

Signaux aléatoires et processus stochastiques
Interrogation n° 1

Exercice 1

Parmi les propositions suivantes, indiquer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses :

- ✓ 1. Si 2 variables aléatoires sont indépendantes alors elles sont non corrélées.
- ✗ 2. Si 2 variables aléatoires sont non corrélées alors elles sont indépendantes.
- ✗ 3. Si 2 variables aléatoires sont non corrélées et de moyennes identiques alors elles sont orthogonales.
- ✓ 4. Si 2 variables aléatoires sont non corrélées et de moyennes nulles alors elles sont orthogonales.

Exercice 2

Dans l'expérience de lancer d'une pièce de monnaie, on définit la v.a. X comme suit :

$X=1$ si pile $X=0$ si face.

La probabilité de pile est p et la probabilité de face est $q=1-p$.

Calculer la fonction de répartition $F_X(x)$. Représenter graphiquement $F_X(x)$.

Calculer la moyenne et la variance de X .

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire normale $X \sim N(100, 5)$. Calculer les probabilités suivantes :

- a) $P(X < 110)$ b) $P(X < 90)$ c) $P(95 < X < 115)$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire ayant pour fonction de répartition $F_X(x)$. On pose $Y=X^2$.

Déterminer $F_Y(y)$.

Donner l'expression de $F_Y(y)$ si X est uniforme sur $[-1, 1]$.

$$= E[X] + E[Y] - 2E[XY] \\ = E[X^2] + E[Y^2] = 2\sigma^2$$

Correction de l'interrogation :

Exo1)

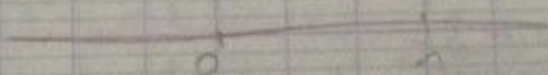
1) Vraie ; 2) fausx ; 3) fausse ; 4) Vraie

Exo2)

$X=1$ si pile

$X=0$ si face

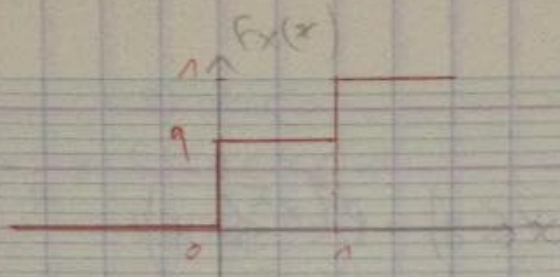
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$



• Si $x < 0 \Rightarrow F_X(x) = 0$

• Si $0 \leq x < 1 \Rightarrow F_X(x) = P(X=0) = p$

• Si $x \geq 1 \Rightarrow F_X(x) = P(X=0) + P(X=1) = p +$



Ex 3)

$$X \sim N(100, 5)$$

$$\mu = 100 ; \sigma = 5$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow X = \sigma Z + \mu$$

$$Z \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X < 110) &= P(\sigma Z + \mu < 110) = P(5Z + 100 < 110) \\ &= P(Z < 2) = 0,9772 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X < 90) &= P(5Z + 100 < 90) \\ &= P(Z < -2) = P(Z \geq 2) \\ &= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(95 < X < 115) &= P(95 < 5Z + 100 < 115) \\ &= P(-1 < Z < 1) \\ &= P(Z < 1) - P(Z < -1) \\ &= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 1)) \\ &= 2 P(Z < 1) - 1 = 2 \times 0,8413 - 1 = \end{aligned}$$

les propositions suivantes
V1. Si 2 variables aléatoires
F2. Si 2

exos stochastiques
rogation n° 1

Exercice 1

$$Y = X^2$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$$

$$\bullet \text{ Si } y < 0 \rightarrow F_Y(y) = 0$$

$$\bullet \text{ Si } y \geq 0 \Rightarrow F_Y(y) = P(X^2 \leq y)$$

$$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

X uniforme sur $[-1, 1]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

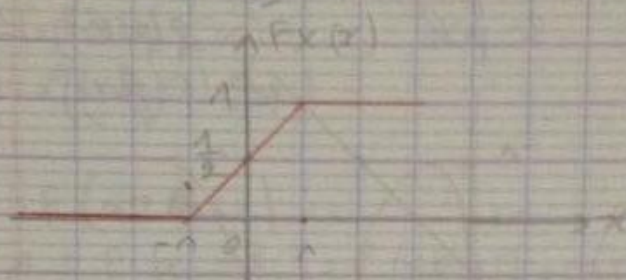
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

$$\bullet \text{ Si } x < 0 \rightarrow F_X(x) = 0$$

$$\bullet \text{ Si } -1 \leq x \leq 1 \rightarrow F_X(x) = \int_{-1}^x \frac{dx}{2} = \frac{x}{2} - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$$

$$\bullet \text{ Si } x \geq 1 \rightarrow F_X(x) = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2} = 1$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & \text{if } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$



$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y < 0 \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & \text{if } y \geq 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{y}}{2} \right) & \text{if } 0 \leq y < 1 \\ F_Y(y) = 1 - 0 = 1 & \text{if } y \geq 1 \end{cases}$$