Université Ibn Tofail **Année Universitaire 2005-2006**
Faculté des Sciences de Kénitra
Département de Physique
DESA- SCTI

Travaux Dirigés : Correction de la série no. 2
(Traitement du Signal)

Exercice 1 :

a- $x(t)=\cos(w_0t)+\sin^2(w_0t)=\frac{1}{2}[\exp(jw_0)+\exp(-jw_0)]-\frac{1}{4}[\exp(2jw_0)+\exp(-2jw_0)-2]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\exp(jnw_0t)$

donc $C_0=1/2$, $C_n=1/2$ $(n=\pm 1)$, $C_n=-1/4$ $(n=\pm 2)$ et $C_n=0$ $(n\notin\{0,\pm 1,\pm 2\})$

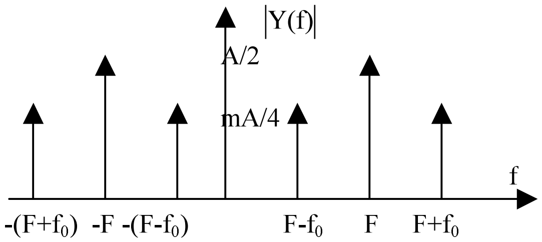
b- $P_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n.T)$ (fonction paire, période $T=1/f_0$)$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\exp(j2\pi nf_0t)$

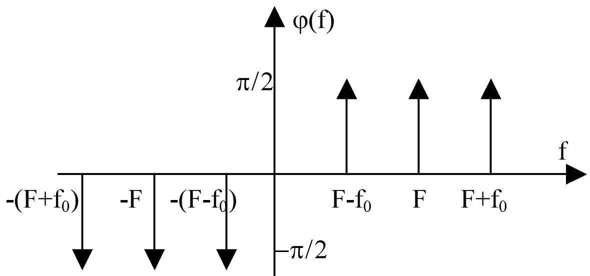
$C_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x_p(t)\exp(-j2\pi nf_0t)dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)\exp(-j2\pi nf_0t)dt=1/T$ (on a pris $t_0=-T/2$)

donc $P_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n.T)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(j2\pi n.t/T)=\frac{1}{T}+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(2\pi n.t/T)$

Exercice 2 :

a- $y(t)=A[1+m.\cos(2\pi f_0t)]\sin(2\pi F.t)=A\sin(2\pi F.t)+(mA/2)\sin[2\pi(F+f_0)t]+(mA/2)\sin[2\pi(F-f_0)t]$
En posant $\sin(u)=(\exp(ju)-\exp(ju))/(2j)$ et en utilisant la transformée de Fourier de $\exp(ju)$, on trouve :
$Y(f)=\frac{A}{2j}[\delta(f+F)-\delta(f-F)]+\frac{mA}{4j}\{\delta[f+(F+f_0)]-\delta[f-(F+f_0)]+\delta[f+(F-f_0)]-\delta[f-(F-f_0)]\}$





b- La puissance (facile à calculer dans le domaine spectral)$=(A^2/2)(1+m^2/2)$ (théorème de Parseval)

Exercice 3 :

a- $x_p(t)$ impair $(a_n=0)$, $\Rightarrow C_n=(a_n-jb_n)/2=-jb_n/2$, on calcule $b_n=\frac{2}{T}\int_0^T x_m(t)\sin(2\pi nf_0t)dt=-2a[(-1)^n-1]/(n\pi)$,

si n pair $b_n=0$, sinon $b_n=4a/(n\pi)$ $\Rightarrow x_p(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin(2\pi n.t/T)=\frac{4a}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)}\sin(2\pi(2p+1).t/T)$

Remarque :si on prend $t=T/4$, $x_p(t)=a$ $\Rightarrow a=\frac{4a}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)}$, d'où : $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)}=\frac{\pi}{4}$

b- $C_n=(a_n-jb_n)/2=-jb_n/2\Rightarrow C_{(2p+1)}=-j\frac{2a}{(2p+1)\pi}$ et $C_{2p}=0$, $p\in Z$

donc $|C_{2p}|=0$ et $\varphi_{2p}=$ indéterminée, et $|C_{(2p+1)}|=\frac{2a}{|2p+1|\pi}$ et $\varphi_{2p+1}=-\pi/2$ (p positif) et $\pi/2$ (p négatif)

c- $P_x(T)=\frac{1}{T}\int_0^T P_x(t)dt=a^2$

Remarque : $P_x(T)=a^2=C_0+2\sum_{n=1}^{+\infty}|C_n|^2=8\frac{a^2}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$ (théorème de Parseval), d'où $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

d- $f_{(2p+1)}=(2p+1)/T<20/T$ (fréquence de coupure) ➔ p<9.5, (seules les fréquences de rang impair existent) => à la sortie du filtre nous aurons (10 harmoniques $f_{(2p+1)}$ avec p=0,… ,9 .

