - u_{n-1}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $|u_n - u_{n-1}| \leq \alpha^{n-1} |u_1 - u_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $|u_{p+n} - u_p| \leq \alpha^p \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} |u_1 - u_0|$ pour tout $p, n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déduire que (u_n) est une suite convergente.

Exercice 15 (Critère de Cauchy)

1. Donner la définition mathématique d'une suite qui n'est pas une suite de Cauchy.
2. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ n'est pas une suite de Cauchy.

(Indication : Montrer que pour tout $N \geq 1$ on a $u_{2N} - u_N \geq \frac{1}{2}$.)

Solution 15

1. On a

$$\begin{aligned}
 [(u_n) \text{ n'est pas une suite de Cauchy}] &\iff \overline{[(u_n) \text{ est une suite de Cauchy}]} \\
 &\iff \overline{[\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p, q : p, q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon]} \\
 &\iff [\exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists p, q : (p, q \geq N) \wedge (|u_p - u_q| \geq \varepsilon)].
 \end{aligned}$$

2. Montrons par récurrence que pour tout $N \geq 1$ on a $u_{2N} - u_N \geq \frac{1}{2}$.

(a) Pour $N = 1$ on a $u_{2N} - u_N = u_2 - u_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$.

(b) On suppose que $u_{2N} - u_N \geq \frac{1}{2}$ et on montre que $u_{2(N+1)} - u_{N+1} \geq \frac{1}{2}$. Puisque

$$\begin{aligned}
 & u_{2(N+1)} - u_{N+1} \\
 = & \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2(N+1)}\right) \\
 & - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\right) \\
 = & (u_{2N} - u_N) + \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{N+1} \\
 = & (u_{2N} - u_N) + \frac{1}{2(N+1)(2N+1)} \\
 \geq & u_{2N} - u_N \stackrel{\text{hyp. réc.}}{\geq} \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

On a démontré que

$$\forall N \in \mathbb{N}^* : u_{2N} - u_N \geq \frac{1}{2}.$$

Ce qui implique que (u_n) n'est pas une suite de Cauchy. En effet, on pose $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ on pose $p = 2N$ et $q = N$ on a $p = 2N \geq N$ et $q = N \geq N$. En plus,

$$|u_p - u_q| = |u_{2N} - u_N| = u_{2N} - u_N \geq \frac{1}{2} = \varepsilon. \text{ Alors}$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0, \forall N, \exists p = 2N, q = N : (p, q \geq N) \wedge \left(|u_p - u_q| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon\right).$$

Exercice 16 (Nature des suites)

Etudier la nature des suites suivantes :

1. La suite définie par $u_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 3k, \\ \frac{1}{n} & \text{si } n = 3k + 1, \\ \frac{1}{n+3} & \text{si } n = 3k + 2. \end{cases}$
2. La suite définie par $v_n = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1}{n^2+1} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

3. Les suites $(\cos n\pi)$, $(\frac{\cos n}{n+1})$, $((-1)^n (\frac{\cos n}{n+1} + 1))$, $(\frac{\cos n}{n+1} + \frac{\sin n}{n^2+1})$ et $((-1)^n + \frac{\cos n}{n+1})$.

Solution 16

1. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = +\infty$ alors (u_n) possède une sous suite (u_{3n}) qui est divergente, d'où (u_n) est divergente.
2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(2n)+1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2n+1)^2+1} = 0$ alors (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont convergentes vers la même limite 0 donc (u_n) est convergente vers zéro.
3. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(2n\pi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos((2n+1)\pi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 = -1$ alors les suites de termes pairs et impairs sont convergentes vers deux limites différentes donc $(\cos n\pi)$ est divergente.

La suite $(\frac{\cos n}{n+1})$ est une suite convergente vers 0 car c'est le produit de la suite bornée $(\cos n)$ (car pour tout n on a $|\cos n| \leq 1$) et la suite $(\frac{1}{n+1})$ qui est convergente vers zéro.

La suite $((-1)^n (\frac{\cos n}{n+1} + 1))$ est une suite divergente car c'est le produit de la suite divergente $((-1)^n)$ et la suite $(\frac{\cos n}{n+1} + 1)$ qui est convergente vers une limite non nulle.

La suite $(\frac{\cos n}{n+1} + \frac{\sin n}{n^2+1})$ est convergente vers zéro car c'est la somme de deux suites $(\frac{\cos n}{n+1})$ et $(\frac{\sin n}{n^2+1})$ convergentes vers zéro.

La suite $((-1)^n + \frac{\cos n}{n+1})$ est une suite divergente car c'est la somme de la suite divergente $((-1)^n)$ et la suite convergente $(\frac{\cos n}{n+1})$.

Exercice 17 (Nature des suites)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telle que $u_n = (-1)^n v_n$. Que peut on dire sur la nature de (u_n) dans chaque des cas suivants (avec justification) : (*Indication : Dans 3 et 4, considérer les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .*)

1. (v_n) est une suite convergente vers zéro.
2. (v_n) est une suite convergente vers $l \neq 0$.

3. (v_n) est une suite divergente de type limite n'existe pas.
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Chapitre 3

Fonctions numériques d'une variable réelle

3.1 Limite de fonctions

Définition 3.1.1 Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et V un ensemble non vide de \mathbb{R} . On dit que V est un voisinage de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ telle que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset V$.

Exemple 48 Si $x_0 = 3$ alors $V = [1, 4[\cup \{5\}$ est un voisinage de 3 car pour $\alpha = \frac{1}{2} > 0$ on a $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[=]3 - \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{2}[=]\frac{5}{2}, \frac{7}{2}[\subset [1, 4[\cup \{5\} = V$.

3.1.1 Limite finie d'une fonction en un point

Dans tout ce qui suit, $x_0 \in \mathbb{R}$ et V un voisinage de x_0 .

Définition 3.1.2 Soient f une fonction définie sur $V - \{x_0\}$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet une limite l au point x_0 , et on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in V : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Remarque 3.1.1 1. $0 < |x - x_0|$ veut dire $x \neq x_0$ donc on s'intéresse à la valeur de $f(x)$ quand x s'approche de x_0 sans qu'il prenne la valeur x_0 . Plus précisément, on s'intéresse à $\lim_{x \xrightarrow{x \neq x_0} x_0} f(x)$.

2. $|x - x_0| < \delta$ veut dire $-\delta < x - x_0 < \delta$ donc $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Exemple 49 (Fonction élémentaire)

Soit $C \in \mathbb{R}$. La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = C$ est appelée la fonction constante C . Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$. En effet, on a $|f(x) - l| = |C - C| = 0$ donc si, par exemple, $0 < |x - x_0| < \delta = 1$ alors $|f(x) - l| = 0 < \varepsilon$. D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - C| < \varepsilon.$$

On peut remarquer que tout réel $\delta > 0$ vérifie l'implication précédente.

Exemple 50 (Fonction élémentaire)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x$. Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$. En effet, on a $|f(x) - l| = |x - x_0|$ donc si $0 < |x - x_0| < \delta = \varepsilon$ alors $|f(x) - l| = |x - x_0| < \varepsilon$. D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - x_0| < \varepsilon.$$

Exemple 51 (Fonction élémentaire)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_*^+$ on a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sqrt{x_0}$. En effet, on a $|f(x) - l| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$. On choisit $\delta < \frac{x_0}{2}$. Puisque $0 < |x - x_0| < \delta$ alors $\frac{x_0}{2} = x_0 - \frac{x_0}{2} < x_0 - \delta < x$ d'où $\sqrt{x} > \sqrt{\frac{x_0}{2}}$ mais $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0}{2}} + \sqrt{x_0}}$ alors $|f(x) - l| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{\delta}{\sqrt{\frac{x_0}{2}} + \sqrt{x_0}}$. Donc il suffit de prendre $0 < \delta < \min\left(\frac{x_0}{2}, \varepsilon\left(\sqrt{\frac{x_0}{2}} + \sqrt{x_0}\right)\right)$.

Théorème 3.1.1 (Unicité de la limite)

Si la limite d'une fonction en un point x_0 existe alors elle est unique.

Théorème 3.1.2 (Limite d'une fonction en terme de convergence des suites)

Soient f une fonction définie sur $V - \{x_0\}$ et $l \in \mathbb{R}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f admet une limite l au point x_0 .
2. Toutes les suites (x_n) de $V - \{x_0\}$ qui sont convergentes vers x_0 vérifient $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$.

Proposition 3.1.1 (Non existence de la limite I)

S'ils existent deux suites (x_n) et (y_n) de $V - \{x_0\}$ qui sont convergentes vers la même limite x_0 mais les deux suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ sont convergentes vers deux limites différentes alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

Application $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas. En effet, si on pose $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ et on considère les deux suites de terme général $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$. Ces deux suites

sont convergentes vers la même limite $x_0 = 0$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1$.

Proposition 3.1.2 (*non existence de la limite II*)

S'il existe une suite (x_n) de $V - \{x_0\}$ qui est convergente vers x_0 mais $(f(x_n))$ est une suite divergente alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

Application $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ n'existe pas. En effet, si on pose $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ et on considère la suite de terme général $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Cette suite est convergente vers $x_0 = 0$ mais $(f(x_n))$ est une suite divergente car $f(x_n) = \cos \frac{1}{x_n} = \cos n\pi = (-1)^n$.

Théorème 3.1.3 (*Opérations algébriques sur les limites finies des fonctions en un point*)

Soient f et g deux fonctions définies sur $V - \{x_0\}$ telles que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}$. Alors

1. $f + g$ admet la limite $l + l'$ au point x_0 .
2. $f.g$ admet la limite $l.l'$ au point x_0 .
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction λf admet la limite $\lambda.l$ au point x_0 .
4. Si $f \neq 0$ et $l \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ admet la limite $\frac{1}{l}$ au point x_0 .
5. Si $g \neq 0$ et $l' \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ admet une limite $\frac{l}{l'}$ au point x_0 .

Théorème 3.1.4 (*Signe de la fonction et de sa limite*)

Soit f une fonction définie sur $V - \{x_0\}$ telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Donc

1. Si f est une fonction positive alors $l \geq 0$.
2. Si f est une fonction négative alors $l \leq 0$.

Preuve 18 1. En utilisant la définition de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ avec un choix convenable de ε .

2. f est négative alors $(-f)$ est positive donc $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f)(x) \geq 0$ mais $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} -f(x) = -\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -l$ alors $-l \geq 0$, d'où $l \leq 0$.

Proposition 3.1.3 (*Ordre et limites*)

Soient f et g deux fonctions définies sur $V - \{x_0\}$ telles que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}$. Si $f \leq g$ alors $l \leq l'$.

Preuve 19 On a $f \leq g$ alors $g - f \geq 0$ donc $\lim_{x \rightarrow x_0} (g - f)(x) \geq 0$ mais $\lim_{x \rightarrow x_0} (g - f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l' - l$ alors $l' - l \geq 0$ d'où $l \leq l'$.

Théorème 3.1.5 (*Théorème de l'encadrement*)

Soient f , g et h trois fonctions définies sur $V - \{x_0\}$ telle que $f \leq h \leq g$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$.

Théorème 3.1.6 Si f est une fonction bornée au voisinage de x_0 et g une fonction qui admet une limite nulle au point x_0 alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (f.g)(x) = 0$. (Voir la définition d'une fonction bornée ci-après)

Exemple 52 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ car la fonction donnée par $h(x) = x \sin \frac{1}{x}$ est le produit de la fonction bornée $f = \sin$ et la fonction g donnée par $g(x) = x$ qui admet une limite nulle au point zéro.

Question : Trouver $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) \cos \frac{1}{x}$.

Remarque 3.1.2 On note qu'on peut parler de la limite d'une fonction en un point x_0 sans qu'elle soit définie à ce point.

Exemple 53 La fonction f donnée par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ n'est pas définie au point $x_0 = 0$ mais $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ existe.

3.1.2 Limite à gauche et à droite

Soient f une fonction définie sur $V - \{0\}$ et $l \in \mathbb{R}$.

Définition 3.1.3 On dit que f admet une limite l à droite du point x_0 , et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l, \text{ si}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in V : x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Exemple 54 On considère la fonction définie par $f(x) = x$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. En effet, pour $x > 0$ on a $|f(x) - l| = |x - 0| = x$ donc si $0 < x < \delta = \varepsilon$ alors $|f(x) - l| = x < \varepsilon$.
D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R} : 0 < x < \delta \implies |f(x) - 0| < \varepsilon.$$

Exemple 55 On considère la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. En effet, pour $x > 0$ on a $|f(x) - l| = |\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x}$ donc si $0 < x < \delta = \varepsilon^2$ alors $|f(x) - l| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$. D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon^2 > 0, \forall x : 0 < x < \delta \implies |f(x) - 0| < \varepsilon.$$

Définition 3.1.4 On dit que f admet une limite l à gauche du point x_0 , et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l, \text{ si}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in V : x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Exemple 56 On considère la fonction définie par $f(x) = x$. De même, comme l'exemple précédent, on montre que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

Remarque 3.1.3 On ne peut pas parler de $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x} = 0$ car la fonction f donnée par $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas définie pour $x < 0$.

