

Série
Schaum

Hwei P. Hsu

Communications analogiques et numériques

Cours et problèmes

434 problèmes résolus

Série **Schaum**

Communications analogiques et numériques

Cours et problèmes

Hwei P. Hsu

Fairleigh Dickinson University

Traduit par
Bernard Loubières

McGRAW-HILL

New York – St. Louis – San Francisco – Auckland
Bogotá – Caracas – Lisbonne – Londres – Madrid – Mexico
Milan – Montréal – New Delhi – Panama – San Juan
São Paulo – Singapour – Sydney – Tokyo – Toronto

Hwei P. Hsu a obtenu son baccalauréat en science à l'université nationale de Taiwan et sa maîtrise en science et son Ph.D. au *Case Institute of Technology*. Il est actuellement professeur à l'université *Fairleigh Dickinson* et directeur du département de génie électrique de cette université.

Maquette de couverture : Françoise Rojare

Copyright ©1994, McGraw-Hill, Inc., Paris.
ISBN : 2-7042-1283-X
ISSN : 0768-2727

Ce livre est traduit de l'édition américaine de Schaum's Outline of *Theory and Problems of Analog and Digital Communications*

© 1993 by McGRAW-HILL Inc., New York
ISBN : 0-07-030636-2

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les «copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective» et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, «toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droit ou ayants-cause, est illicite» (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code Pénal.

Avant-propos

Ce livre a pour ambition d'être un utile complément des ouvrages sur la théorie des communications à l'usage de l'ingénieur, mais il peut tout aussi bien être utilisé indépendamment de la littérature spécialisée. Chaque sujet y est traité au moyen d'un exposé théorique assorti de nombreux problèmes résolus (qui font partie intégrante de l'exposé).

Le chapitre 1 passe en revue les bases mathématiques permettant l'analyse des signaux et l'étude des systèmes linéaires au moyen des méthodes de Fourier. Les chapitres 2 et 3 appliquent ces méthodes à l'étude de la modulation d'amplitude et d'argument d'un signal en l'absence de bruit. Le chapitre 4 traite de l'échantillonnage et de la transmission numérique des signaux analogiques. La théorie des probabilités et les signaux aléatoires font l'objet des chapitres 5 et 6. Aucune connaissance préliminaire de ces sujets n'est requise. Le chapitre 7 concerne l'application pratique des développements qui précèdent à l'influence du bruit sur les systèmes de communication. Le chapitre 8, pour conclure, présente une théorie élémentaire de l'information et du codage.

Je tiens à remercier le Professeur Gordon Silverman, de Manhattan College, pour son aide, ses remarques et sa relecture soigneuse du manuscrit. Je n'oublierai pas non plus Jiri Naxera et Wenchang Wu qui en ont vérifié le texte et les figures. Je remercie par ailleurs M. David Burleigh pour son aide, M. John Aliano pour ses conseils avisés et son appui ainsi que Ms. Maureen Walker pour tout le soin qu'elle a mis à préparer ce livre. Enfin, ma reconnaissance va à mon épouse Daisy dont la compréhension et le soutien constant se sont révélés indispensables à la parution de cet ouvrage

Hwei P. HSU

Table des matières

Chapitre 1	SIGNAUX ET SYSTÈMES	1
	1.1. Classification des signaux	1
	1.2. Fonctions singulières	2
	1.3. Décomposition en série de Fourier	3
	1.4. Transformée de Fourier	4
	1.5. Convolution	6
	1.6. Corrélation et densité spectrale	7
	1.7. Représentation et classification d'un système	8
	1.8. Réponse impulsionnelle et réponse en fréquence	10
	1.9. Systèmes linéaires et filtrage	11
	1.10. Filtres	12
	1.11. Bande passante	15
	1.12. Relation entre densités spectrales d'entrée et de sortie d'un système	16
	Problèmes résolus	16
Chapitre 2	MODULATION D'AMPLITUDE	48
	2.1. Introduction	48
	2.2. Modulation d'amplitude	48
	2.3. Modulation à bande passante latérale double	48
	2.4. Modulation d'amplitude ordinaire	50
	2.5. Modulation à bande latérale unique	52
	2.6. Modulation à bande latérale résiduelle	55
	2.7. Transposition de fréquence et mixage	57
	2.8. Multiplexage à division de fréquence	58
	Problèmes résolus	59
Chapitre 3	MODULATION D'ARGUMENT	75
	3.1. Introduction	75
	3.2. Modulation d'argument et fréquence instantanée	75
	3.3. Modulation de phase et de fréquence	75
	3.4. Spectre de Fourier des signaux modulés en argument	77
	3.5. Modulation d'argument à bande étroite	77
	3.6. Modulation sinusoïdale (ou à fréquence pure)	78
	3.7. Largeur de bande des signaux à modulation d'argument	79
	3.8. Système de modulation d'argument	80
	3.9. Démodulation des signaux modulés en argument	81
	Problèmes résolus	83
Chapitre 4	TRANSMISSION NUMÉRIQUE DES SIGNAUX ANALOGIQUES	98
	4.1. Introduction	98
	4.2. Modulation par impulsions codées (PCM)	98
	4.3. Théorème de l'échantillonnage	98
	4.4. Échantillonnage	99
	4.5. Modulation d'impulsions en amplitude (PAM)	101
	4.6. Quantification	101
	4.7. Codage	104
	4.8. Largeur de bande de la modulation PCM	105
	4.9. Modulation delta	106