le taux de distorsion= $\sqrt{\dfrac{8\frac{a^2}{\pi^2}\sum\limits_{p=0}^{9}\frac{1}{(2p+1)^2}}{a^2}} = \sqrt{\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{p=0}^{9}\frac{1}{(2p+1)^2}} \approx 99\%$ (presque pas de distorsion)

calculer $\sqrt{\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{p=0}^{9}\frac{1}{(2p+1)^2}}$ sur matlab, vous tapez p=0:9; taux=sqrt((8/(pi^2))*sum(1./((2*p+1).^2)))

e- Fonction d'autocorrélation d'un signal périodique $\phi_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}x(t)x^*(t-\tau)dt$

$x_p(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\exp(j2\pi nt/T)$ =>

$\phi(\tau)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n|^2\exp(j2\pi n.\tau/T)=|C_0|^2+2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|C_n|^2\cos(2\pi n.\tau/T)$ aussi périodique de période T

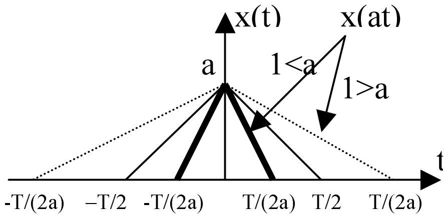
dans notre cas $\phi(\tau)=8\frac{a^2}{\pi^2}\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos[2\pi(2p+1)\tau/T]$

f- $x_1(t)=[x_m(t)+a]/2$, d'où $x_p(t)=a/2+\frac{2a}{\pi}\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)}\sin(2\pi(2p+1).t/T)$,

➔$C_0=a/2$, $C_{(2p+1)}=-j\frac{a}{(2p+1)\pi}$, $C_{2p}=0$ $(p\neq 0)$

$x_2(t)=x_m(t+T/2)$, d'où $x_p(t)=-\frac{4a}{\pi}\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)}\sin(2\pi(2p+1).t/T)$, $C_{(2p+1)}=j\frac{a}{(2p+1)\pi}$, $C_{2p}=0$

Exercice 4 :



a- $x(t)=a(1-2|t|/T)$ $-T/2<t<T/2$, x(t)=0 ailleurs
b- aire=a.T/4+a/T4=1 => a=2/T
0<|a|<1 → compression
|a|>1 → décompression
c- $x_m(t)$ (fonction paire =>b_n=0)

$x_p(t)=a_0/2+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(2\pi n.t/T)=a/2+\frac{4a}{\pi^2}\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos(2\pi(2p+1).t/T)$

Exercice 5 :

a- $\delta(t)=\lim\limits_{T\to 0}\frac{1}{T}rect_T(t)$ ==> $TF[\delta(t)]=TF[\lim\limits_{T\to 0}\frac{1}{T}rect_T(t)]=\lim\limits_{T\to 0}\frac{1}{T}TF[rect_T(t)]=\lim\limits_{T\to 0}\frac{1}{T}.T\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}=1$

b- $x(t)=A.rect_T(t-T/2)$ ➔ $TF[x(t)]=A.\,T\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}.\exp(-j\pi fT/2)=ATsinc(fT)\exp(-j\pi fT/2$

c- on sait que $TF[A.rect_T(t)]==AT\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}=A.Tsinc(fT)=Y(f)$

$Y(f)=AT\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}=\frac{\sin(f)}{f}$ => AT=1 et $\pi T=1$ ➔ $T=1/\pi$ et $A=\pi$, donc $TF[\pi\, rect_{\frac{1}{\pi}}(t)]=\frac{\sin(f)}{f}$

d'après le principe de dualité, TF[Y(t)]=x(-f), d'où $TF[\sin(t)/t]=\pi\, rect_{\frac{1}{\pi}}(t)(-f)=\pi\, rect_{\frac{1}{\pi}}(t)(f)$

D'après théorème de Parseval : $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}(TF[\sin(t)/t])^2df=\int_{-\infty}^{+\infty}[\pi.rect_{\frac{1}{\pi}}(f)]^2df$ (d'après question c)

d'où $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}dt=\pi$

d- D'après série 1, convolution de deux fenêtres rectangulaires centrées d'amplitude B et de longueur T' donne une fenêtre triangulaire de longueur 2T' et d'amplitude $T'B^2$:

$B.rect_{T'}(t)*B.rect_{T'}(t)=\Lambda_{2T'}(t)=T'B^2(1-\frac{|t|}{T'})$

Pour avoir $x(t)=A.\Lambda_T(t)$, il faut prendre $B.rect_{T'}(t)$ tel que $T'=T/2$ et $T'B^2=A$ -> $B=\sqrt{\frac{2A}{T}}$