Théorème 3.1.7 Soient f une fonction définie sur $V - \{x_0\}$ et $l \in \mathbb{R}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Exemple 57 Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = -\lim_{x \rightarrow 0} x = -0 = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ceci implique que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Proposition 3.1.4 Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

Exemple 58 On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ car $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$. On a aussi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ ce qui implique que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ n'existe pas.

Remarque 3.1.4 On parle de la limite à gauche et à droite d'une fonction f en un point x_0 si, par exemple, f est définie par deux formes différentes à gauche et à droite du point x_0 . Par exemple $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

3.1.3 Limite infinie d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur $V - \{x_0\}$.

Définition 3.1.5 On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 , et on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in V : 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A.$$

Définition 3.1.6 On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 , et on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in V : 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A.$$

3.1.4 Limite finie d'une fonction à l'infinie

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Définition 3.1.7 On suppose que f est définie sur $[a, +\infty[$. On dit que f tend vers l quand x tend vers $+\infty$, et on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in [a, +\infty[: x > B \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Définition 3.1.8 On suppose que f est définie sur $] -\infty, a]$. On dit que f tend vers l quand x tend vers $-\infty$, et on écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in] -\infty, a] : x < -B \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

3.1.5 Limite infinie à l'infinie

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Définition 3.1.9 On suppose que f est définie sur $[a, +\infty[$. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in [a, +\infty[: x > B \implies f(x) > A.$$

Définition 3.1.10 On suppose que f est définie sur $] -\infty, a]$. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, et on écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in] -\infty, a] : x < -B \implies f(x) > A.$$

Définition 3.1.11 On suppose que f est définie sur $[a, +\infty[$. On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in [a, +\infty[: x > B \implies f(x) < -A.$$

Définition 3.1.12 On suppose que f est définie sur $] -\infty, a]$. On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, et on écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, si

$-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, et on écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in]-\infty, a] : x < -B \implies f(x) < -A.$$

3.2 Fonctions continues

3.2.1 Préliminaires

Définition 3.2.1 Soit f une fonction définie sur un voisinage V d'un point x_0 . On dit que f est continue au point x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in V : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Exemple 59 Soient $x_0, C \in \mathbb{R}$. La fonction constante définie par $f(x) = C$ est continue au point x_0 car $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} C = C = f(x_0)$.

Exemple 60 Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La fonction f définie par $f(x) = x$ est continue au point x_0 car $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 = f(x_0)$.

Exemple 61 La fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ n'est pas continue au point $x_0 = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \neq 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \neq 1 = f(0)$.

Proposition 3.2.1 Soit f une fonction définie sur un voisinage V d'un point x_0 . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue au point x_0 .
2. Toutes les suites (x_n) de V qui sont convergentes vers x_0 vérifient $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Remarque 3.2.1 Ce résultat signifie que si f est continue au point x_0 et (x_n) une suite convergente vers x_0 alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right)$.

Théorème 3.2.1 1. Si f et g sont deux fonctions continues au point x_0 . Alors

2. Les fonctions $f + g$ et $f.g$ sont continues au point x_0 .

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction λf est continue au point x_0 .

4. Si $f \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est continue au point x_0 .

5. Si $g \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue au point x_0 .

Application Soit P_n la fonction polynôme, de degré $n \in \mathbb{N}$, définie sur \mathbb{R} par $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ où $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ on a

1. La fonction définie par $f_0(x) = a_0$ représente la fonction constante donc elle est continue au point x_0 .

2. Soit $m \in \{1, \dots, n\}$. La fonction définie par $f_m(x) = a_mx^m$ représente le produit d'un scalaire $\lambda = a_m$ et la fonction $x \mapsto x^m = \underbrace{x.x \dots x}_{m \text{ fois}}$ qui est continue au point x_0 .

Alors P_n est continue au point x_0 car c'est la somme des fonctions f_0, f_1, \dots, f_n qui sont continues au point x_0 .

Définition 3.2.2 (Composition de deux fonctions)

Soient $\emptyset \neq D, D' \subset \mathbb{R}$. Soient $f : D \longrightarrow D'$ et $g : D' \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit la fonction composée de f et de g , notée $g \circ f$, par

$$\begin{aligned} g \circ f & : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

Théorème 3.2.2 Soient $f : D \longrightarrow D'$ et $g : D' \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue au point x_0 et g est continue au point $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue au point x_0 .

Exemple 62 Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Considérons la fonction $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ on a $h(x) = \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. C'est à dire

$$\begin{aligned} h & : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 + 1 \mapsto \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

d'où $h = g \circ f$. Puisque f est continue au point x_0 et g est continue au point $y_0 = f(x_0) = x_0^2 + 1 \in \mathbb{R}_*^+$ alors h est continue au point x_0 .

3.2.2 Continuité à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un voisinage V d'un point x_0 .

Définition 3.2.3 On dit que f est continue à droite du point x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Définition 3.2.4 On dit que f est continue à gauche du point x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 63 Considérons la fonction f définie par $f(x) = |x|$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ alors f est continue à droite et à gauche du point $x_0 = 0$.

Proposition 3.2.2 Soit f une fonction définie sur un voisinage V d'un point x_0 . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue au point x_0 .
2. f est continue à droite et à gauche du point x_0 .

Exemple 64 La fonction définie par $f(x) = |x|$ est continue au point $x_0 = 0$ car elle est continue à droite et à gauche de ce point.

3.2.3 Continuité sur un ensemble

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

Définition 3.2.5 On dit que f est continue sur $\{a\}$ si elle est continue au point a .

Définition 3.2.6 On dit que f est continue sur l'intervalle $]a, b[$ si elle est continue sur chaque élément de $]a, b[$.

Définition 3.2.7 On dit que f est continue sur l'intervalle $] -\infty, b[$ si elle est continue sur chaque élément de $] -\infty, b[$.

Définition 3.2.8 On dit que f est continue sur l'intervalle $]a, +\infty[$ si elle est continue sur chaque élément de $]a, +\infty[$.

Définition 3.2.9 On dit que f est continue sur l'intervalle $]a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et à gauche de b .

Définition 3.2.10 On dit que f est continue sur l'intervalle $]-\infty, b]$ si elle est continue sur $]-\infty, b[$ et à gauche de b .

Définition 3.2.11 On dit que f est continue sur l'intervalle $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et à droite de a .

Définition 3.2.12 On dit que f est continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$ si elle est continue sur $]a, +\infty[$ et à droite de a .

Définition 3.2.13 On dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b .

Lemme 3.2.1 1. Si f est continue sur des intervalles de la forme donnée dans les définitions précédentes alors elle est continue sur leurs intersection et sur leurs union.

2. Soient $\emptyset \neq D' \subset D \subset \mathbb{R}$. Si f est continue sur D alors elle est continue sur D' .

Exemple 65 La fonction constante est continue sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Exemple 66 La fonction polynôme P_n , de degré $n \in \mathbb{N}$, est continue sur \mathbb{R} .

Exemple 67 La fonction f donnée par $f(x) = |x|$ est continue sur \mathbb{R} . En effet, on a $\mathbb{R} =]-\infty, 0[\cup \{0\} \cup]0, +\infty[$.

1. Sur $]-\infty, 0[$ on a $f(x) = |x| = -x$ alors f représente la fonction polynôme de degré 1 alors elle est continue sur $]-\infty, 0[$.
2. Sur $\{0\}$ on a vu que la fonction f donnée par $f(x) = |x|$ est continue au point zéro.
3. Sur $]0, +\infty[$ on a $f(x) = |x| = x$ alors f représente la fonction polynôme de degré 1 alors elle est continue sur $]0, +\infty[$.

3.2.4 Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur $V - \{x_0\}$ (f n'est pas définie au point x_0).

Lemme 3.2.2 Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors la fonction \tilde{f} définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in V - \{x_0\}, \\ l & \text{si } x = x_0, \end{cases}$$

est continue au point x_0 .

Preuve 20 On a $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{\substack{x \neq x_0 \\ x \rightarrow x_0}} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = \tilde{f}(x_0)$.

Définition 3.2.14 La fonction \tilde{f} s'appelle le prolongement par continuité de la fonction f au point x_0 .

Exemple 68 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ et $x_0 = 0$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = l$ alors f admet un prolongement par continuité au point 0 donné par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ \tilde{f}(0) = l = 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Lemme 3.2.3 1. Si le prolongement par continuité de la fonction f au point x_0 existe alors il est unique.

2. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas alors f n'admet pas un prolongement par continuité au point x_0 .

Exemple 69 La fonction f donnée par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas.

Remarque 3.2.2 Ils existent une infinité de prolongement d'une fonction f en un point x_0 (Pas nécessairement continue au point x_0). Ils sont donnés par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \tilde{f}(x_0) = a & \text{si } x = x_0, \end{cases}$$

avec $a \in \mathbb{R}$. Dans cette partie on s'intéresse à trouver s'il existe le prolongement qui est continue au point x_0 . Plus précisément, de trouver la valeur de a pour laquelle \tilde{f} est continue au point x_0 . Pour cela on calcul $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Si cette limite n'existe pas alors le prolongement par continuité n'existe pas. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors le prolongement par

continuité existe, il est unique et il est donné $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \tilde{f}(x_0) = l & \text{si } x = x_0. \end{cases}$

3.2.5 Extrémums et extrémants

Soit f une fonction définie sur un ensemble non vide D de \mathbb{R} . Soit $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ l'ensemble des valeurs de la fonction f .

Définition 3.2.15 On dit que f est majorée sur D si l'ensemble de ces valeurs $f(D)$ est majoré, c'est à dire, si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D : f(x) \leq M.$$

Définition 3.2.16 $\sup f(D)$, s'il existe, est appelé la borne supérieure de f sur l'ensemble D . Il est noté par $\sup_D f$ ou $\sup_{x \in D} f(x)$.

Définition 3.2.17 $\max f(D)$, s'il existe, est appelé le maximum de la fonction f sur l'ensemble D . Il est noté par $\max_D f$ ou $\max_{x \in D} f(x)$. Soit $x_0 \in D$ telle que $\max_D f = f(x_0)$, on dit aussi que f admet une valeur maximum au point x_0 .

Définition 3.2.18 Les maximants de la fonction f sur l'ensemble D sont les éléments x de D qui vérifient $\max_D f = f(x)$.

Exemple 70 Considérons la fonction f définie sur $D = \mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ x & \text{si } x \in]0, 3] \\ 3 & \text{si } x \in]3, +\infty[. \end{cases}$

On a

1.

$$\begin{aligned}
 x &\in \mathbb{R} \implies \{(x \in]-\infty, 0] \text{ ou } x \in]0, 3] \text{ ou } x \in]3, +\infty[) \}. \\
 &\implies \begin{cases} f(x) = 1 \leq 3 \text{ ou} \\ f(x) = x \in]0, 3] \text{ donc } f(x) \leq 3, \implies f(x) \leq 3 \\ \text{ou } f(x) = 3 \leq 3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 3$$

donc f est majorée sur \mathbb{R} .

$$2. f(\mathbb{R}) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\} =]0, 3] \text{ donc } \sup_D f = \max_D f = 3.$$

3. Les maximants de la fonction f sont les éléments x de \mathbb{R} qui vérifient $\max_D f = f(x)$ c'est à dire qui vérifient $3 = f(x)$ donc l'ensemble des maximants de f sur \mathbb{R} est $[3, +\infty[$.

Définition 3.2.19 On dit que f est minorée sur D si l'ensemble de ces valeurs $f(D)$ est minoré, c'est à dire, si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D : m \leq f(x).$$

Définition 3.2.20 $\inf f(D)$ est appelé la borne inférieure de f et elle est notée par $\inf_D f$ ou $\inf_{x \in D} f(x)$.

Définition 3.2.21 $\min f(D)$, s'il existe, est appelé minimum de la fonction f sur l'ensemble D et il est noté par $\min_D f$ ou $\min_{x \in D} f(x)$. Soit $x_0 \in D$ telle que $\min_D f = f(x_0)$, on dit aussi que f admet une valeur minimum au point x_0 .