4.10.	Formatage des signaux	107
4.11.	Multiplexage temporel	109
4.12.	Bande passante requise pour le multiplex temporel	110
4.13.	Formes d'impulsion et diaphone	110
4.14.	Systèmes de modulation numérique	112
	Problèmes résolus	114
Chapitre 5	PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES	138
5.1.	Introduction	138
5.2.	Probabilités	138
5.3.	Variable aléatoires, fonctions de répartition et densités	141
5.4.	Fonctions de variables aléatoires	144
5.5.	Moyennes statistiques	145
5.6.	Lois de répartition particulières	148
	Problèmes résolus	152
Chapitre 6	SIGNAUX ALÉATOIRE ET BRUIT	184
6.1.	Introduction	184
6.2.	Définition des processus stochastiques	184
6.3.	Statistique des processus aléatoires	185
6.4.	Corrélation et densité spectrale de puissance	187
6.5.	Processus aléatoire et système linéaire	189
6.6.	Processus stochastiques remarquables	191
	Problèmes résolus	194
Chapitre 7	PERFORMANCE D'UNE LIAISON EN PRÉSENCE DE BRUIT	220
7.1.	Introduction	220
7.2.	Bruit additif et rapport signal sur bruit	220
7.3.	Bruit sur les liaisons en bande de base	221
7.4.	Bruit en modulation d'amplitude	222
7.5.	Bruit en modulation d'argument	226
7.6.	Détection d'un signal binaire et test d'hypothèse	230
7.7.	Probabilité d'erreur et maximum de vraisemblance	231
7.8.	Détection optimale	233
7.9.	Probabilité d'erreur des systèmes de transmission binaires	235
	Problèmes résolus	237
Chapitre 8	INFORMATION ET CODAGE	263
8.1.	Introduction	263
8.2.	Mesure de l'information	263
8.3.	Canaux discrets sans mémoire	265
8.4.	Information mutuelle	268
8.5.	Capacité d'un canal	269
8.6.	Canal avec bruit blanc gaussien additif	270
8.7.	Codage de source	271
8.8.	Codage entropique	273
8.9.	Codage d'un canal de transmission	274
8.10.	Codage avec contrôle d'erreur	275
8.11.	Détection et correction d'erreur en codage par blocs linéaire	278
	Problèmes résolus	279

Annexe A	TRANSFORMÉE DE FOURIER	314
Annexe B	FONCTIONS DE BESSEL $J_n(\beta)$	316
Annexe C	FONCTION COMPLÉMENTAIRE $Q(z)$ DE LA FONCTION D'ERREUR $\text{ERF}(z)$..	317
Annexe D	FORMULES MATHÉMATIQUES USUELLES	318
Annexe E	SYMBOLES MATHÉMATIQUES ET ABRÉVIATIONS	321
INDEX	325

Signaux et systèmes

1.1 CLASSIFICATION DES SIGNAUX

On appelle signal une fonction qui représente l'évolution dans le temps d'une quantité physique. La représentation mathématique d'un signal se fait au moyen d'une fonction de la variable indépendante t , où t est le temps. On désigne par exemple un signal par la notation $x(t)$.

A. Signaux continus et signaux discrets

On dit que $x(t)$ est un *signal continu* si t est une variable continue, au sens mathématique. Si t est une variable discrète, dont les valeurs ne sont définies qu'à des instants donnés, $x(t)$ est appelé *signal discret*. Ce signal étant défini à des instants précis, on le représente souvent comme une *suite* de valeurs, notée $\{x(n)\}$ ou $x[n]$, où n est un nombre entier.

B. Signaux analogiques et numériques

Lorsqu'un signal continu $x(t)$ peut prendre une valeur quelconque appartenant à l'intervalle (a,b) , où a peut valoir $-\infty$ et b peut valoir $+\infty$, on dit qu'il s'agit d'un signal *analogique*. Lorsqu'un signal discret $x[n]$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs distinctes, on dit qu'il s'agit d'un signal *numérique*.

Un signal discret $x[n]$ résulte souvent de l'échantillonnage d'un signal continu $x(t)$, avec $x[n] = x(nT_s)$, où T_s est appelé *période d'échantillonnage*. Par la suite, nous traiterons principalement de signaux continus.

C. Signaux réels et signaux complexes

On dit qu'un signal $x(t)$ est *réel* si sa valeur appartient à l'ensemble des réels. On dit qu'il est *complexe* si sa valeur appartient à l'ensemble des complexes.

D. Signaux déterministes et signaux aléatoires

La valeur d'un signal *déterministe* est parfaitement définie à tout instant. Celle d'un signal *aléatoire* ne peut être que statistiquement définie. Nous traiterons les signaux aléatoires dans le chapitre 6.

E. Signaux à énergie finie et à puissance finie

L'énergie E d'un signal $x(t)$ a pour expression :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.1)$$

La *puissance moyenne* P d'un signal $x(t)$ a pour expression :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.2)$$

Si $0 < E < \infty$, c'est-à-dire si E a une valeur finie (donc $P = 0$), on dit que $x(t)$ est un signal *transitoire*. Il est de durée limitée. Si $E = \infty$, avec $0 < P < \infty$, sa puissance est finie, on dit qu'il s'agit d'un signal *permanent*.

F. Signaux périodiques et non périodiques

Un signal $x(t)$ est dit *périodique* s'il existe un nombre positif T_0 tel que :

$$x(t + T_0) = x(t) \quad (1.3)$$

Le plus petit des nombres positifs T_0 satisfaisant à cette relation est appelé *période*, tandis que son inverse est appelé *fréquence fondamentale* f_0 :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad \text{hertz (Hz)} \quad (1.4)$$

On déduit de la relation (1.3) que :

$$x(t + nT_0) = x(t) \quad (1.5)$$

Un signal pour lequel n'existe aucune valeur T_0 satisfaisant à la relation (1.3) est dit *non périodique* ou *apériodique*.

Un signal périodique dont l'énergie par période est de valeur finie est un signal permanent dont la puissance moyenne peut être calculée sur une seule période.

1.2 FONCTIONS SINGULIÈRES

Un certain nombre de *fonctions singulières*, encore appelées *fonctions généralisées*, constituent en théorie des télécommunications une sous-classe importante de signaux apériodiques. Nous allons étudier ici deux de ces fonctions, la fonction échelon unitaire $u(t)$ et la fonction impulsion unitaire $\delta(t)$.

A. Fonction échelon unitaire

La définition de la *fonction échelon unitaire* $u(t)$ est la suivante :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

comme le représente la figure 1-1.

