Université Ibn Tofail **Année Universitaire 2005-2006**
Faculté des Sciences de Kénitra
Département de Physique
DESA- SCTI

Travaux Dirigés : Correction de la série no. 1
(Traitement du Signal)

Exercice 1 :

I) Cas continu

a) $\varphi_{xy}(t) = x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{a}^{b} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$, $\tau \in [a,b]$, a= ? et b= ? (a<b et réels)

- x(t) et y(t) causaux → nuls pour t <0, donc $x(\tau)y(t-\tau)$ non nul si $\tau \geq 0$ et $t-\tau \geq 0$, d'où a=0 et b=t.
- x(t) causal et y(t) non causal → $x(\tau)y(t-\tau)$ non nul si $\tau \geq 0$, d'où a=0 et b=$+\infty$.
- x(t) non causal et y(t) causal → $x(\tau)y(t-\tau)$ non nul si $t-\tau \geq 0$, d'où a=$-\infty$ et b=t.

b) x(t) et y(t) causaux -> $\varphi_{xy}(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$

-Pour avoir $\varphi_{xy}(t) \neq 0 \quad \forall t$, il est nécessaire que $x(\tau)y(t-\tau)$ soit non nul, donc ($0 \leq \tau \leq T_1$ et $0 \leq t-\tau \leq T_2$)
→ ($0 \leq \tau \leq T_1$ et $\tau \leq t \leq T_2 + \tau$), d'où : $0 \leq t \leq T_1+T_2$
donc $\varphi_{xy}(t)$ est définie sur l'intervalle $[0, T_1+T_2]$ (de longueur T_1+T_2) et nul ailleurs
-Application : x(t) = y(t)= $rect_T(t) = \Pi_T(t) = \{ \begin{array}{ll} A & \text{si } t \in]-T/2, T/2[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{array}$

$\varphi_{xx}(t) = x(t)*x(t) = \int_{a}^{b} x(\tau)x(t-\tau)d\tau$, a= ? et b= ?

*Si $t \notin]-T, T[$, d'après b) → $\varphi_{xx}(t)=0$
*Si $t \in]-T, T[$, pour avoir $\varphi_{xx}(t) \neq 0$,il suffit que ($-T/2< \tau<T/2$ et $-T/2< t-\tau<T/2$)
→ ($-T/2< \tau<T/2$ et $t-T/2< \tau<t+T/2$)
1[er] cas : $t \in]-T, 0[$, a=-T/2 et b= t+T/2, d'où $\varphi_{xx}(t)=A^2(T+t)$
2[ème] cas : $t \in [0,T[$, a=t-T/2 et b= T/2, d'où $\varphi_{xx}(t)=A^2(T-t)$
Donc $\varphi_{xx}(t)$ est une fonction triangulaire continue centrée de longueur 2T et d'amplitude TA^2 exprimée par :

$$\varphi_{xx}(t) = \{ \begin{array}{ll} \Lambda_{2T}(t) = TA^2(1-\frac{|t|}{T}) & \text{si } t \in]-T, T[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{array}$$

d) Pour répondre aux questions a) et b) pour la fonction d'intercorrélation : $\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y^*(\tau-t)d\tau = x(t)*y^*(-t)$, il suffit de suivre le même raisonnement que précédemment .

Fonction d'autocorrélation : $\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x^*(\tau-t)d\tau = x(t)*x^*(-t)$

En remarquant que $rect_T(t)$ est une fonction réelle et paire, donc $x^*(t)=x(t)$ et $x(-t)=x(t)$, d'où : $\phi_{xx}(t) = \varphi_{xx}(t)$

II) Cas numérique (même raisonnement que le cas continu)

a) $\varphi_{xy}(k) = x(k)*y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)y(k-i) = \sum_{i=a}^{b} x(i)y(k-i)$, $k \in [a,b]$, a= ?, b= ? (a<b et entiers)