Définition 3.2.22 Les minimants de la fonctions f sur l'ensemble D sont les éléments x de D qui vérifient $\min_D f = f(x)$.

Exemple 71 On prend la même fonction f de l'exemple précédent. On a

1. $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq f(x)$ donc f est minorée sur \mathbb{R} .
2. $f(\mathbb{R}) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\} =]0, 3]$ donc $\inf_{\mathbb{R}} f = \inf f(\mathbb{R}) = \inf]0, 3] = 0$.
3. On a $\min_{\mathbb{R}} f = \min f(\mathbb{R})$ mais $\min f(\mathbb{R}) = \min]0, 3]$ n'existe pas donc f n'admet pas un minimum sur \mathbb{R} . Ainsi, elle n'admet pas des minimants sur \mathbb{R} .

Définition 3.2.23 On dit que f est bornée sur D si l'ensemble de ces valeurs $f(D)$ est borné, c'est à dire, si

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in D : m \leq f(x) \leq M.$$

Définition 3.2.24 Les extrémums de la fonction f sur l'ensemble D sont le maximum et le minimum, s'ils existent, de la fonction f sur l'ensemble D .

Définition 3.2.25 Les extrémants de la fonction f sur D sont les minimants et les maximants de la fonction f sur D .

Définition 3.2.26 On dit que f atteint sa borne supérieure sur D s'il existe $x \in D$ telle que $\sup_D f = f(x)$.

Définition 3.2.27 On dit que f atteint sa borne inférieure sur D s'il existe $x \in D$ telle que $\inf_D f = f(x)$.

Définition 3.2.28 On dit que f atteint ses bornes sur D si elle atteint sa borne supérieure et inférieure sur D .

Exemple 72 $f(x) = x$ atteint sa borne supérieure sur $]0, 1]$ car $\sup_{]0, 1]} f = 1 = f(1)$ mais elle n'atteint pas sa borne inférieure sur $]0, 1]$ car $\inf_{]0, 1]} f = 0 \neq f(x)$ pour tout $x \in]0, 1]$.

Lemme 3.2.4

1. $\max_D f, \min_D f, \sup_D f$ et $\inf_D f$ s'ils existent ils sont unique.
2. Si $\max_D f$ existe alors f atteint sa borne supérieure sur D .
3. Si $\min_D f$ existe alors f atteint sa borne inférieure sur D .

- Preuve 21** 1. Par définition, $\max_D f$, $\min_D f$, $\sup_D f$ et $\inf_D f$ représentent, respectivement, $\max f(D)$, $\min f(D)$, $\sup f(D)$ et $\inf f(D)$ qui sont uniques.
2. Puisque $\max_D f := \max f(D)$ existe alors $\sup f(D) = \max f(D) \in f(D)$ donc il existe $x \in D$ telle que $\sup f(D) = f(x)$ alors $\sup_D f = f(x)$ donc f atteint sa borne supérieure sur D .
3. A faire.

Théorème 3.2.3 Si f est continue sur $[a, b]$ alors elle est bornée et elle atteint ses bornes sur $[a, b]$.

3.2.6 Continuité uniforme

Définition 3.2.29 On dit que f est uniformément continue sur un ensemble non vide D de \mathbb{R} si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in D : 0 < |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Exemple 73 Soient $f(x) = x^2$ et $D =]0, 1[$. Soient $x_1, x_2 \in D$ alors $|x_1| + |x_2| = x_1 + x_2 < 1 + 1 = 2$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| = |x_1 + x_2| |x_1 - x_2| \\ &\leq (|x_1| + |x_2|) |x_1 - x_2| < 2 |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et on choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ donc si $|x_1 - x_2| < \delta$ alors $|f(x_1) - f(x_2)| < 2 |x_1 - x_2| < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Lemme 3.2.5 Si f est uniformément continue sur D alors elle est continue sur D .

Remarque 3.2.3 Ils existent des fonctions continues sur D mais qui ne sont pas uniformément continues sur D . Par exemple, $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $D =]0, 1]$ car c'est

l'inverse d'une fonction non nulle et continue sur $]0, 1]$ mais on va démontrer qu'elle n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$. Par l'absurde, on suppose que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in]0, 1] : 0 < |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Si on prend $0 < x_1 < \min(\delta, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\varepsilon})$ et $x_2 = 2x_1$ on a $x_1, x_2 \in]0, 1]$ et $0 < |x_1 - x_2| = x_1 < \delta$ mais $|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right| = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2x_1} > \varepsilon.$

Définition 3.2.30 On dit que f est Lipschitzienne sur D s'il existe $k > 0$ telle que

$$\forall x_1, x_2 \in D : |f(x_1) - f(x_2)| \leq k |x_1 - x_2|.$$

Exemple 74 La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est Lipschitzienne sur $D = [1, +\infty[$ avec $k = \frac{1}{2}$. En effet, soient $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$ alors $x_1 \geq 1$ et $x_2 \geq 1$ donc $\sqrt{x_1} \geq 1$ et $\sqrt{x_2} \geq 1$ d'où $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq 2$ alors $\frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{1}{2}$. En plus, $|f(x_1) - f(x_2)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2|.$

Théorème 3.2.4 Si f est une fonction Lipschitzienne sur D alors elle est uniformément continue sur D .

Exemple 75 La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$ car elle est Lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.

Théorème 3.2.5 (Heine)

Si f est continue sur $[a, b]$ alors elle est uniformément continue sur $[a, b]$.

Exemple 76 La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est uniformément continue sur $[2, 3]$ car elle est continue sur un intervalle de la forme $[a, b]$ ici $a = 2$ et $b = 3$.

Lemme 3.2.6 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$). Si f est continue sur $]a, b[$ et admet une limite à droite de a et à gauche de b alors elle est uniformément continue sur $]a, b[$.

Exemple 77 La fonction $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ est uniformément continue sur $]0, 1[$ car elle est continue sur $]0, 1[$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

3.2.7 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.2.6 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ telle que $f(c) = 0$.

Exemple 78 La fonction f définie par $f(x) = x^5 - 3x + 1$ est continue sur $[0, 1]$ car c'est une fonction polynôme. En plus, on a $f(0) \cdot f(1) = 1 \cdot (-1) < 0$ alors il existe $c \in]0, 1[$ telle que $c^5 - 3c + 1 = 0$.

Proposition 3.2.3 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ alors il existe $c \in [a, b]$ telle que $f(c) = 0$.

Preuve 22 On distingue deux cas

1. Si $f(a) \cdot f(b) = 0$ donc ou bien $f(a) = 0$ ou bien $f(b) = 0$ alors il existe $c = a \in [a, b]$ ou $c = b \in [a, b]$ telle que $f(c) = 0$.
2. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ telle que $f(c) = 0$. Puisque $]a, b[\subset [a, b]$ alors $c \in [a, b]$.

Proposition 3.2.4 Soit f une fonction continue sur D . Soient $x_1, x_2 \in D$ ($x_1 < x_2$). Pour tout y_0 entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$ il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ telle que $f(x_0) = y_0$.

Preuve 23 Considérons la fonction g donnée par

$$\begin{aligned} g &: [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = f(x) - y_0. \end{aligned}$$

Cette fonction est continue sur $[x_1, x_2]$ car c'est la différence de deux fonctions continues (la fonction f et la fonction constante y_0). Distinguons deux cas :

1. Si $f(x_1) < f(x_2)$ alors $y_0 \in]f(x_1), f(x_2)[$ ce qui implique que $g(x_1) \cdot g(x_2) = (f(x_1) - y_0)(f(x_2) - y_0) < 0$ alors il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ telle que $g(x_0) = 0$ donc $f(x_0) = y_0$.

2. Si $f(x_2) < f(x_1)$ alors $y_0 \in]f(x_2), f(x_1)[$ ce qui implique que $g(x_1) \cdot g(x_2) = (f(x_1) - y_0)(f(x_2) - y_0) < 0$ alors il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ telle que $g(x_0) = 0$ donc $f(x_0) = y_0$.

3.3 Fonctions dérivables

3.3.1 Préliminaires

Définition 3.3.1 Si $\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe alors on dit que f est dérivable à gauche du point x_0 . Cette limite est appelé la dérivée à droite de f au point x_0 et elle est notée par $f'_g(x_0)$.

Définition 3.3.2 Si $\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe alors on dit que f est dérivable à droite du point x_0 . Cette limite est appelé la dérivée à gauche de f au point x_0 et elle est notée par $f'_d(x_0)$.

Définition 3.3.3 Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe alors on dit que f est dérivable au point x_0 . Cette limite est appelé la dérivée de f au point x_0 et elle est notée par $f'(x_0)$.

Lemme 3.3.1 1. f est dérivable au point x_0

2. f est dérivable à droite et à gauche du point x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple 79 La fonction constante est dérivable à chaque point de \mathbb{R} . Sa dérivée est la fonction nulle.

Exemple 80 La fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$.

Remarque 3.3.1 Si f est dérivable au point x_0 alors il existe une fonction ε telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ et $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$. En effet, il suffit de prendre $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$.

Théorème 3.3.1 Si f et g sont dérivables au point x_0 alors

1. Les fonctions $f + g$ et $f.g$ sont dérivables au point x_0 . En plus, on a $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ et $(f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction λf est dérivable au point x_0 et on a $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.
3. Si $f \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est dérivable au point x_0 et on a $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.
4. Si $g \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable au point x_0 et on a $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Théorème 3.3.2 Si f est dérivable au point x_0 et g est dérivable au point $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable au point x_0 et on a $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0).g'(f(x_0))$.

Lemme 3.3.2 Si f est dérivable au point x_0 alors elle est continue en ce point.

Preuve 24 f est dérivable au point x_0 alors il existe une fonction ε telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ et $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$. Donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)(f'(x_0) + \varepsilon(x)) = f(x_0) \end{aligned}$$

alors f continue au point x_0 .

Remarque 3.3.2 Il existent des fonctions continues au point x_0 mais qui ne sont pas dérivables à ce point. Par exemple, $f(x) = |x|$ et $x_0 = 0$.

3.3.2 Fonctions dérivables sur un intervalle

Théorème 3.3.3 (Fonction réciproque)

Si f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} qui est continue et strictement monotone (même monotonie de f) sur $f(I)$. En plus, on a

$$(x = f^{-1}(y), y \in f(I)) \iff (y = f(x), x \in I).$$

Soit $x \in I$. Si f est dérivable en x et $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(x)$ et on a $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

Exemple 81 La fonction $f(x) = \sin x$: Cette fonction est continue strictement monotone (strictement croissante) sur l'intervalle $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ alors elle admet une fonction inverse, notée \arcsin , continue, strictement monotone sur $\sin[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = [-1, 1]$. Soit $y \in]-1, 1[$ on a $y = \sin x$ avec $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. En plus, la fonction \sin est dérivable en x et $(\sin)'(x) = \cos x \neq 0$ alors \arcsin est dérivable en $y = \sin x$ et on a $(\arcsin)'(y) = \frac{1}{(\sin)'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Exemple 82 De même, on montre que $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ admet une fonction réciproque continue, strictement décroissante, notée \arccos , définie de $\cos I = [-1, 1]$ vers $I = [0, \pi]$ telle que

$$(x = \arccos y, y \in [0, \pi]) \iff (y = \cos x, x \in [-1, 1]).$$

En plus, elle est dérivable sur $] -1, 1[$ sa dérivée est donnée par $(\arccos)'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$

Exemple 83 La fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ admet une fonction réciproque continue, strictement croissante, notée \arctan , définie de $\tan I = \mathbb{R}$ vers $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ telle que

$$(x = \arctan y, y \in \mathbb{R}) \iff \left(y = \tan x, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right).$$

En plus, elle est dérivable sur \mathbb{R} sa dérivée est donnée par $(\arctan)'(y) = \frac{1}{1+y^2}$.

Théorème 3.3.4 (Extrémums)

Si f admet localement une valeur extrémum au point x_0 et si $f'(x_0)$ existe alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque 3.3.3 Ils existent des fonctions f tel que $f'(x_0) = 0$ mais elles n'admet pas une valeur extrémum au point x_0 . Par exemple, $f(x) = x^3$ et $x_0 = 0$.

Théorème 3.3.5 (Théorème de Rolle)

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ telle que $f'(c) = 0$.

Exemple 84 $f(x) = x^2$ est continue sur $[a, b] = [-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$ et $f(-1) = f(1) = 1$ alors il existe $c \in] -1, 1[$ telle que $f'(c) = 0$.

Théorème 3.3.6 (Théorème des accroissement finis)

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ telle que $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.