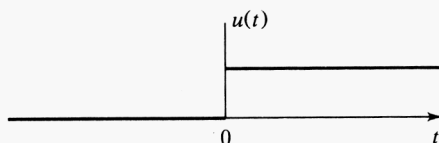


Fig. 1-1 Fonction échelon unitaire

On notera que cette fonction est discontinue en $t = 0$ et que sa valeur n'y est pas définie.

B. Fonction impulsion unitaire

La *fonction impulsion unitaire* $\delta(t)$, appelée aussi *fonction de Dirac*, n'est pas une fonction au sens propre du terme; elle est définie par une intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t) dt = \phi(0) \quad (1.7)$$

où $\phi(t)$ est une fonction quelconque, continue en $t = 0$.

On peut déduire quelques propriétés intéressantes de $\delta(t)$ de la définition (1.7) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \phi(t_0) \quad (1.8)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (1.9)$$

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (1.10)$$

$$x(t) \delta(t) = x(0) \delta(t) \quad (1.11)$$

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0) \quad (1.12)$$

Une définition différente de $\delta(t)$ peut être donnée, au moyen des deux relations suivantes :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad t_1 < t_0 < t_2 \quad (1.13)$$

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad t \neq t_0 \quad (1.14)$$

Les conditions (1.13) et (1.14) font apparaître la fonction impulsion unitaire comme limite d'une fonction dont l'aire sous la courbe conserve la valeur 1 tandis que sa largeur tend vers 0. On représente symboliquement $\delta(t)$ comme le montre la figure 1-2.

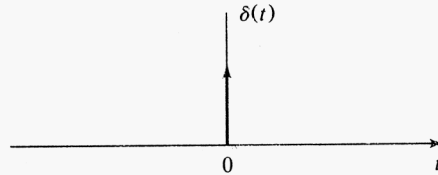


Fig. 1-2 Fonction impulsion unitaire

C. Dérivation des fonctions singulières

Si $g(t)$ est une fonction généralisée, sa dérivée $g'(t)$ se définit au moyen de la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(t) \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \phi'(t) dt \quad (1.15)$$

où $\phi'(t)$ est la dérivée de $\phi(t)$. En faisant appel à la relation (1.15), on montre que la dérivée de $u(t)$ est égale à $\delta(t)$, c'est-à-dire que

$$\delta(t) = u'(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (1.16)$$

1.3 DÉCOMPOSITION EN SÉRIE DE FOURIER

A. Série de Fourier à coefficients complexes

Soit $x(t)$ une fonction périodique de période T_0 . On définit la décomposition de $x(t)$ en série de Fourier de la façon suivante :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1.17)$$

où $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi f_0$ est la *pulsation fondamentale* et f_0 la *fréquence fondamentale* du signal. Notons que dans la suite de cet ouvrage, on parlera de fréquence alors que les formules utiliseront la variable ω pour éviter le terme pulsation, moins usité, et alléger les formules du facteur 2π qui s'introduit quand on emploie la variable

$$f = 2\pi/\omega, \quad \omega = 2\pi f$$

Les coefficients c_n sont appelés *coefficients de Fourier* de la décomposition, qui se calculent au moyen de la relation suivante :

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1.18)$$

où t_0 est une valeur quelconque. En choisissant $t_0 = -T_0/2$, il vient :

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1.19)$$

B. Spectre de fréquence

Si l'on a un signal périodique réel, alors

$$c_n = |c_n| e^{j\theta_n} \quad c_{-n} = c_n^* = |c_n| e^{-j\theta_n} \quad (1.20)$$

où $|c_n|$ est l'amplitude et θ_n la phase du coefficient c_n , l'astérisque indiquant qu'il s'agit de la valeur complexe conjuguée. On notera, au passage, que

$$|c_{-n}| = |c_n| \quad \theta_{-n} = -\theta_n \quad (1.21)$$

Le tracé de $|c_n|$ en fonction de la pulsation $\omega = 2\pi f$, ou plus simplement en fonction de la fréquence f , est appelé *spectre d'amplitude* du signal périodique $x(t)$. Le tracé de θ_n en fonction de ω constitue le *spectre de phase* de $x(t)$. L'ensemble de ces deux tracés forment le *spectre de fréquence* du signal $x(t)$. Comme l'indice n ne prend que des valeurs entières, on en déduit que le spectre de fréquence d'un signal périodique n'est défini que sur un ensemble de fréquences discrètes $n\omega_0$. C'est pourquoi l'on parle de *spectre de fréquences discrètes* et de *raies spectrales*. D'après la relation (1.21), l'on voit que le spectre d'amplitude est une fonction paire de ω tandis que le spectre de phase est une fonction impaire de ω .

C. Puissance d'un signal périodique

La *puissance* d'un signal périodique $x(t)$ de période T_0 se calcule comme moyenne quadratique du signal sur une période :

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.22)$$

D. Théorème de Parseval

Le théorème de Parseval sur les séries de Fourier établit que, si $x(t)$ est un signal périodique de période T_0 , on a :

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (1.23)$$

1.4 TRANSFORMÉE DE FOURIER

Pour étendre l'expression des séries de Fourier sous la forme (1.17) dans le domaine des fréquences au cas des fonctions non périodiques, on introduit la notion de transformée de Fourier.