Donc $x(t)=\sqrt{\frac{2A}{T}}\,rect_{T/2}(t)*\sqrt{\frac{2A}{T}}\,rect_{T/2}(t)$ =>$TF[x(t)]=[\sqrt{\frac{2A}{T}}(T/2)sinc(fT/2)]^2=(AT/2)[sinc(fT/2)]^2$

e- $y(t)=x(t)\cos(2\pi f_0t)=x(t).[\exp(2j\pi f_0t)+\exp(-2j\pi f_0t)]/2$
d'où $Y(f)=X(f)*[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]/2=[X(f+f_0)+X(f-f_0)]/2$
$x(t)=rect(t)$ ➔ $X(f)=Tsinc(f.T)$ ➔ $Y(f)=(T/2)\{sinc[(f+f_0)T]+sinc[(f-f_0)T]\}$ (ondulations autours de $\pm f_0$)

f- $X(f)=\frac{1}{4}[\delta(f+2f_0)+\delta(f-2f_0)+\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$

g- $TF[\delta(t-t_0)]=\exp(-2j\pi f.t_0)$,
$TF[u(t)]=\delta(f)$ (principe de dualité),
$TF[\exp(-2j\pi t.f_0)]=\delta(f-f_0)$ (principe de dualité)

h- $TF[P_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n.T)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(-2j\pi fnT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(2j\pi fnT)$

or $P_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n.T)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(j2\pi n.t/T)$ (exercice 1-b) ==> $TF[P_T(t)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(2j\pi fnT)=(1/T).P_{1/T}(f)$

i- $x(t)=signe(t)=\Gamma(t)-\Gamma(-t)$ => $TF[signe(t)]=(\frac{\delta(f)}{2}+\frac{1}{2j\pi f})-(\frac{\delta(-f)}{2}+\frac{1}{2j\pi(-f)})=\frac{1}{j\pi f}$

-TF[1/t]= ?

$\frac{1}{f}=j\pi\,TF[signe(t)]=TF[j\pi\,signe(t)]$, d'après principe de dualité $TF[1/t]=j\pi\,signe(-f)=-j\pi\,signe(f)$

j- $TF(x(t)=\exp(-\tau t)]=1/(\tau+2j\pi f)$ (en utilisant la définition de la TF)

Exercice 6:

On sait que :$TF[rect_B(t)]=B\frac{\sin(\pi fB)}{\pi fB}$ ===> $TFI[rect_B(f)]=B\frac{\sin(-\pi tB)}{-\pi tB}=B\frac{\sin(\pi tB)}{\pi tB}$ (dualité)

Donc $x(t)=[B\frac{\sin(\pi tB)}{\pi tB}\exp(j2\pi f_0t)+B\frac{\sin(\pi tB)}{\pi tB}\exp(-j2\pi f_0t)]/2=B\frac{\sin(\pi tB)}{\pi tB}\cos(2\pi f_0t)$

Exercice 7:

a- $x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_m(t-nT)=x_m(t)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$ ==> $X_p(f)=X_m(f).\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{n}{T})=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_m(\frac{n}{T})\delta(f-\frac{n}{T})$

b- $X_p(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\delta(f-nf_0)$, d'où $C_n=\frac{1}{T}X_m(\frac{n}{T})$ ==> $x_p(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_m(\frac{n}{T})\exp(2j\pi\frac{n}{T}t)$

d'où la formule de Poisson : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(t-nT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(\frac{n}{T})\exp(2j\pi\frac{n}{T}t)$

Pour t=kT ==> $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(\frac{n}{T})$

ou encore dans le domaine fréquentiel (dualité) : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(f-n/T)=T\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\exp(-2j\pi fnT)$

c- Application : $TF[x_p(t)]=TF[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}rect_\theta(t-nT)]=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\theta\frac{\sin(\pi\theta n/T)}{\pi\theta n/T}\delta(f-\frac{n}{T})$

d'où $TF[x(t)]=TF[xp(t)]*TF[\cos(2\pi f_0t)]=\frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\theta\frac{\sin(\pi\theta n/T)}{\pi\theta n/T}\delta(f-f_0-\frac{n}{T})+\frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\theta\frac{\sin(\pi\theta n/T)}{\pi\theta n/T}\delta(f+f_0-\frac{n}{T})$

Exercice 8:

a- $x_M(t)$ limité ==> $x_M(t)=x(t).w(t)$ (w(t) fenêtre rectangle et x(t) signal illimité) ===> $X_M(f)=X(f)*W(f)$
W(f) de bande infinie (sinc(f.T)) et quelque soit celle de X(f), d'après série 1, la larguer de la bande de $X_M(f)$ est la somme de celle de W(f) et X(f).

b- $y(t)=x(t)*h(t)$ ==> $Y(f)=X(f).H(f)$, donc x(t) ou h(t) est à bande limitée, y(t) le sera aussi