Proposition 3.3.1 Si f est dérivable sur un intervalle I alors pour tout $x_1, x_2 \in I$ ($x_1 < x_2$) il existe $c \in]x_1, x_2[$ telle que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c)$.

Remarque 3.3.4 Soit $c \in]x_1, x_2[$ alors il existe $\theta \in]0, 1[$ telle que $c = \theta x_1 + (1 - \theta) x_2$. Donc, sous les hypothèses du théorème précédent, il existe $\theta \in]0, 1[$ telle que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\theta x_1 + (1 - \theta) x_2)$. En plus, si on pose $h = x_2 - x_1$ alors la formule précédente s'écrit $f(x_1 + h) - f(x_1) = h f'(x_1 + (1 - \theta) h)$.

Théorème 3.3.7 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$.
2. f est décroissante si et seulement si $f' \leq 0$.
3. f est constante si et seulement si $f' = 0$.

Exemple 85 (Application du théorème des accroissement finis : Obtention de quelques inégalités de fonctions). Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin x| \leq |x|$.

On considère la fonction $f(x) = \sin x$. On distingue 3 cas :

Cas $x = 0$. On a $|\sin x| = 0 \leq 0 = |x|$.

Cas $x < 0$. On remarque que f est continue sur $[x, 0]$, dérivable sur $]x, 0[$ alors elle vérifie les hypothèses du théorème des accroissement finis sur l'intervalle $[x, 0]$ donc il

existe $c \in]x, 0[$ telle que $f(0) - f(x) = (0 - x)f'(c)$. Mais $f(0) = 0$ et $f'(c) = \cos c$ alors $-\sin x = -x \cos c$ donc $|\sin x| = |x \cos c| = |x| |\cos c| \leq |x|$ car $|\cos c| \leq 1$.

Cas $x > 0$. On remarque que f est continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$ alors elle vérifie les hypothèses du théorème des accroissement finis sur l'intervalle $[0, x]$ donc il existe $c \in]0, x[$ telle que $f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c)$. Mais $f(0) = 0$ et $f'(c) = \cos c$ alors $\sin x = x \cos c$ donc $|\sin x| = |x \cos c| = |x| |\cos c| \leq |x|$ car $|\cos c| \leq 1$.

Théorème 3.3.8 (Théorème des accroissement finis généralisé)

Proposition 3.3.2 Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ telle que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Proposition 3.3.3 (Règle de l'Hopital)

Si f et g sont deux fonctions dérivable au voisinage d'un point x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Remarque 3.3.5 Il se peut qu'on applique la Règle de l'Hopital plusieurs fois. Par exemple, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x^2 - 0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - (-\sin 0)}{2x - 2 \cdot 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3.4 Exercices

Exercice 1 (Limite et propriétés de fonction)

Soit f une fonction définie sur un voisinage V d'un point x_0 . On suppose que f admet une limite l au point x_0 .

1. Montrer qu'il existe un voisinage W du point x_0 tel que f est bornée sur ce voisinage.
2. Montrer que si $l \neq 0$ alors f a un signe constant sur $W - \{x_0\}$. Ici W est un voisinage du point x_0 .

Exercice 2 (Continuité)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} , continues au point x_0 et $f(x_0) \leq g(x_0)$.

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < g(x).$$

(Indication : Utiliser la définition de la continuité de f et g au point x_0 avec un choix convenable de ε .)

Formuler ce résultat littérairement.

2. Si on pose $\varphi(x) = \min(f(x), g(x))$. Montrer que φ est continue au point x_0 .

Exercice 3 (Prolongement par continuité)

On considère les fonctions f définies par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ et $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Est ce que f et g admet un prolongement par continuité au point 0.

Exercice 4 (Fonctions bornées)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) et f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $k < 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(x) < g(x) + k$.

Exercice 5 (Extrémums et extrémants)

Trouver les extrémums et les extrémants (s'ils existent) de la fonction f définie comme

$$\text{suit } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x < -1, \\ 2 & \text{si } x = -1, \\ x+1 & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

Exercice 6 (Continuité uniforme)

Soient f la fonction définie par $f(x) = \sin x^2$ et $k > 0$. Montrer que f est uniformément continue sur $[0, k]$ et qu'elle n'est pas sur \mathbb{R} .

Indication : Considérer les deux suites $x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et $y_n = \sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$.

Exercice 7 (Théorème des valeurs intermédiaires I)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) et f une fonction continue sur continue sur $[a, b]$ tel que $f(a) \neq f(b)$. Soient $p, q > 0$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $y_1 < y_2$ alors $y_1 < \frac{py_1 + qy_2}{p+q} < y_2$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$.

Exercice 8 (Théorème des valeurs intermédiaires II)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur \mathbb{R} comme suit

$$f(x) = \begin{cases} a \frac{\sin x}{x} - 1 & \text{si } x < 0, \\ ab & \text{si } x = 0, \\ x^2 \cos \frac{1}{x} + 2x + 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Déterminer les constantes a et b pour que la fonction f soit continue sur \mathbb{R} .
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2x + 1$ admet une solution dans $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$.

Exercice 9 (Fonctions réciproques des fonctions hyperboliques)

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(x) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.
2. Montrer que
 - (a) Pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.
 - (b) Pour tout $x < 1$ on a $\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan x = \frac{\pi}{4}$.
 - (c) Pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
3. Résoudre l'équation $\arcsin 2x - \arcsin \sqrt{3}x = \arcsin x$.

Exercice 10 (Théorème de Rolle)

Soient f et g deux fonctions définies sur $[-1, 1]$ comme suit

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x^2 - x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad \text{et } g(x) = \begin{cases} xf(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f et g sont dérivables sur $[-1, 1]$. Trouver leurs dérivées.
2. Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[- \{0\}$ tel que $g'(c) = 0$.

Exercice 11 (Théorème des accroissements finis)

Montrer que

1. Pour tout $x > 0$ on a $\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log x < \frac{1}{x}$.
2. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

Exercice 12 (Théorème des accroissements finis généralisé)

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ avec $0 < a < b$. Montrer que les fonctions $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ vérifient les conditions du Théorème des accroissements finis généralisé sur $[a, b]$. Puis montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{af(b)-bf(a)}{b-a} = cf'(c) - f(c)$.

Chapitre 4

Examens

Contrôle Continu (2009/2010)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

1 ère année MI (Module ANA I)

Exercice 1 (3pts)

Soit A un ensemble non vide et borné dans \mathbb{R} . Justifier ce qui suit :

1. $\sup A$ et $\inf A$ existent.
2. $\forall x \in A : \inf A \leq x \leq \sup A$.
3. $\inf A \leq \sup A$.

Exercice 2 (6pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant

1. $\sqrt{2} + \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $|x| \leq -x^2$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $x^2 > \frac{1}{n}$.
4. $\exists r \in \mathbb{Q} : \frac{1}{(2009)^2} < r < \frac{1}{2009}$.
5. $\forall x, y \in \mathbb{R} : E(x + y) = E(x) + E(y)$.
6. Toutes les suites bornées sont convergentes.

Exercice 3 (2pts)

Etudier la nature des suites suivantes : $u_n = (-1)^n, v_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 4 (3pts)

Citez deux critères de convergence et un critère de divergence.

Exercice 5 (3,5pts)

Soit $E = \{\nabla, 1, \square\}$.

1. Trouver $P(E)$ l'ensemble des parties de E . (0,5pt)
2. On munit $P(E)$ de la relation d'ordre \subseteq et soit $\mathbb{A} = \{\{\nabla\}, \{1\}, E\}$.
 - (a) Trouver $m(\mathbb{A})$ l'ensemble des minorants de \mathbb{A} et $M(\mathbb{A})$ l'ensemble des majorants de \mathbb{A} . (1pt)
 - (b) Montrer que $\sup \mathbb{A} = E$ et $\inf \mathbb{A} = \emptyset$. (1pt)
 - (c) Trouver $\max \mathbb{A}$ et $\min \mathbb{A}$ s'ils existent. (1pt)

Exercice 6 (2,5 pts)

1. On veut démontrer, en utilisant le raisonnement par l'absurde, qu'une proposition logique P est vrai.
 - (a) Quelle est le principe de ce raisonnement. (1pt)
 - (b) Est ce que c'est un raisonnement direct ou indirect (Justifier). (0,5pt)
2. Montrer, par l'absurde, que $\inf]-\infty, a[$ n'existe pas. (1pt)

Correction

Solution 1

1. $\sup A$ et $\inf A$ existent car A est borné, $A \subset \mathbb{R}$ et \mathbb{R} vérifie la propriété de la borne supérieure et inférieure.
2. $\forall x \in A : \inf A \leq x \leq \sup A$ car $\inf A$ est un minorant de A et $\sup A$ est un majorant de A .
3. $\inf A \leq \sup A$ car on utilise les inégalités de la question 2 et le fait que \leq est transitive.

Solution 2

1. Vrai car c'est la somme du nombre irrationnel $\sqrt{2}$ et du nombre rationnel $\frac{1}{2}$.

2. Faux car si, par exemple, $x = 1$ on a $|x| = |1| = 1 \not\leq -1 = -x^2$.
3. Vrai. Il suffit d'appliquer Archimède sur $(x^2, 1) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
4. Vrai. Il suffit d'appliquer la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} entre les deux nombres réels $\frac{1}{(2009)^2}$ et $\frac{1}{2009}$ (Ici $\frac{1}{(2009)^2} < \frac{1}{2009}$).
5. Faux car si on prend, par exemple, $x = y = \frac{1}{2}$ on trouve $E\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = E(1) = 1$ et $E\left(\frac{1}{2}\right) + E\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + 0 = 0$, donc $E\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \neq E\left(\frac{1}{2}\right) + E\left(\frac{1}{2}\right)$.
6. Faux car si on prend, par exemple, la suite $((-1)^n)$, elle est bornée mais elle n'est pas convergente.

Solution 3

1. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente car elle possède deux sous suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) qui sont convergentes vers deux limites différentes 1 et -1 . En effet, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{2k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (-1)^{2k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (-1)^{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (-1) = -1$.

Attention : Il est incorrect de dire que $((-1)^n)$ admet deux limites différentes car on a vu que si la limite existe alors elle est unique.

2. On a $v_n = \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \frac{1}{n}$, alors (v_n) est convergente vers zéro car c'est le produit de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ qui est convergente vers zéro et la suite $((-1)^n)$ qui est bornée.

Exercice 4 Voir cours

Exercice 5

1. On a $P(E) = \{\emptyset, \{\nabla\}, \{1\}, \{\square\}, \{\nabla, 1\}, \{\nabla, \square\}, \{1, \square\}, E\}$.

2.a \emptyset est le seul élément qui est inclus dans $\{\nabla\}, \{1\}$ et E c'est à dire

$$\forall X \in \mathbb{A} : \emptyset \subset X$$

alors $m(\mathbb{A}) = \{\emptyset\}$. En plus, E est le seul élément qui contient $\{\nabla\}, \{1\}$ et E c'est à dire

$$\forall X \in \mathbb{A} : X \subset E$$

alors $M(\mathbb{A}) = \{E\}$.

2.b *Montrons que $\sup \mathbb{A} = E$ et $\inf \mathbb{A} = \emptyset$.*

Méthode 1 : Par définition, $\sup \mathbb{A} :=$ le plus petit majorant de $\mathbb{A} = \min M(\mathbb{A})$ mais $\min M(\mathbb{A}) = E$ car E est un minorant de $M(\mathbb{A})$ qui appartient à $M(\mathbb{A})$ alors $\sup \mathbb{A} = E$.

Par définition, $\inf \mathbb{A} :=$ le plus grand minorant de $\mathbb{A} = \max m(\mathbb{A})$ mais $\max m(\mathbb{A}) = \emptyset$ car \emptyset est un majorant de $m(\mathbb{A})$ qui appartient à $m(\mathbb{A})$ alors $\inf \mathbb{A} = \emptyset$.

Méthode 2 : On a $\sup \mathbb{A} = \bigcup_{Y \in \mathbb{A}} Y$ et $\inf \mathbb{A} = \bigcap_{Y \in \mathbb{A}} Y$ alors $\sup \mathbb{A} = \{\nabla\} \cup \{1\} \cup E = E$ et $\inf \mathbb{A} = \{\nabla\} \cap \{1\} \cap E = \emptyset$.

2.c Puisque $\sup \mathbb{A} = E \in \mathbb{A}$ alors $\max \mathbb{A}$ existe en plus $\max \mathbb{A} = \sup \mathbb{A} = E$. Puisque $\inf \mathbb{A} = \emptyset \notin \mathbb{A}$ alors $\min \mathbb{A}$ n'existe pas.