A. Définition

Soit $x(t)$ un signal apériodique. On définit la *transformée de Fourier* de $x(t)$, que l'on note \mathcal{F} , au moyen de la relation suivante :

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.24)$$

La transformée de Fourier inverse de $X(\omega)$, notée \mathcal{F}^{-1} , se calcule au moyen de la relation suivante :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.25)$$

Les relations (1.24) et (1.25) définissent ce que l'on appelle *une paire de transformées de Fourier*. On peut écrire $X(\omega)$ en faisant apparaître l'amplitude et la phase, sous la forme

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (1.26)$$

Si $x(t)$ est un signal réel, on montre que :

$$X(-\omega) = X^*(\omega) = |X(\omega)| e^{-j\theta(\omega)} \quad (1.27)$$

soit

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)| \quad \theta(-\omega) = -\theta(\omega) \quad (1.28)$$

Tout comme dans le cas des séries de Fourier complexes, le *spectre d'amplitude* de $x(t)$, noté $|X(\omega)|$ est une fonction paire de ω , tandis que le *spectre de phase* $\theta(\omega)$ est une fonction impaire de ω . L'ensemble de ces deux fonctions constitue le *spectre en fréquence* de $x(t)$. La relation (1.27) constitue la condition nécessaire et suffisante pour que $x(t)$ soit un signal réel (voir problème 1.17).

B. Propriétés de la transformée de Fourier

Nous utiliserons la notation

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

pour désigner une paire de transformées de Fourier.

1. Linéarité (*superposition*)

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega) \quad (1.29)$$

où a_1 et a_2 sont des constantes.

2. Décalage temporel

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (1.30)$$

3. Décalage fréquentiel

$$x(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \quad (1.31)$$

4. Changement d'échelle

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (1.32)$$

5. Inversion du temps

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) \quad (1.33)$$

6. Dualité

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \quad (1.34)$$

7. Différentiation

Dérivée par rapport au temps :

$$x'(t) = \frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow j\omega X(\omega) \quad (1.35)$$

Dérivée par rapport à la fréquence :

$$(-jt)x(t) \leftrightarrow X'(\omega) = \frac{d}{d\omega}X(\omega) \quad (1.36)$$

8. Intégration

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega) \quad (1.37)$$

C. Transformée de Fourier de quelques signaux usuels

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (1.38)$$

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} \quad (1.39)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (1.40)$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (1.41)$$

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (1.42)$$

$$\sin \omega_0 t \leftrightarrow j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (1.43)$$

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (1.44)$$

$$e^{-at}u(t) \quad a > 0 \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + a} \quad (1.45)$$

$$e^{-a|t|} \quad a > 0 \leftrightarrow \frac{2a}{\omega^2 + a^2} \quad (1.46)$$

1.5 CONVOLUTION

La *convolution* de deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, opération que l'on note $x_1(t) * x_2(t)$ engendre un nouveau signal $x(t)$ tel que :

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau \quad (1.47)$$

A. Propriétés de la convolution

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t) \quad (1.48)$$

$$[x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) = x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] \quad (1.49)$$

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t) \quad (1.50)$$

B. Convolution avec la fonction $\delta(t)$

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \quad (1.51)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (1.52)$$

C. Théorèmes de convolution

Considérons deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dont les transformées de Fourier respectives sont $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$, on a les deux relations suivantes :

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega) \quad (1.53)$$

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega) \quad (1.54)$$

La relation (1.53) est connue sous le nom de *théorème de la convolution temporelle*, tandis que la relation (1.54) constitue le *théorème de la convolution fréquentielle*.

1.6 CORRÉLATION ET DENSITÉ SPECTRALE

A. Corrélation de deux signaux

Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux signaux à valeurs réelles. On définit l'intercorrélation $R_{12}(\tau)$ de ces deux signaux au moyen de la relation suivante :

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t - \tau) dt \quad (1.55)$$

La fonction d'*autocorrélation* du signal $x_1(t)$, intercorrélation du signal $x_1(t)$ avec lui-même, se définit au moyen de la relation suivante :

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_1(t - \tau) dt \quad (1.56)$$

Propriétés des fonctions de corrélation :

$$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau) \quad (1.57)$$

$$R_{11}(\tau) = R_{11}(-\tau) \quad (1.58)$$

$$R_{11}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t)]^2 dt = E \quad (1.59)$$

où E est l'énergie contenue dans le signal.

B. Densité spectrale énergétique

Soit $R_{11}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation du signal $x_1(t)$. L'intégrale définie S_{11} qui suit

$$S_{11}(\omega) = \mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.60)$$

est appelée *densité spectrale énergétique* du signal $x_1(t)$. Prenons maintenant les transformées de Fourier inverses des membres de la relation (1.60), il vient :

$$R_{11}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_{11}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.61)$$

Si le signal $x_1(t)$ est réel, on a les relations :

$$S_{11}(\omega) = \mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = |X_1(\omega)|^2 \quad (1.62)$$

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_1(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.63)$$

En faisant $\tau = 0$, on obtient :

$$R_{11}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_1(\omega)|^2 d\omega \quad (1.64)$$

et en utilisant la relation (1.59) :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [X_1(\omega)]^2 d\omega \quad (1.65)$$

C'est la raison pour laquelle la quantité $S_{11}(\omega) = |X_1(\omega)|^2$ est appelée densité spectrale énergétique du signal $x_1(t)$. La relation (1.65) est aussi connue sous le nom de *théorème de Parseval* relatif à la transformée de Fourier.

C. Puissance d'un signal et autocorrélation

La fonction d'autocorrélation moyennée temporellement $\bar{R}_{11}(\tau)$ d'un signal réel $x_1(t)$ se définit au moyen de la relation :

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_1(t - \tau) dt \quad (1.66)$$

Notons que

$$\bar{R}_{11}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x_1(t)]^2 dt = P_1 \quad (1.67)$$

Si le signal $x(t)$ est périodique, de période T_0 , l'intégrale se calcule sur une période, et l'on a :

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_1(t - \tau) dt \quad (1.68)$$

D. Densité spectrale de puissance

La *densité spectrale de puissance* du signal $x_1(t)$, que l'on note $\bar{S}_{11}(\omega)$, se définit comme suit :

$$\bar{S}_{11}(\omega) = \mathcal{F}[\bar{R}_{11}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_{11}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.69)$$

D'où l'on déduit que :

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\bar{S}_{11}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}_{11}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.70)$$

En faisant $\tau = 0$, il vient :

$$\bar{R}_{11}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}_{11}(\omega) d\omega \quad (1.71)$$

Et en tenant compte de la relation (1.67) :

$$P_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x_1(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}_{11}(\omega) d\omega \quad (1.72)$$

C'est bien la raison pour laquelle $\bar{S}_{11}(\omega)$ est appelée densité spectrale de puissance du signal $x_1(t)$.