- x(k) et y(k) causaux → nuls pour k <0, donc x(i)y(k-i) non nul si $i \geq 0$ et $k-i \geq 0$, d'où a=0 et b=k.
- x(k) causal et y(k) non causal → x(i)y(k-i) non nul si $i \geq 0$, d'où a=0 et b=$+\infty$.
- x(k) non causal et y(k) causal → x(i)y(k-i) non nul si $k-i \geq 0$, d'où a=$-\infty$ et b=k.

b) $x(k)$ ($k \in [0,N_1]$) et $y(k)$ ($k \in [0,N_2]$) causaux $\varphi\ (k) = \sum_{i=0}^{k} x(i)y(k-i)$,

-Pour avoir $\varphi\ (k) \neq 0 \ \forall k$, il est nécessaire que $x(i)y(k-i)$ soit non nul,

donc ($0 \leq i \leq N_1$ et $0 \leq i\text{-}k \leq N_2$) $\rightarrow$ ($0 \leq i \leq N_1$ et $i \leq k \leq N_2 + \tau$), d'où : $0 \leq k \leq N_1+N_2$

donc $\varphi\ (k)$ est définie sur $[0, N_1+N_2]$ (de longueur N_1+N_2+1) et nul ailleurs

-Application : $x(k) = y(k) = rect_N(k) = \Pi_N(k) = \{$ A si $-N/2 \leq k \leq N/2$ (N pair)

0 ailleurs

$\varphi\ (k) = x(k)*x(k) = \sum_{i=a}^{b} x(i)x(k-i)$, a= ? et b= ?

*Si $k \notin [-N, N]$, d'après b) $\rightarrow \varphi\ (k)=0$

*Si $k \in [-N, N]$, pour avoir $\varphi\ (k) \neq 0$,il suffit que ($-N/2 \leq i \leq N/2$ et $-N/2 \leq k-i \leq N/2$)

$\rightarrow$ ($-N/2 \leq i \leq N/2$ et $k-N/2 \leq i \leq k+N/2$)

1er cas : $k \in [-N, 0[$, $a=-N/2$ et $b= k+N/2$, d'où $\varphi\ (k)=A^2(N+1+k)$

2ème cas : $k \in [0,N]$, $a=k-N/2$ et $b= N/2$, d'où $\varphi\ (k)=A^2(N+1-k)$

Donc $\varphi_{xx}(k)$ est une fonction triangulaire discrète centrée de longueur 2N+1 et d'amplitude $(N+1)A^2$ exprimée par : $\varphi\ (k)=\{ \Lambda_{2N}(k)=(N+1)A^2(1-\frac{|k|}{N+1})$ si $k \in [-N, N]$

0 ailleurs

d) Pour répondre aux questions a) et b) pour la fonction d'intercorrélation: $\phi_{xy}(k)= \sum_{=-\infty}^{+\infty} x(i)y^*(i-k) = x(k)*y^*(-k)$, il suffit de suivre le même raisonnement que précédemment ->Fonction d'autocorrélation : $\phi_{xx}(k)= \sum_{=-\infty}^{+\infty} x(i)x^*(i-k) = x(k)*x^*(-k)$

En remarquant que $rect_N(k)$ est une fonction réelle et paire, donc $x^*(k)=x(k)$ et $x(-k)=x(k)$, d'où : $\phi_{xx}(k)= \varphi_{xx}(k)$

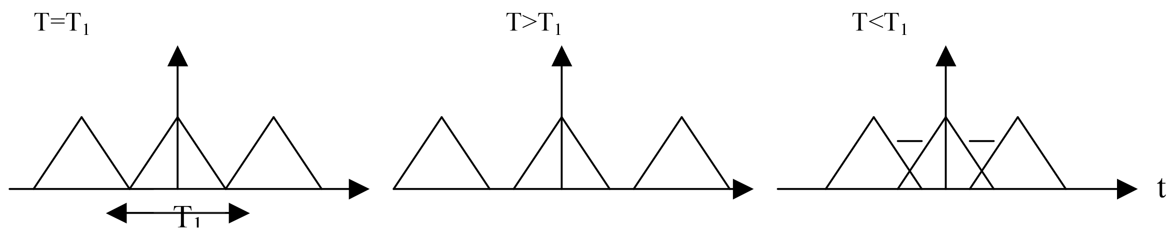
Exercice 2 :

a) $P_T(t)*x(t) =[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)]*x(t)= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\delta(t-nT)*x(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT)$