Exercice 6

1.a *Principe du raisonnement par l'absurde :* on suppose que P est fausse et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

1.b Ce raisonnement est indirect car on ne démontre pas directement que P est vrai.

2 Ici $P \equiv [\inf]-\infty, 0[$ n'existe pas]. On suppose que P est fausse alors $\inf]-\infty, 0[$ existe puisque la borne inférieure représente un minorant alors $\inf]-\infty, 0[$ est un minorant de $]-\infty, 0[$ donc $]-\infty, 0[$ est minoré ceci est une contradiction.

Contrôle final (2009/2010)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

1 ère année MI (Module ANA I)

Exercice 1 (5pts)

Soit A un ensemble non vide de \mathbb{R} . Soient $m, M \in \mathbb{R}$. Donner la définition de

(2pts) 1. M majorant de A et m minorant de A .

(2pts) 2. $\sup A$ et $\inf A$.

(1pt) 3. A est borné dans \mathbb{R} .

Exercice 2 (8pts)

Soit A un ensemble non vide et borné dans $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

1. Justifier ce qui suit :

(0, 5pt) a. $\sup A$ et $\inf A$ existent.

(0, 5pt) b. $\forall x \in A : \inf A \leq x \leq \sup A$.

(2pts) c. $\inf \mathbb{R}^+ = 0$ et $0 \leq \inf A$.

2. On considère l'ensemble $B = \{x^2 : x \in A\}$.

(2pts) a. Soit $x \in A$. Montrer que $(\inf A)^2 \leq x^2 \leq (\sup A)^2$. Que peut on dire sur l'ensemble B . Dédurre que $\inf B \geq (\inf A)^2$ et $\sup B \leq (\sup A)^2$.

(2pts) b. Soit $x^2 \in B$. Montrer que $\sqrt{\inf B} \leq x \leq \sqrt{\sup B}$ puis déduire que $\inf B \leq (\inf A)^2$ et $\sup B \geq (\sup A)^2$.

(1pt) c. Exprimer $\sup B$ et $\inf B$ en terme de $\sup A$ et $\inf A$.

Exercice 3 (7pts)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite récurrente suivante :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = au_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- (2pts) 1. On suppose que $a = 1$. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_n puis déduire la nature de (u_n) .
2. On suppose que $0 < a < 1$.
- (1pt) a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq 1$.
- (1pt) b. Montrer que (u_n) est une suite monotone.
- (2pts) c. Déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.
- (1pt) 3. Ecrire le terme général u_n en terme de a . Que représente la suite (u_n) .

Correction

Solution 1

Voir le cour

Solution 2

- 1.a On a $A \subset \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$. Donc $A \subset \mathbb{R}$. L'ensemble A est borné dans \mathbb{R} , $A \subset \mathbb{R}$ et \mathbb{R} vérifie la propriété de la borne supérieure et inférieure alors $\sup A$ et $\inf A$ existent.
- 1.b Car $\inf A$ est un minorant de A et $\sup A$ est un majorant de A .
- 1.c On a 0 est un minorant de \mathbb{R}^+ qui appartient à \mathbb{R}^+ alors $0 = \min \mathbb{R}^+$ donc $\inf \mathbb{R}^+ = \min \mathbb{R}^+ = 0$. Puisque $A \subset \mathbb{R}^+$ alors $\inf \mathbb{R}^+ \leq \inf A$ d'où $0 = \inf \mathbb{R}^+ \leq \inf A$.
- 2.a Puisque $x \in A$ alors $\inf A \leq x \leq \sup A$ prenons le carré pour trouver $(\inf A)^2 \leq x^2 \leq (\sup A)^2$. L'ensemble B est un ensemble borné. On a $(\sup A)^2$ est un majorant de B et $\sup B$ est le plus petit majorant de B alors $\sup B \leq (\sup A)^2$. On a $(\inf A)^2$ est un minorant de B et $\inf B$ est la plus grand minorant de B alors $\inf B \geq (\inf A)^2$.
- 2.b $x^2 \in B$ alors $\inf B \leq x^2 \leq \sup B$ prenons la racine pour trouver $\sqrt{\inf B} \leq x \leq \sqrt{\sup B}$. On a $\sqrt{\sup B}$ est un majorant de A et $\sup A$ est le plus petit majorant de A alors $\sup A \leq \sqrt{\sup B}$ prenons le carré pour obtenir le résultat. On a $\sqrt{\inf B}$ est un minorant de A et $\inf A$ est la plus grand minorant de A alors $\inf A \geq \sqrt{\inf B}$ prenons le carré pour obtenir le résultat.

2.c De (2.a) et (2.b) on trouve $\sup B = (\sup A)^2$ et $\inf B = (\inf A)^2$.

Solution 3

1. On a $u_1 = u_2 = u_3 = u_n = 1$. On peut montrer par récurrence que la suite (u_n) est la suite constante, donc, elle est convergente.
- 2.a Par récurrence. On a $0 \leq u_0 = 1 \leq 1$, donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.
On suppose que $0 \leq u_n \leq 1$, alors on multiplie par $a > 0$ pour trouver $0 \leq au_n \leq a$, mais $a < 1$ et $au_n = u_{n+1}$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
- 2.b Puisque $u_n \geq 0$ et $a < 1$ alors $u_{n+1} - u_n = (a - 1)u_n \leq 0$ ce qui implique que (u_n) est une suite décroissante.
- 2.c Puisque (u_n) est décroissante et minorée par 0 alors d'après le critère des suites monotones on trouve qu'elle est convergente vers l qui vérifie $l = al$ donc $l(1 - a) = l - al = 0$ puisque $1 - a \neq 0$ on trouve $l = 0$.
3. On peut démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = a^n$ donc (u_n) représente la suite géométrique de base a .

Rattrapage (2009/2010)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

1 ère année MI (Module ANA I)

Exercice 1 (7,5pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant.

(2, 5pts) 1. $\min [0, 1] = 0$.

2. Soit A un ensemble non vide de \mathbb{R} .

(2, 5pts) a. Le majorant de A appartient toujours à A .

(2, 5pts) b. Si $\inf A \notin A$ alors $\min A$ n'existe pas.

Exercice 2 (12,5pts)

(2pts) 1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

2. Rappelons que $n! = 1.2 \dots (n-1).n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(2pts) a. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $n! \geq \frac{1}{2}2^n$ puis déduire que

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq 2 \frac{1}{2^n}.$$

(2pts) b. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n!}\right)$ est convergente vers zéro.

3. Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et posons $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

(3pts) a. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

(2pts) b. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n)$.

(1, 5pt) c. Déduire que (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes.

Correction

Solution 1

1. Vrai car 0 est un minorant de $[0, 1]$ et $0 \in [0, 1]$.
- 2.a Faux. Si par exemple $A = [1, 3]$ on a 4 est un majorant de A mais $4 \notin [1, 3]$.
- 2.b Vrai (voir cours).

Solution 2

1. On a $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une suite géométrique de base $\frac{1}{2}$ avec $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
- 2.a Pour $n = 1$ on a $1! = 1 \geq 1 = \frac{1}{2}2^1$.
On suppose que $n! \geq \frac{1}{2}2^n$ alors si on multiplie par $n + 1$ on trouve $(n + 1)! = n!(n + 1) \geq \frac{1}{2}2^n(n + 1)$ mais $n + 1 \geq 2$ donc $\frac{1}{2}2^n(n + 1) \geq \frac{1}{2}2^n \cdot 2 = \frac{1}{2}2^{n+1}$ ce qui implique que $(n + 1)! \geq \frac{1}{2}2^{n+1}$.
Puisque $n! \geq \frac{1}{2}2^n$ alors on inverse pour trouver $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}2^n} = 2\frac{1}{2^n}$. De plus, on a $n! \geq 0$ donc $0 \leq \frac{1}{n!}$.
- 2.b De la question (2.a) et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\frac{1}{2^n} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \cdot 0 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$.
Alors, d'après le théorème d'encadrement, la suite $\left(\frac{1}{n!}\right)$ est convergente vers zéro.
- 3.a On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$, alors (u_n) est croissante. D'autre part, on a
$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{n+1} - 1 \right) \leq 0,$$
car $\frac{2}{n+1} - 1 \leq 0$ alors (v_n) est décroissante.
- 3.b On a $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$.
- 3.c On déduit de (3.a) et (3.b) que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes donc d'après le critère des suites adjacentes on trouve qu'elles sont convergentes.

Contrôle continu A (2010/2011)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

1 ère année MI (Module ANA I)

(8pts) Exercice 1 On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } v_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + \frac{1}{6}v_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ v_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{5}{6}v_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. On pose $w_n = v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Ecrire w_{n+1} en terme de w_n puis déduire que (w_n) est positive et convergente vers 0.
 - (b) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes puis déduire qu'elles sont convergentes vers la même limite l .
2. On pose $z_n = u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Ecrire z_{n+1} en terme de z_n puis déduire la nature de (z_n) .
 - (b) Déduire la valeur de l .

(8pts) Exercice 2 Justifier ce qui suit

1. Soit A un ensemble majoré non vide de \mathbb{R} et $M \in \mathbb{R}$. Si $M \geq \sup A$ alors M est un majorant de A .
2. Si A et B sont deux ensembles majorés non vide de \mathbb{R} telque $\sup B = \sup A + 1$ alors $\sup (A \cup B) = \sup B$.
3. Si (u_n) est une suite positive alors elle est minorée.
4. Si $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ alors $\sup A = 1$ et $\inf A = 0$. (Utiliser la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$)

(4pts) Exercice 3 Soit A un ensemble borné de \mathbb{R} et $a > 0$. On pose $aA = \{ax : x \in A\}$. Montrer que aA est borné et que $\sup(aA) = a \sup A$ et $\inf(aA) = a \inf A$.

Correction

Solution 1

1.a On a $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \left(\frac{1}{6}u_n + \frac{5}{6}v_n\right) - \left(\frac{5}{6}u_n + \frac{1}{6}v_n\right) = \frac{2}{3}(v_n - u_n) = \frac{2}{3}w_n$.

Puisque $w_{n+1} = \frac{2}{3}w_n$ alors, par récurrence, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $w_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}w_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \geq 0$.

De plus, (w_n) représente la suite géométrique de base $a = \frac{2}{3}$ avec $|a| = \frac{2}{3} < 1$ alors elle est convergente vers 0.

1.b Puisque $w_n \geq 0$ alors $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{6}w_n \geq 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{6}w_n \leq 0$. Donc (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$. Ce qui implique que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Puisque (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles sont convergentes vers la même limite l .

2.a On a $z_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \left(\frac{5}{6}u_n + \frac{1}{6}v_n\right) + \left(\frac{1}{6}u_n + \frac{5}{6}v_n\right) = u_n + v_n = z_n$. La suite (z_n) est convergente vers $z_0 = u_0 + v_0 = 0 + 1 = 1$ car c'est la suite constante.

2.b On a $1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 2l$. Ce qui implique que $l = \frac{1}{2}$.

Solution 2

1. On a

$$\forall x \in A : x \leq \sup A,$$

mais $M \geq \sup A$ donc

$$\forall x \in A : x \leq \sup A \leq M,$$

ce qui implique que

$$\forall x \in A : x \leq M$$

alors M est un majorant de A .

2. On a $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ mais $\sup B = \sup A + 1$ alors $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup A + 1) = \sup A + 1$ car $\sup A + 1 \geq \sup A$.
3. (u_n) est une suite positive alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n$$

alors elle est minorée par 0.

4. Au début, on remarque que A représente l'ensemble des valeurs de la suite (u_n) .
On a (u_n) est décroissante et minorée car

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} - u_n \leq 0 \text{ et } 0 \leq \frac{1}{n} = u_n$$

alors elle est convergente vers $\inf A$. C. à d. $\inf A = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. En plus, (u_n) est décroissante alors $\sup A = \max A = u_1 = 1$.

Solution 3 A est borné alors

$$\forall x \in A : \inf A \leq x \leq \sup A.$$

Alors si on multiplie par $a > 0$ on obtient

$$\forall ax \in aA : a \inf A \leq ax \leq a \sup A. \quad (4.1)$$

Ce qui implique que aA est borné.

Montrons que $\sup(aA) = a \sup A$ et $\inf(aA) = a \inf A$.