1.7 REPRÉSENTATION ET CLASSIFICATION D'UN SYSTÈME

A. Représentation d'un système

On appelle système la modélisation mathématique d'un processus physique qui relie un signal d'entrée (source ou excitation) à un signal de sortie (réponse).

Soit respectivement $x(t)$ et $y(t)$ les signaux d'entrée et de sortie d'un système. On dit que le système effectue une transformation de $x(t)$ en $y(t)$. On représente cela de façon symbolique :

$$y(t) = \mathcal{P}[x(t)] \quad (1.73)$$

où \mathcal{P} est l'opérateur qui transforme $x(t)$ en $y(t)$, comme le représente la figure 1-3.

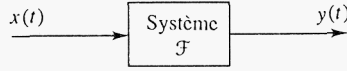


Fig. 1-3 Représentation d'un système par un opérateur

B. Classification d'un système

1. Systèmes à temps continu et systèmes à temps discrétisé

Si les signaux d'entrée et de sortie $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continues du temps, on dit qu'il s'agit d'un *système à temps continu*, appelé généralement *système analogique*. Si ces signaux sont constitués de séquences de valeurs discrètes, il s'agit d'un *système à temps discrétisé* appelé en général *système échantillonné*. Dans la suite de cet ouvrage, nous traiterons essentiellement des systèmes analogiques.

2. Systèmes linéaires

Si l'opérateur \mathcal{P} de la relation (1.73) satisfait aux deux conditions suivantes, alors \mathcal{P} est un opérateur linéaire et le système représenté par \mathcal{P} est un *système linéaire*.

a. Additivité

$$\mathcal{P}[x_1(t) + x_2(t)] = \mathcal{P}[x_1(t)] + \mathcal{P}[x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t) \quad (1.74)$$

pour tout couple de signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$.

b. Homogénéité

$$\mathcal{P}[ax(t)] = a\mathcal{P}[x(t)] = ay(t) \quad (1.75)$$

pour tout signal $x(t)$ et scalaire a .

Un système qui ne satisfait pas à la relation (1.74) et/ou à la relation (1.75) est dit *non linéaire*.

3. Système invariant dans le temps

Si un système satisfait la condition suivante, il est dit *temporellement invariant* :

$$\mathcal{P}[x(t - t_0)] = y(t - t_0) \quad (1.76)$$

où t_0 est une constante réelle quelconque. La relation (1.76) signifie qu'un retard sur le signal d'entrée produit le même retard sur le signal de sortie. Un système qui ne satisfait pas cette condition est dit *variable dans le temps*.

4. Systèmes linéaires invariants dans le temps (SLIT)

Si le système est d'une part invariant dans le temps et de plus linéaire, on dit qu'il s'agit d'un *système linéaire invariant dans le temps* (SLIT).

1.8 RÉPONSE IMPULSIONNELLE ET RÉPONSE EN FRÉQUENCE

A. Réponse impulsionnelle

La *réponse impulsionnelle* d'un système linéaire invariant dans le temps est le signal de sortie fourni par le système lorsque le signal d'entrée est la fonction $\delta(t)$, c'est-à-dire :

$$h(t) = \mathcal{P}[\delta(t)] \quad (1.77)$$

La fonction $h(t)$ est arbitraire, elle peut ne pas être de valeur nulle pour $t < 0$. Si, en revanche, on a la relation

$$h(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0 \quad (1.78)$$

le système est dit *causal*.

B. Réponse à une entrée arbitraire

La réponse $y(t)$ d'un SLIT à un signal d'entrée quelconque $x(t)$ s'exprime comme convolution de $x(t)$ avec la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système, c'est-à-dire :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (1.79)$$

comme l'opération de convolution est commutative, on peut aussi écrire la relation de la façon suivante :

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau \quad (1.80)$$

C. Réponse d'un système causal

D'après les relations (1.78) et (1.79) ou (1.80), la réponse $y(t)$ d'un système causal linéaire indépendant du temps est donnée par :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} x(t - \tau)h(\tau) d\tau \quad (1.81)$$

Un signal $x(t)$ est dit *causal* s'il est à valeurs nulles pour $t < 0$. Si le signal d'entrée est causal, on a donc :

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_0^t x(t - \tau)h(\tau) d\tau \quad (1.82)$$

D. Réponse en fréquence

Si l'on applique maintenant le théorème de la convolution (1.53) relatif à la transformée de Fourier à la relation (1.79), on obtient :

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad (1.83)$$

où $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$, $Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$, et $H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$.

$H(\omega)$ est appelée *réponse en fréquence* ou *fonction de transfert* du système. On a donc :

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (1.84)$$

La figure 1-4 illustre les relations (1.77), (1.79) et (1.83).

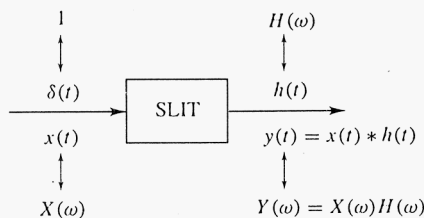


Fig. 1-4 Relations entre signaux d'entrée et de sortie d'un SLIT

En prenant la transformée de Fourier inverse de la relation (1.83), on obtient pour expression du signal de sortie :

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.85)$$

On voit ainsi que la réponse impulsionnelle $h(t)$ ou la réponse en fréquence $H(\omega)$ définit complètement le système SLIT.