D'après exercice I partie I-b), $x(t)=\{ \Lambda_{T_1}(t)=A(1-\frac{2}{T_1}|t|)$ si $t \in]-T_1/2, T_1/2[$

0 ailleurs

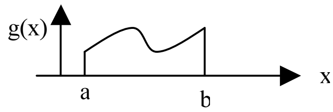
<u>Allures</u> de $P_T(t)*x(t)$:



b) $P_T(t).x(t) =[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)].x(t)= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\delta(t-nT).x(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$

Exercice 3 :

On divise l'axe des x en x_k valeurs espacées d'une longueur fixe Δx, donc $x=x_k=k.\Delta x$, ($k \in Z$). $F \cong \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k.\Delta x).\Delta x$,



$G \cong \sum_{k=?}^{?} g(k.\Delta x).\Delta x$, L'intervalle [a,b] est de longueur finie, si on le partage en N+1 valeurs, alors $\Delta x = (b-a)/N$, d'où $b=a+N.\Delta x$,par conséquent $x_k=a+k.\Delta x$ (k=0,…,N)

On a deux choix : $G \cong \sum_{k=0}^{N-1} g(a+k.\Delta x).\Delta x$ ou bien $G \cong \sum_{k=1}^{N} g(a+k.\Delta x).\Delta x$

Pour avoir une égalité exacte, il faut $\Delta x=0$. Plus Δx s'approche de 0, plus l'approximation est bonne.

Exercice 4:

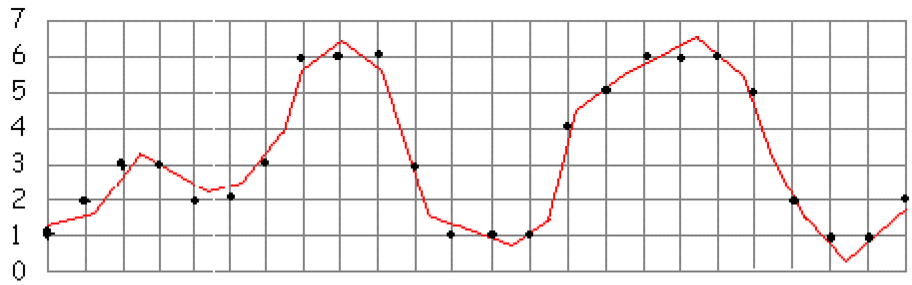
$$P_{x,Tot} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P_x(t)dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \cdot \lim_{T\to+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} P_x(t)dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{E_x}{T} = 0 \quad (\text{car } E_x \text{ finie})$$

Exercice 5:

Nombre de niveau $N=2^B$-nombre de niveau $N=2^B$
Sachant que I=[0,A] et le pas uniforme alors q=(A-0)/(N-1)=A/(N-1) ;
A.N : A=10V, B=12 → N=4096 et q=0.0024V

Exercice 6:

I=[0,28]V, N=8 → B=3bits et q=4, donc l'amplitude x(t) quantifiée devient $x_n=n.q$ (n=0, …,7)
En redéfinissant l'échelle verticale par des graduations allant de 0 à 7 (8 niveaux), on obtient la valeur de n des échantillons (en allant au plus près) :



On trouve 24 (k=0,…,23) valeurs x(k) =1 2 3 3 2 2 3 6 6 6 3 1 1 1 4 5 6 6 6 5 2 1 1 2
Le codage de ce signal numérique (chaque niveau est représenté par 3 bits) donne le signal binaire suivant :
00101001101101001001111011011001101001001100101110110110101010001001010

n= 1 2 3 3 2 2 3 6 6 6 3 1 1 1 4 5 6 6 6 5 2 1 1 2