De (4.1), on trouve $a \sup A$ est un majorant de aA et $a \inf A$ est un minorant de aA ,

alors

$$\{\sup(aA) \leq a \sup A \text{ et } a \inf A \leq \inf aA. \quad (4.2)$$

D'autre part, on a

$$\forall ax \in aA : \inf(aA) \leq ax \leq \sup(aA),$$

alors si on dévise par $a > 0$ on obtient

$$\forall x \in A : \frac{\inf(aA)}{a} \leq x \leq \frac{\sup(aA)}{a},$$

ce qui implique que $\frac{\sup(aA)}{a}$ est un majorant de A et $\frac{\inf(aA)}{a}$ est un minorant de A , d'où $\sup A \leq \frac{\sup(aA)}{a}$ et $\frac{\inf(aA)}{a} \leq \inf A$. C'est à dire

$$\{a \sup A \leq \sup(aA) \text{ et } \inf(aA) \leq a \inf A. \quad (4.3)$$

De (4.2) et (4.3), on trouve le résultat.

Contrôle continu B (2010/2011)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

1 ère année MI (Module ANA I)

(8pts) Exercice 1 Justifier ce qui suit

1. Soient A un ensemble majoré par $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Si $b \geq a$ alors b est un majorant de A .
2. Si A et B sont deux ensembles minorée non vide de \mathbb{R} telque $\inf B = \inf A + 1$ alors $\inf (A \cup B) = \inf A$.
3. Si (u_n) est une suite négative alors elle est majorée.
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+2n+1} = 2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$.

(8pts) Exercice 2

1. Donner la définition d'une suite numérique.
2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Donner la définition de (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
 - (a) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
 - (b) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Puis déduire qu'elle sont convergentes vers la même limite.

(4pts) Exercice 3 Soient A un ensemble borné de \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R}$. On pose $a + A = \{a + x : x \in A\}$. Montrer que $a + A$ est borné et que $\sup(a + A) = a + \sup A$ et $\inf(a + A) = a + \inf A$.

Correction

Solution 1

1. a est un majorant de A alors

$$\forall x \in A : x \leq a$$

puisque $b \geq a$ alors

$$\forall x \in A : x \leq b$$

ce qui implique que b est un majorant de A .

2. On a $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B) = \min(\inf A, \inf A + 1) = \inf A$.
3. (u_n) est une suite négative alors pour tout n on a $u_n \leq 0$ ce qui implique qu'elle est majorée par 0.
4. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, car $\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$, car $\frac{(-1)^n}{n+1} = (-1)^n \frac{1}{n+1}$ produit de deux suites : $((-1)^n)$ est bornée et $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ est convergente vers 0.

Solution 2

- 1 et 2 Voir cours.

- 3.a On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$, donc (u_n) est croissante. D'autre part,

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \leq 0,$$

car $(n+1)^2 \geq n(n+1)$ donc $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$. Ce qui implique que (v_n) est décroissante.

- 3.b On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Puisque (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$. Alors elles sont adjacentes. Donc elles sont convergentes vers la même limite d'après le critère

des suites adjacentes.

Solution 3

1. A est borné alors

$$\forall x \in A : \inf A \leq x \leq \sup A.$$

Alors si on ajoute a on obtient

$$\forall a + x \in a + A : a + \inf A \leq a + x \leq a + \sup A. \quad (4.4)$$

Ce qui implique que $a + A$ est borné.

Montrons que $\sup(a + A) = a + \sup A$ *et* $\inf(a + A) = a + \inf A$: De (4.4), on trouve $a + \sup A$ est un majorant de $a + A$ et $a + \inf A$ est un minorant de $a + A$, alors

$$\sup(a + A) \leq a + \sup A \text{ et } a + \inf A \leq \inf(a + A). \quad (4.5)$$

D'autre part, on a

$$\forall a + x \in a + A : \inf(a + A) \leq a + x \leq \sup(a + A),$$

alors

$$\forall x \in A : \inf(a + A) - a \leq x \leq \sup(a + A) - a,$$

ce qui implique que $\sup(a + A) - a$ est un majorant de A et $\inf(a + A) - a$ est un minorant de A , d'où $\sup A \leq \sup(a + A) - a$ et $\inf(a + A) - a \leq \inf A$. C'est à dire

$$\{a + \sup A \leq \sup(a + A) \text{ et } \inf(a + A) \leq a + \inf A. \quad (4.6)$$

De (4.5) et (4.6), on trouve le résultat.

Contrôle final (2010/2011)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

1 ère année MI (Module ANA I)

Exercice 1 (6pts)

Justifier ce qui suit

1. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = l^2$.
2. La fonction $f(x) = \frac{|x|}{x}$ n'est pas continue au point 0.
3. La fonction $f(x) = \sqrt{x} \cos \frac{1}{x^2}$ admet un prolongement par continuité au point 0.
4. La fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable au point 0.

Exercice 2 (8pts)

1. Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

Donner la définition de f est dérivable sur \mathbb{R} . Est ce que f est continue sur \mathbb{R} (Justifier).

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On suppose que $f'(a) = 0$ et on considère la fonction g définie comme suit : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = a, \\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a. \end{cases}$
 - (a) Montrer que g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Trouver g' sur $]a, b[$.
 - (b) On suppose que $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $(c-a)^2 g'(c) + f(c) - f(a) = 0$.

Exercice 3 (6pts)

Montrer que

1. Il existe $c \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ tel que $3c + \cos c = 0$.
2. Si f est une fonction continue au point x_0 avec $f(x_0) > 0$ alors $f > 0$ sur un voisinage de x_0 .

Rattrapage (2010/2011)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

1^{ère} année MI (Module ANA I)

Exercice 1 (7,5 pts)

1. Soit A un ensemble majoré non vide de \mathbb{R} et $M \in \mathbb{R}$. Montrer que si $M \geq \sup A$ alors M est un majorant de A .
2. Soit $B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Utiliser la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$ pour montrer que $\sup B = 1$ et $\inf B = 0$.

Exercice 2 (9pts) On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \text{ et } v_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + \frac{1}{6}v_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ v_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{5}{6}v_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

1. On pose $w_n = v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Ecrire w_{n+1} en terme de w_n puis déduire que (w_n) est positive et convergente vers 0.
 - (b) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes puis déduire qu'elles sont convergentes vers la même limite l .
2. On pose $z_n = u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Ecrire z_{n+1} en terme de z_n puis déduire la nature de (z_n) .
 - (b) Déduire la valeur de l .

Exercice 3 (3,5 pts) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_0, a_1, \dots, a_n des réels tel que

$a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$. Considérons deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} comme suit $f(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ et $g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$ puis déduire que l'équation $g(x) = 0$ a au moins une solution dans $]0, 1[$.

Devoir I

I On pose $A =]1, 3]$.

1 Donner un élément $M \in \mathbb{R}$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in A : x \leq M. \quad (4.7)$$

Comment on appelle cet élément. Est-ce qu'il y'a un autre élément qui vérifie (4.7), qu'est-ce qu'on peut déduire. Qu'est-ce qu'on peut dire sur A . Trouver l'ensemble de tous les éléments de \mathbb{R} qui vérifient (4.7), on le note par \mathcal{A} . Donner le plus petit élément de \mathcal{A} , comment on l'appelle. Est-ce que cet élément appartient à A .

Faite une conclusion.

2 Donner un élément $m \in \mathbb{R}$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in A : m \leq x. \quad (4.8)$$

Comment on appelle cet élément. Est-ce qu'il y'a un autre élément qui vérifie (4.8), qu'est-ce qu'on peut déduire. Qu'est-ce qu'on peut dire sur A . Trouver l'ensemble de tous les éléments de \mathbb{R} qui vérifient (4.8) on le note par \mathcal{B} . Donner le plus grand élément de \mathcal{B} , comment on l'appelle. Est-ce que cet élément appartient à A .

Faite une conclusion

II 1 Donner la définition de l'ensemble des nombres rationnels qui est \mathbb{Q} .

2 Nous sommes, maintenant, dans \mathbb{Q} . On pose $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 3\}$. Est-ce que A est borné. Est-ce qu'il admet une borne supérieure et une borne inférieure. (N'oubliez pas qu'on ne connaît que \mathbb{Q} . C'est-à-dire on n'a pas encore défini la racine $\sqrt{}$). Que peut-on déduire.

3 Pourquoi on a construit l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} .

4 Donner quelques propriétés de \mathbb{R} .

Correction

I $A =]1, 3]$.

1 $M = 4$. On l'appelle majorant de A . Oui, il y'a un autre élément qui vérifie la propriété (P_1) (Par exemple $M = 5$). Ce qui implique que le majorant de $A =]1, 3]$ n'est pas unique. Dans ce cas, on dit que A est borné supérieurement ou majoré. $\mathcal{A} = [3, +\infty[$. Le plus petit élément de $\mathcal{A} = \min [3, +\infty[= 3$. On l'appelle borne supérieure de A notée par $\sup A$. Oui il est unique. Oui il appartient à A . Donc, on l'appelle maximum de A noté par $\max A$.

Conclusion.

Soit $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Le majorant de A est un élément M de \mathbb{R} qui vérifie $\forall x \in A : x \leq M$. Généralement, il n'est pas unique. Si A admet un majorant alors on dit qu'il est borné supérieurement ou majoré. La borne supérieure de A notée par $\sup A$ représente le plus petit majorant de A et il est unique. Si $\sup A \in A$ alors $\max A$ existe et $\max A = \sup A$.

2 Je laisse cette partie à l'étudiant.

II 1 $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } q \neq 0 \right\}$ représente l'ensemble des nombres rationnels.

Oui $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 3\}$ est borné dans \mathbb{Q} car il admet un majorant M et un minorant m dans \mathbb{Q} . En effet, si $x \in A$ alors $x^2 \leq 3 \leq 4$, ceci implique que $-2 \leq x \leq 2$, donc $M = 2 \in \mathbb{Q}$ et $m = -2 \in \mathbb{Q}$.

L'ensemble A n'admet pas une borne supérieure dans \mathbb{Q} . On le démontre par absurde (Voir le cours).

Conclusion.

On remarque que les deux propriétés suivantes

L'existence du majorant *implique* l'existence de la borne supérieure (*PBS*)

et

L'existence du minorant *implique* l'existence de la borne inférieure (*PBI*)

ne sont pas vérifiées dans \mathbb{Q} .

(*PBS*) s'appelle la propriété de la borne supérieure. (*PBI*) s'appelle la propriété de la borne inférieure.

2 De la question précédente, on trouve que parmi les raisons de la construction de l'ensemble \mathbb{R} est d'avoir les deux propriétés (*PBS*) et (*PBI*). C'est à dire que \mathbb{R} compense les faiblesses de \mathbb{Q} .

3 On peut citer quelques propriétés de l'ensemble \mathbb{R} :

- a. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.
- b. \mathbb{R} vérifie les propriétés (*PBS*) et (*PBI*).
- c. \mathbb{R} est Archimédien.
- d. \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} .

Devoir II

Exercice 1

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x \leq 1 \leq y$. Classer par ordre croissant : \sqrt{x} , x , x^2 , \sqrt{y} , y , y^2 , 0 et 1.

Exercice 2

Répond par vrai ou faux (avec justification).

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \left(\frac{x}{y} \leq 1\right) \implies (x \leq y)$.
2. $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R} : (x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \implies (x_1 - y_1 \leq x_2 - y_2)$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (|x| = |y|) \implies (x = y)$.

Exercice 3

Soit $x > 0$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < x < n$.

Exercice 4

Soit $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$.

1. Donner la définition littéraire et mathématique (en utilisant \exists, \forall, \in , etc...) de chaque terme.
 - (a) M est un majorant de A .
 - (b) La borne supérieure de A .
 - (c) A est un ensemble borné supérieurement.
 - (d) A est un ensemble borné.
2. En utilisant \exists, \forall, \in , etc..., donner la définition de chaque terme.
 - (a) A admet un minorant.
 - (b) A admet une borne inférieure.

- (c) A admet un plus petit élément.
 - (d) A admet un plus grand élément.
3. Citer toutes les relations qui existent entre le majorant, la borne supérieure et le plus grand élément d'un ensemble A . Même question pour le minorant, la borne inférieure et le plus petit élément d'un ensemble.

Exercice 5

Soit $A = [-1, 0[\cup]1, 2]$.

L'ensemble A est-il borné ? Déterminer les bornes inférieure et supérieure de A si elles existent. A admet-il un plus petit élément, un plus grand élément ?

Exercice 6

Répond par vrai ou faux (avec justification).

1. Si $A = \left\{ \frac{x^2}{x^2+1} : x \in]0, 1] \right\}$ alors $\sup A$ existe.
2. Si A est un ensemble borné dans \mathbb{R} , B est un ensemble non borné dans \mathbb{R} et $A \cap B \neq \emptyset$ alors $A \cap B$ est borné dans \mathbb{R} .

Exercice 7

Soient $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$. On suppose que pour tout élément a de A et tout élément b de B , on a $a \leq b$.