1.9 SYSTÈMES LINÉAIRES ET FILTRAGE

A. Spectre de fréquence

La réponse en fréquence $H(\omega)$ est une propriété caractéristique d'un système SLIT. Il s'agit généralement d'une quantité complexe, qui peut s'écrire sous la forme :

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta_h(\omega)} \quad (1.86)$$

Dans le cas d'un SLIT dont la réponse temporelle $h(t)$ est à valeurs réelles, $H(\omega)$ satisfait la relation de symétrie-conjugaison [relation (1.27)] :

$$H(-\omega) = H^*(\omega) \quad (1.87)$$

ce qui est équivalent à :

$$|H(-\omega)| = |H(\omega)| \quad (1.88a)$$

$$\theta_h(-\omega) = -\theta_h(\omega) \quad (1.88b)$$

Ce qui montre que l'amplitude $|H(\omega)|$ est une fonction paire de la fréquence, tandis que la phase $\theta_h(\omega)$ est une fonction impaire de la fréquence. Posons

$$Y(\omega) = |Y(\omega)| e^{j\theta_y(\omega)} \quad X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta_x(\omega)}$$

On peut alors écrire la relation (1.83) sous la forme :

$$\begin{aligned} |Y(\omega)| e^{j\theta_y(\omega)} &= |X(\omega)| e^{j\theta_x(\omega)} |H(\omega)| e^{j\theta_h(\omega)} \\ &= |X(\omega)| |H(\omega)| e^{j[\theta_x(\omega) + \theta_h(\omega)]} \end{aligned} \quad (1.89)$$

On a donc

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)| |H(\omega)| \quad (1.90a)$$

$$\theta_y(\omega) = \theta_x(\omega) + \theta_h(\omega) \quad (1.90b)$$

Remarquons au passage que le spectre d'amplitude du signal de sortie est le produit du spectre d'amplitude du signal d'entrée par celui de la réponse impulsionnelle, tandis que le spectre de phase du signal de sortie est la somme du spectre de phase du signal d'entrée et de celui de la réponse impulsionnelle. On peut donc dire qu'un système SLIT filtre le signal d'entrée qui lui est appliqué. On utilise ici le mot *filtre* pour désigner un système qui présente une certaine sélectivité dans le domaine des fréquences.

B. Transmission exempte de distorsion

La transmission sans distorsion d'un signal au sein d'un système impose la reproduction fidèle en sortie du signal d'entrée. Si $x(t)$ est le signal d'entrée, le signal de sortie doit donc être de la forme

$$y(t) = K x(t - t_r) \quad (1.91)$$

où t_r est un *retard* et K une *constante de gain*, comme l'illustrent les figures 1-5(a) et 1-5(b). Si l'on prend la transformée de Fourier des deux membres de la relation (1.91), on obtient

$$Y(\omega) = K e^{-j\omega t_r} X(\omega) \quad (1.92)$$

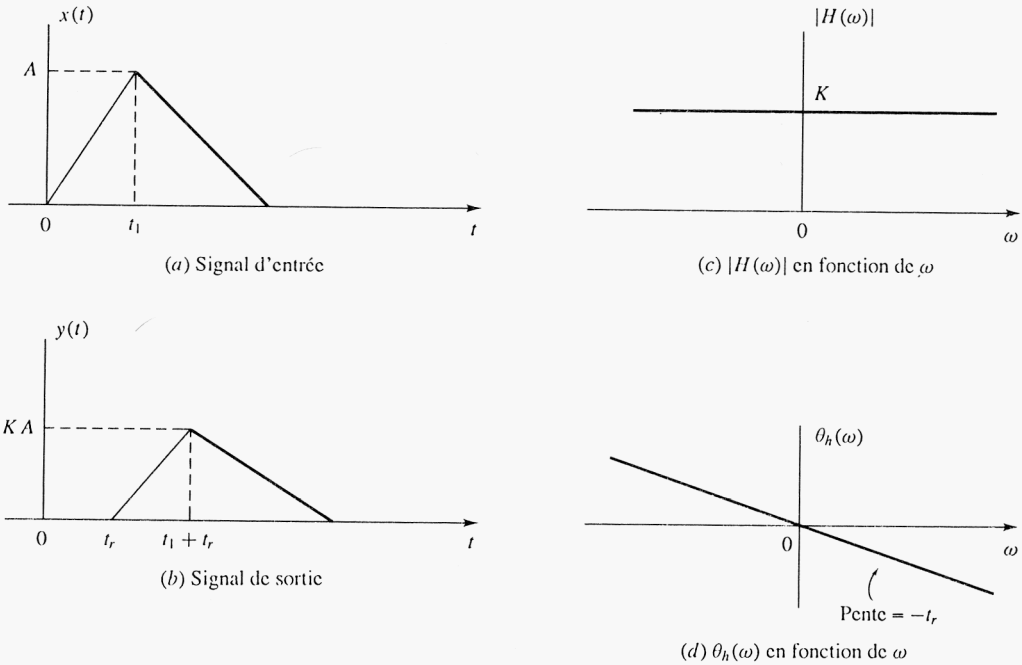


Fig. 1-5 Transmission d'un signal sans distorsion

D'après la relation (1.83), il apparaît que la condition pour qu'un système soit exempt de distorsion est :

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta_h(\omega)} = K e^{-j\omega t_r} \quad (1.93)$$

Ce qui veut dire que l'amplitude de $H(\omega)$ doit être constante quelle que soit la fréquence, tandis que la phase de $H(\omega)$ doit être une fonction linéaire de la fréquence, comme l'illustrent les figures 1-5(c) et (d).

C. Distorsion d'amplitude et distorsion de phase

Lorsque le spectre d'amplitude $|H(\omega)|$ de la réponse du système varie dans la bande de fréquence dans laquelle on travaille, les diverses composantes fréquentielles du signal sont transmises avec un gain ou une atténuation qui varie d'une fréquence à l'autre. On dit qu'il y a *distorsion d'amplitude*.

Lorsque la phase $\theta_h(\omega)$ du système ne varie pas linéairement avec la fréquence, la forme du signal de sortie diffère de celle du signal d'entrée parce que ses composantes fréquentielles sont toutes affectées de retards différents. On dit qu'il y a *distorsion de phase*.

1.10 FILTRES

Un filtre est un système dont la réponse en fréquence $H(\omega)$ évolue dans certaines bandes de fréquence. On classe les filtres en passe-haut, passe-bas, passe-bande ou coupe-bande (ce dernier étant parfois appelé réjecteur).

A. Filtre passe-bas idéal

On définit le filtre passe-bas idéal au moyen de la relation :

$$H_{PB}(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_r} & \text{pour } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.94)$$

La figure 1-6(a) représente l'amplitude et la phase de $H_{PB}(\omega)$. Le filtre passe-bas idéal transmet toutes les composantes du signal de pulsation ω inférieure à ω_c sans distorsion; $\omega_c = 2\pi f_c$ où f_c est la *fréquence de coupure* du filtre. Aucune des composantes du signal de pulsation supérieure à ω_c n'est transmise.

La réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal s'obtient en prenant la transformée de Fourier inverse de la relation (1.94), ce qui donne :

$$h_{PB}(t) = \frac{\sin \omega_c(t - t_r)}{\pi(t - t_r)} \quad (1.95)$$

La figure 1-6(b) représente la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal $h_{PB}(t)$.

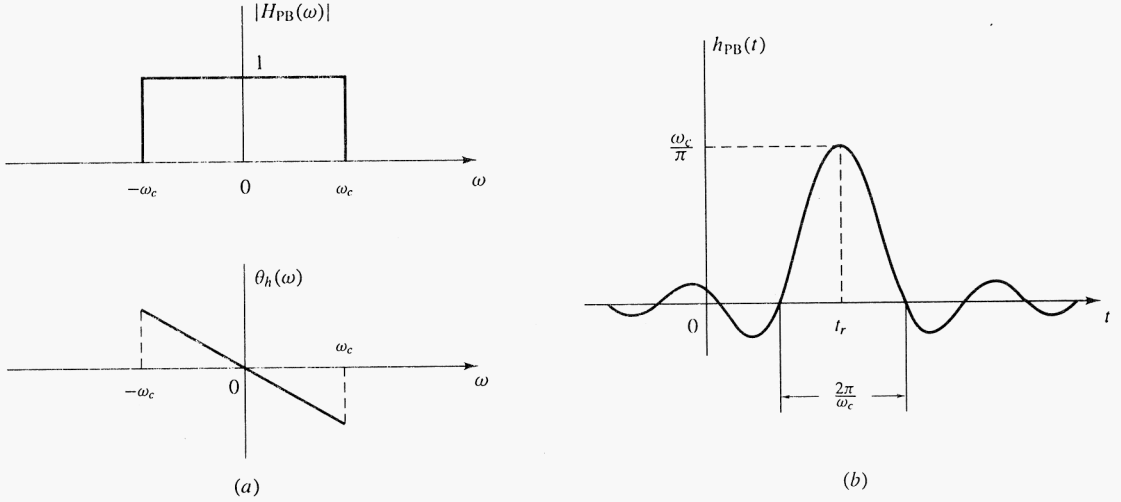


Fig. 1-6 Réponse en fréquence et réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal

B. Filtre passe-haut idéal

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut idéal répond à la définition suivante :

$$H_{PH}(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_r} & \text{pour } |\omega| \geq \omega_c \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (1.96)$$

La figure 1-7 représente la loi de variation de l'amplitude et de la phase en fonction de ω . Un filtre passe-haut idéal élimine du signal d'entrée qui lui est appliqué toutes les composantes dont la pulsation ω est inférieure à la valeur $\omega_c = 2\pi f_c$, où f_c est la fréquence de coupure. Il laisse passer sans distorsion toutes les composantes de pulsation ω supérieure à ω_c .

La réponse en fréquence d'un filtre passe-haut idéal peut s'exprimer de la façon suivante :

$$H_{PH}(\omega) = e^{-j\omega t_r} - H_{PB}(\omega) \quad (1.97)$$

où $H_{PB}(\omega)$ répond à la définition (1.94).

C. Filtre passe-bande idéal

Un filtre passe-bande idéal répond à la définition suivante :

$$H_B(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_r} & \text{pour } \omega_{c1} \leq |\omega| \leq \omega_{c2} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (1.98)$$

La figure 1-8 représente la phase et l'amplitude de $H_B(\omega)$.

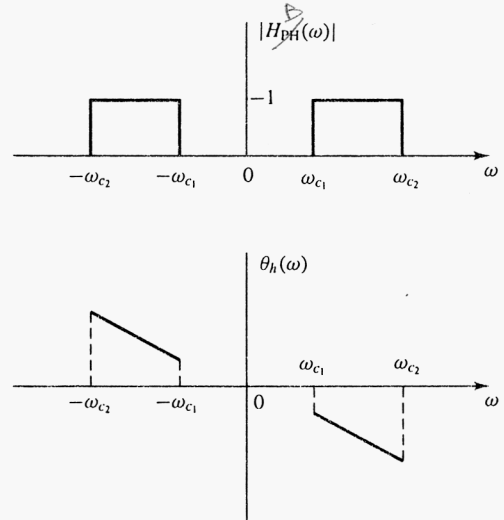
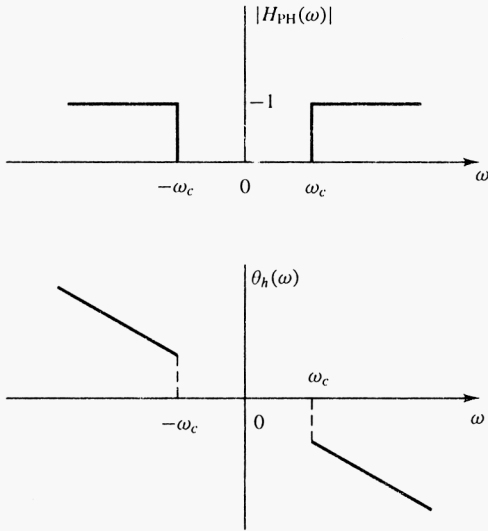


Fig. 1-7 Réponse en fréquence d'un passe-haut idéal **Fig. 1-8** Réponse en fréquence d'un passe-bande idéal

D. Filtre coupe-bande idéal

Un filtre coupe-bande idéal élimine les composantes de fréquence d'un signal dont la pulsation se situe entre les valeurs ω_{c1} et ω_{c2} , les autres composantes étant transmises sans distorsion. La figure 1-9 représente la phase et l'amplitude de la réponse en fréquence $H_{CB}(\omega)$ d'un filtre coupe-bande idéal.