Montrer que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 8

1. Soient $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ et $a > 0$. Posons $aA = \{a.x : x \in A\}$ et $a + A = \{a + x : x \in A\}$.
 - (a) Montrer que si A est borné alors aA et $a + A$ sont bornés.
 - (b) Est ce que $\sup(aA) = a \sup A$ et $\inf(aA) = a \inf A$.

- (c) Trouver des résultats analogues pour $a + A$.
2. On suppose que $A, B \subset \mathbb{R}_+^*$. Posons $A.B = \{a.b : a \in A \text{ et } b \in B\}$.
- (a) Montrer que si A et B sont majorés alors $A.B$ est borné.
- (b) Donner la formule de $\sup(A.B)$ et $\inf(A.B)$ en terme de $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$.

Exercice 9

Soit $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}_+^*$. Posons $B = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 \in A\}$.

- Montrer que si A est borné alors B est borné.
- Donner la formule de $\sup B$ et $\inf B$ en terme de $\sup A$, $\inf A$.

Exercice 10

Soit $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Posons $|A| = \{|x| : x \in A\}$.

- Montrer que si A est borné alors $|A|$ est borné.
- Montrer que $\sup |A| = \max\{|\inf A|, |\sup A|\}$ et $0 \leq \inf |A| \stackrel{(*)}{\leq} \min\{|\inf A|, |\sup A|\}$.
- Montrer que, généralement, on a pas une égalité dans $(*)$.

A RETENIR

Soit A un ensemble non vide d'un ensemble ordonné (E, \leq) .

Parmi les méthodes utiliser pour démontrer que $\sup A = a$, on cite trois.

Méthode 1 Il suffit de démontrer que $\sup A \leq a$ et $\sup A \geq a$.

Méthode 2 On a

$$\sup A = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ est un majorant de } A, \\ a \leq \text{tous les majorants de } A. \end{cases}$$

Donc pour montrer que $\sup A = a$ il suffit de montrer que

1. a est un majorant de A , c'est à dire, on montre que $\forall x \in A : x \leq A$.
2. $a \leq$ tous les majorants de A . c'est à dire, on montre que

$$\forall M \text{ majorant de } A : a \leq M. \quad (4.9)$$

Pour avoir (4.9), on peut utiliser l'une des deux méthodes.

- (a) Méthode directe : on considère un majorant M quelconque et on essaye de trouver la relation : $a \leq M$.
- (b) Méthode indirecte (par absurde) : on suppose que (4.9) est fausse (c'est à dire, on suppose qu'il existe un majorant M de A tel que $a > M$) et on essaye de trouver une contradiction.

Méthode 3 Si $E = \mathbb{R}$ alors

$$\sup A = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ est un majorant de } A, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : a - \varepsilon < x. \end{cases}$$

Question : Trouver des résultats analogues pour montrer que $\inf A = b$.

Correction

Solution 1

On a $0 < x^2 \leq x \leq \sqrt{x} \leq 1 \leq \sqrt{y} \leq y \leq y^2$.

Solution 2

1. Faux. Car, par exemple, $\frac{3}{-5} \leq 1$ mais $3 \not\leq -5$.
2. Faux. Car, par exemple, $1 \leq 2$ et $1 \leq 5$ mais $1 - 1 = 0 \not\leq 2 - 5 = -3$.
3. Faux. Car, par exemple, $|-1| = |1|$ mais $1 \neq -1$.

Solution 3

Si on applique Archimède sur $(x, 1) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et sur $(1, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on trouve $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 < n_1 x$ et $x < n_2 1$. Ceci implique que $\frac{1}{n_1} < x < n_2$. Posons $n = \max(n_1, n_2)$. Alors $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_1} < x < n_2 \leq n$.

Solution 4

Soit $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$.

1. (a) M est un majorant de A .

Définition littéraire : M est supérieur ou égale à tout les éléments de A .

Définition mathématique :

$$\forall x \in A : x \leq M.$$

-
- (b) La borne supérieure de A .

Définition littéraire : La borne supérieure de A est le plus petit majorant de A .

Définition mathématique :

$$\sup A = \min \{M / M \text{ est majorant de } A\} = \min \{M / \forall x \in A : x \leq M\}.$$

-
-
- (c) A est un ensemble borné supérieurement.

Définition littéraire : A admet un majorant M .

Définition mathématique :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A : x \leq M.$$

-
-
-
- (d) A est un ensemble borné.

Définition littéraire : A est un ensemble borné supérieurement et inférieurement.

Définition mathématique :

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in A : m \leq x \leq M.$$

2. La définition mathématique de

(a) A admet un minorant est

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A : m \leq x.$$

(b) A admet une borne inférieure: $\max \{m / \forall x \in A : m \leq x\}$ existe.

(c) A admet un plus petit élément est

$$\exists m \in A, \forall x \in A : m \leq x.$$

(d) A admet un plus grand élément est

$$\exists M \in A, \forall x \in A : x \leq M.$$

3. Les relations qui existent entre le majorant, la borne supérieure et le plus grand élément d'un ensemble. Aussi entre le minorant, la borne inférieure et le plus petit élément d'un ensemble A sont (on laisse la démonstration à l'étudiant)

(a) (A admet un majorant) \Rightarrow ($\sup A$ existe).

(M majorant de A et $M \leq$ tous les majorants de A) \Rightarrow ($M = \sup A$).

(M majorant de A et $M \in A$) \Rightarrow ($M = \max A$).

(b) $\sup A$ est un majorant de A .

($\sup A \in A$) \Rightarrow ($\max A$ existe et $\max A = \sup A$).

($\sup A \notin A$) \Rightarrow ($\max A$ n'existe pas).

(c) $\max A$ est un majorant de A .

- $(\max A \text{ existe}) \Rightarrow (\sup A \text{ existe et } \max A = \sup A).$
- (d) $(A \text{ admet un minorant}) \Rightarrow (\inf A \text{ existe}).$
- $(m \text{ minorant de } A \text{ et } m \geq \text{ tous les mionorants de } A) \Rightarrow (m = \inf A).$
- $(m \text{ minorant de } A \text{ et } m \in A) \Rightarrow (m = \min A).$
- (e) $\inf A$ est un minorant de A .
- $(\inf A \in A) \Rightarrow (\min A \text{ existe et } \min A = \inf A).$
- $(\inf A \notin A) \Rightarrow (\min A \text{ n'existe pas}).$
- (f) $\min A$ est un minorant de A .
- $(\min A \text{ existe}) \Rightarrow (\inf A \text{ existe et } \min A = \inf A).$

Solution 5

A est borné car A est l'union de deux ensembles bornés, $\sup A = \max(\sup[-1, 0[, \sup]1, 2]) = \max(0, 2) = 2$ et $\inf A = \inf([-1, 0[\cup]1, 2]) = \min(\inf[-1, 0[, \inf]1, 2]) = \min(-1, 1) = -1$. Puisque $\sup A = 2 \in A$ alors $\max A$ existe et $\max A = \sup A = 2$. Puisque $\inf A = -1 \in A$ alors $\min A$ existe et $\min A = \inf A = -1$.

Solution 6

- Si $A = \left\{ \frac{x^2}{x^2+1} : x \in]0, 1] \right\}$ alors $\sup A$ existe. Vrai. Car

$$\forall x \in]0, 1] : \frac{x^2}{x^2+1} \leq 1,$$

donc A admet un majorant, puisque $A \subset \mathbb{R}$ et \mathbb{R} vérifie la propriété de la borne supérieure alors $\sup A$ existe.

- Si A est un ensemble borné dans \mathbb{R} , B est un ensemble non borné dans \mathbb{R} et $A \cap B \neq \emptyset$ alors $A \cap B$ est borné dans \mathbb{R} . Vrai. Car, $A \cap B \subset A$ et A est borné alors $A \cap B$ est borné.

Solution 7

Soit $b \in B$, alors

$$\forall a \in A : a \leq b$$

ce qui implique que b est un majorant de A , alors $\sup A \leq b$ (car $\sup A \leq$ tous les majorants de A). C'est à dire

$$\forall b \in B : \sup A \leq b,$$

alors $\sup A$ est un minorant de B , d'où $\sup A \leq \inf B$ (car tous les minorants de $B \leq \inf B$).

Solution 8

1. Soient $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ et $a > 0$. Posons $aA = \{a.x : x \in A\}$ et $a + A = \{a + x : x \in A\}$.

(a) A est borné alors

$$\forall x \in A : \inf A \leq x \leq \sup A. \quad (4.10)$$

Alors

$$\forall ax \in aA : a \inf A \leq ax \leq a \sup A. \quad (4.11)$$

$$\forall a + x \in a + A : a + \inf A \leq a + x \leq a + \sup A. \quad (4.12)$$

Ce qui implique que aA et $a + A$ sont bornés.

(b) Oui, $\sup(aA) = a \sup A$ et $\inf(aA) = a \inf A$ car, de (4.11), on a $a \sup A$ est un majorant de (aA) et $a \inf A$ est un minorant de (aA) , alors

$$\{\sup(aA) \leq a \sup A \text{ et } a \inf A \leq \inf(aA)\}. \quad (4.13)$$

D'autre part, on a

$$\forall ax \in aA : \inf(aA) \leq ax \leq \sup(aA),$$

alors

$$\forall x \in A : \frac{\inf(aA)}{a} \leq x \leq \frac{\sup(aA)}{a}.$$

ce qui implique que $\frac{\sup(aA)}{a}$ est un majorant de A et $\frac{\inf(aA)}{a}$ est un minorant de A , d'où $\sup A \leq \frac{\sup(aA)}{a}$ et $\frac{\inf(aA)}{a} \leq \inf A$. C'est à dire

$$\{a \sup A \leq \sup(aA) \text{ et } \inf(aA) \leq a \inf A. \quad (4.14)$$

De (4.13) et (4.14), on trouve $\sup(aA) = a \sup A$ et $\inf(aA) = a \inf A$.

(c) De même, on peut montrer que $\sup(a + A) = a + \sup A$ et $\inf(a + A) = a + \inf A$.

2. Posons $A.B = \{a.b : a \in A \text{ et } b \in B\}$.

(a) A et B sont bornés alors

$$\forall x \in A : \inf A \leq x \leq \sup A,$$

$$\forall y \in B : \inf B \leq y \leq \sup B.$$

Puisque $A, B \subset \mathbb{R}_+^*$ alors $\inf A, \inf B \in \mathbb{R}_+$ et $\sup A, \sup B \in \mathbb{R}_+^*$ d'où

$$\forall x.y \in A.B : \inf A. \inf B \leq xy \leq \sup A. \sup B, \quad (4.15)$$

alors $A.B$ est borné.

(b) De (4.15), on trouve que $\sup A. \sup B$ est un majorant de $A.B$, d'où

$$\sup(A.B) \leq \sup A. \sup B. \quad (4.16)$$

Soient $x \in A$ et $y \in B$. On a $xy \leq \sup(A.B)$, alors

$$\forall x \in A : x \leq \frac{\sup(A.B)}{y},$$

d'où $\frac{\sup(A.B)}{y}$ est un majorant de A , donc $\sup A \leq \frac{\sup(A.B)}{y}$. Ce qui implique que

$$\forall y \in B : y \leq \frac{\sup(A.B)}{\sup A}.$$

D'où $\frac{\sup(A.B)}{\sup A}$ est un majorant de B . Alors, $\sup B \leq \frac{\sup(A.B)}{\sup A}$. Donc

$$\sup A . \sup B \leq \sup(A.B). \quad (4.17)$$

De (4.16) et (4.17), on trouve $\sup(A.B) = \sup A . \sup B$. De même, on trouve $\inf(A.B) = \inf A . \inf B$.

Solution 9

1. Soit $x \in B = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 \in A\}$ alors $x^2 \in A$, d'où $\inf A \leq x^2 \leq \sup A$. Ce qui implique que $\sqrt{\inf A} \leq x \leq \sqrt{\sup A}$. Donc

$$\forall x \in B : \sqrt{\inf A} \leq x \leq \sqrt{\sup A}. \quad (4.18)$$

Donc B est borné.

2. De (4.18), on trouve que $\sqrt{\sup A}$ est un majorant de B , ce qui implique que

$$\sup B \leq \sqrt{\sup A}. \quad (4.19)$$

D'autre part, si $y \in A$ alors $\sqrt{y} \in B$ et $\sqrt{y} \leq \sup B$. D'où

$$\forall y \in A : y \leq (\sup B)^2.$$

Donc $(\sup B)^2$ est un majorant de A et $\sup A \leq (\sup B)^2$. Donc

$$\sqrt{\sup A} \leq \sup B. \quad (4.20)$$

De (4.19) et (4.20), On obtient $\sup B = \sqrt{\sup A}$. De même, on montre que $\inf B = \sqrt{\inf A}$.

Solution 10

$$1. \text{ On a } |x| = \begin{cases} x \leq \sup A \leq |\sup A| \\ \text{ou} \\ -x \leq -\inf A \leq |-\inf A| = |\inf A| \end{cases} \quad \text{d'où } |x| \leq |\sup A| \text{ ou } |x| \leq |\inf A| \text{ donc } |x| \leq \max\{|\inf A|, |\sup A|\}. \text{ Donc}$$

$$\forall |x| \in |A| : 0 \leq |x| \leq \max\{|\inf A|, |\sup A|\}.$$

Alors $|A|$ est borné.

2. Distinguons trois cas

Cas 1 : $A \subset \mathbb{R}_+$. Dans ce cas, $|A| = A$, $\inf \mathbb{R}_+ = 0 \leq \inf A \leq \sup A$ et on aura $\max\{|\inf A|, |\sup A|\} = \max\{\inf A, \sup A\} = \sup A = \sup |A|$ et $\min\{|\inf A|, |\sup A|\} = \inf A = \inf |A|$.

Cas 2 : $A \subset \mathbb{R}_-$. Dans ce cas, $|A| = -A$, $\inf A \leq \sup A \leq \sup \mathbb{R}_- = 0$ et on aura $\max\{|\inf A|, |\sup A|\} = \max\{-\inf A, -\sup A\} = -\inf A = \sup(-A) = \sup |A|$ et $\min\{|\inf A|, |\sup A|\} = -\sup A = \inf(-A) = \inf |A|$.

Cas 3 : $A = E \cup F$ avec $E \subset \mathbb{R}_+$ et $F \subset \mathbb{R}_-$. On remarque que $\sup A = \sup E > 0$ et $\inf A = \inf F < 0$. D'autre part, on a $|A| = E \cup (-F)$, d'où

$$\begin{aligned} \sup |A| &= \sup(E \cup (-F)) = \max(\sup E, \sup(-F)) = \max(\sup E, -\inf F) \\ &= \max(\sup A, -\inf A) = \max(|\inf A|, |\sup A|) \end{aligned}$$

Puisque $|A| \subset \mathbb{R}_+$ alors $\inf |A| \geq \inf \mathbb{R}_+ = 0$.

Montrons, maintenant, que $\inf |A| \leq \min\{|\inf A|, |\sup A|\}$: Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}|\inf A| = -\frac{1}{2}\inf A > 0$, il existe $x_1 \in A$ telque $\inf A \leq x_1 < \inf A + \varepsilon = \frac{1}{2}\inf A < 0$. De même, on montre qu'il existe $x_2 \in A$ telque $0 < x_2 \leq \sup A$. Posons $y_1 = |x_1| = -x_1$ et $y_2 =$

$|x_2| = x_2$. On remarque que $y_1, y_2 \in |A|$, $\inf |A| \leq y_1 = -x_1 \leq -\inf A = |\inf A|$ et $\inf |A| \leq y_2 = x_2 \leq \sup A = |\sup A|$. Par suite $\inf |A| \leq \max(|\inf A|, |\sup A|)$.

3. Il existe des ensembles tel qu'on a pas une égalité dans (*). Si on prend $A = [-3, 3]$, on a $|A| = [0, 3]$ et $\max(|\inf A|, |\sup A|) = \max(|-3|, |3|) = 3 \neq \inf |A| = 0$.

Devoir III

Répond par **vrai** ou **faux** dans chacun des cas en justifiant :

1. On considère $(P(E), \subset)$ avec $E = \{\square, 1, \diamond\}$. On a $\sup\{\{1\}, \{\square\}\} = \{1, \square\}$ et $\inf\{\{1\}, \{\square\}\} = \emptyset$.
2. Pour toute suite (u_n) qui vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.
3. Pour toute suite convergente (u_n) on a $(|u_n|)$ est convergente.
4. Pour toute suite (u_n) qui vérifie $(|u_n|)$ est convergente on a (u_n) est convergente.
5. Toute suite bornée est convergente.
6. (u_n) et (v_n) sont deux suites telque $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si (v_n) est convergente alors (u_n) est convergente.
7. Si $u_n = \begin{cases} k & \text{si } n = 2k \\ \frac{k}{k+1} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$ alors (u_n) est convergente.
8. Si $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ alors (u_n) est divergente.
9. Si $u_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{n+2}$ alors (u_n) est divergente.
10. Si (u_n) est une suite convergente et (v_n) est divergente alors $(u_n + v_n)$ est divergente.
11. Si (u_n) est une suite croissante négative alors elle est convergente.

Correction

1. Vrai car $\sup \mathbb{A} = \bigcup_{Y \in \mathbb{A}} Y$ et $\inf \mathbb{A} = \bigcap_{Y \in \mathbb{A}} Y$ donc pour $\mathbb{A} = \{\{1\}, \{\square\}\}$ on trouve $\sup\{\{1\}, \{\square\}\} = \{1\} \cup \{\square\} = \{1, \square\}$ et $\inf\{\{1\}, \{\square\}\} = \{1\} \cap \{\square\} = \emptyset$.
2. Vrai. Il suffit de remarquer que $v_n = -|u_n| \leq u_n \leq |u_n| = w_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-|u_n|) = -\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$, d'après le théorème d'encadrement, on trouve que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.
3. Vrai. Voir suite valeur absolue.
4. Faux. Il suffit de prendre la suite $u_n = (-1)^n$. En effet, on a $|u_n| = 1$ alors $(|u_n|)$ est convergente vers 1 mais $((-1)^n)$ n'est pas convergente.

5. Faux. Il suffit de prendre la suite $u_n = (-1)^n$. Elle est bornée mais pas convergente.
6. Faux. On a $(-1)^n = u_n \leq v_n = 2$, la suite (v_n) est convergente car c'est la suite constante 2 mais $(u_n) = ((-1)^n)$ n'est pas convergente.
7. Faux car elle possède une sous suite divergente qui est (u_{2k}) . En effet, $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} k = +\infty$.
8. Faux. Cette suite est convergente car c'est le produit d'une suite convergente vers zéro qui est $(\frac{1}{n})$ et une suite bornée $((-1)^n)$.
9. Vrai, car $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+1}{2k+2} = 1 \neq -1 = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{2k+2}{2k+3} = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k+1}$. Donc $\left(\frac{(-1)^n(n+1)}{n+2}\right)$ possède deux sous suites convergentes vers deux limites différentes.
10. Vrai. Par l'absurde, on suppose que $(u_n + v_n)$ est convergente alors, en utilisant les opérations algébriques sur les limites, on trouve que $(v_n) = (u_n + v_n) + (-1)(u_n)$ est convergente ceci est une contradiction avec (v_n) est divergente.
11. Vrai. Il suffit ici de remarquer que (u_n) est majorée par 0 car

$$\forall n : u_n \leq 0$$

puis on conclut avec le critère des suites monotones.

A retenir :

1. **Si on veut démontrer qu'une proposition P est vraie on utilise l'un des raisonnements suivants**
 - (a) **Raisonnement direct.**
 - (b) **Raisonnement indirect : par l'absurde, par contraposition (dans le cas d'une implication), par récurrence (dans le cas d'une propriété sous la forme $\forall n \geq n_0 : P(n)$)**
2. **Si on veut démontrer qu'une proposition sous la forme $\forall x : P(x)$ est fausse on utilise le raisonnement (indirect) par un contre exemple.**

Devoir IV

Répondre par vrai ou faux en justifiant les réponses :

1. Pour toutes fonction f qui vérifie $|f|$ est continue en un point a on a f est aussi continue en a .
2. Toute fonction continue en un point x_0 est dérivable en ce point.
3. Toute fonction dérivable est monotone.
4. La dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire.

Correction

1. **Faux.** *Démontrons le par un contre exemple :* Soit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$ On a la fonction $|f|$ est continue en 0 car $|f|(x) = |f(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (elle représente la fonction constante). Mais la fonction f n'est pas continue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
2. **Faux.** *Exemple :* $f(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a la fonction f est continue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. Mais elle n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
3. **Faux.** *Exemple :* $f(x) = \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} . Mais elle n'est pas monotone sur \mathbb{R} .
4. **Vrai.** Soit f une fonction paire. alors $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$. Si on pose $g(x) = f(-x)$ pour tout $x \in D_f$ alors, d'une part, on a $g'(x) = -f'(-x)$ pour tout $x \in D_f$. D'autre part, on a $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$ alors $g'(x) = f'(x)$ pour tout $x \in D_f$. Ce qui implique que $f'(-x) = -f'(x)$ pour tout $x \in D_f$. Donc f' est impaire.

Devoir V

Citez les critères de convergence et de divergence des suites, en donnant quelques exemples.

Correction

CRITERES DE CONVERGENCE.

1. Si (u_n) est une suite constante alors (u_n) est convergente. Par exemple : on considère la suite $u_n = 1$ pour tout $n \geq 1$. Cette suite est convergente vers 1 car c'est une suite constante.
2. Si pour tout $n \geq n_0$ on a $w_n \leq u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ alors (u_n) est convergente vers l . Par exemple : on considère la suite $u_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$ pour tout $n \geq 1$. Cette suite est convergente vers 0 car

$$\begin{aligned} w_n &= 0 \leq u_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} = v_n \end{aligned}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0.$$

3. Si (u_n) est une suite bornée et (v_n) est une suite convergente vers 0 alors $(u_n \cdot v_n)$ est convergente vers 0. Par exemple : on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ car $\frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \frac{1}{n}$, la suite $((-1)^n)_n$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

4. Si (u_n) est une suite croissante et majorée alors (u_n) est convergente. Par exemple :
on considère la suite
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n+4}{3u_n+3}, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Cette suite est convergente car elle est croissante et majorée par 2. Signalons que

$$\forall n \geq 1 : 0 \leq u_n \leq 2.$$

5. Si (u_n) est décroissante et minorée alors (u_n) est convergente.
6. Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors (u_n) et (v_n) sont convergentes vers la même limite. Par exemple : Soit $0 < a < b$. On considère les suites
$$\begin{cases} u_0 = a, v_0 = b \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{On a } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont convergentes vers la même limite car elles sont adjacentes.}$$
7. Si (u_n) est une suite de Cauchy alors (u_n) est convergente. Par exemple : on considère la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Cette suite est convergente car c'est une suite de Cauchy.
8. Si $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ sont convergentes vers la même limite l alors (u_n) est convergente vers l . Par exemple : on considère la suite $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Cette suite est convergente car $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ sont convergentes vers la même limite.
9. Si $(|u_n|)$ est une suite convergente vers 0 alors (u_n) est convergente vers 0. Par exemple : on considère la suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Cette suite est convergente vers 0 car $|u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
10. Si pour tout $n \geq 1$ on a $u_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L < 1$ alors (u_n) est convergente vers 0. Par exemple : on considère la suite $u_n = \frac{n!}{(2n)!}$ pour tout $n \geq 1$. Cette suite est convergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$.
11. Si $|a| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ c. à. d. (a^n) est une suite convergente vers 0. Par exemple : on considère la suite $u_n = \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \geq 1$. On a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $u_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$.

CRITERES DE DIVERGENCE.

1. Si (u_n) admet deux sous suites qui sont convergentes vers deux limites différentes alors (u_n) est une suite divergente. Par exemple : on considère la suite $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$. On a $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$,

alors (u_n) est divergente car elle admet deux sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui sont convergentes vers deux limites différentes.

2. Si (u_n) admet une sous suite divergente alors (u_n) est une suite divergente. Par exemple : on considère la suite $u_n = (-1)^n n$ pour tout $n \geq 1$. On a $u_{2n} = 2(-1)^{2n} n = 2n$, alors (u_n) est divergente car elle admet une sous suite (u_{2n}) qui est divergente.
3. Si $(|u_n|)$ est une suite divergente alors (u_n) est une suite divergente. Par exemple : on considère la suite $u_n = (-1)^n n$ pour tout $n \geq 1$. On a $|u_n| = |(-1)^n n| = n$, alors (u_n) est divergente car $(|u_n|)$ est divergente.
4. Si pour tout $n \geq 1$ on a $u_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L > 1$ alors (u_n) est divergente. Par exemple : on considère la suite $u_n = \frac{3^n}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Cette suite est divergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 3 > 1$.
5. Si $|a| > 1$ alors (a^n) est une suite divergente. Par exemple : on considère la suite $u_n = 3^n$ pour tout $n \geq 1$. Cette suite est divergente car $|3| = 3 > 1$.