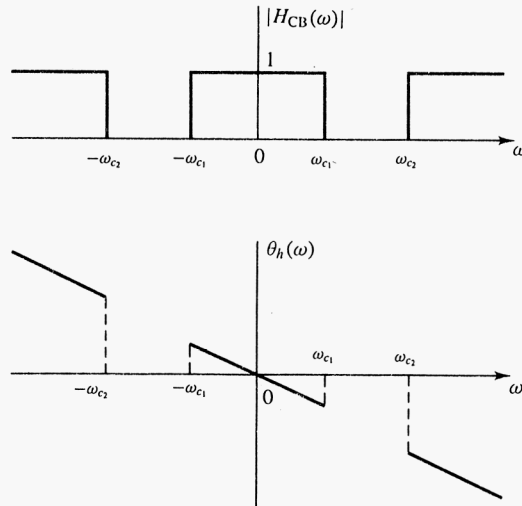


Fig. 1-9 Réponse en fréquence d'un coupe-bande idéal

La réponse en fréquence du filtre coupe-bande idéal s'exprime comme suit :

$$H_{CB}(\omega) = e^{-j\omega t_r} - H_B(\omega) \quad (1.99)$$

où $H_B(\omega)$ est donné par la relation (1.98).

E. Filtre causal

On notera que tous les filtres que nous venons de passer en revue sont du type non causal puisque $h(t) \neq 0$ pour $t < 0$. Il est impossible de réaliser des filtres idéaux. Comme le montre la relation (1.78), un filtre causal (physiquement réalisable) doit satisfaire la condition :

$$h(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$

1.11 BANDE PASSANTE

A. Bande passante d'un filtre (ou d'un système)

La bande passante B_P d'un filtre passe-bas idéal est égale à sa fréquence de coupure, c'est-à-dire (si l'on raisonne sur la pulsation) $B_P = \omega_c$ [fig. 1-6(a)]. De même, la bande passante d'un filtre passe-bande idéal est donnée par $B_P = \omega_{c_2} - \omega_{c_1}$ (fig. 1-8). Le point de pulsation médiane $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_{c_1} + \omega_{c_2})$ est la *fréquence centrale* du filtre. On dit qu'un filtre est à *bande étroite* si $B_P \ll \omega_0$. On ne définit pas de bande passante pour un filtre passe-haut ou pour un coupe-bande.

On utilise couramment pour les filtres réalisables, donc non idéaux, la notion de bande passante à 3 dB, $B_{3\text{dB}}$. Pour un passe-bas, $B_{3\text{dB}}$ est égal à la fréquence (positive) pour laquelle le spectre d'amplitude $|H(\omega)|$ franchit en décroissant une valeur égale à $|H(0)|/\sqrt{2}$, comme l'illustre la fig. 1-10(a). Pour un filtre passe-bande, $B_{3\text{dB}}$ est défini comme la différence des fréquences auxquelles le spectre d'amplitude $|H(\omega)|$ franchit en décroissant une valeur égale à $|H(\omega_0)|/\sqrt{2}$ où $|H(\omega_0)|$ est la valeur maximale du spectre d'amplitude, à la valeur ω_0 , fréquence centrale du filtre. Cette définition, quelque peu arbitraire, peut devenir ambiguë, voire multiple dans le cas de réponses en fréquence présentant plusieurs maximums, mais elle est largement répandue dans la pratique. On aura noté, au passage, que ces définitions concernent uniquement l'axe des fréquences positives, ignorant les éléments symétriques du domaine des fréquences négatives.

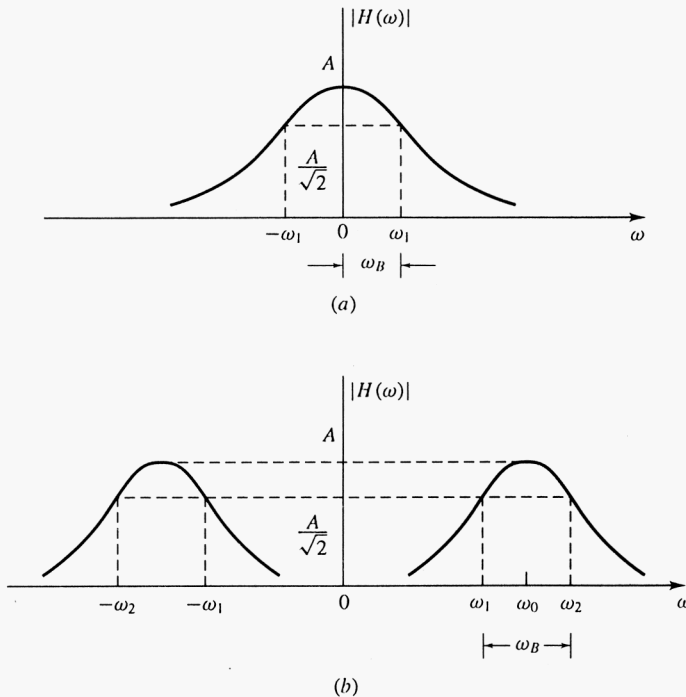


Fig. 1-10 Bande passante d'un filtre

B. Largeur de bande d'un signal

On entend par *largeur de bande d'un signal* la gamme de fréquence dans laquelle se répartit la partie *significative* de son énergie. Cette définition est ambiguë et donne donc lieu à des interprétations diverses. On retiendra que la bande passante en *puissance* d'un signal est la différence $\omega_2 - \omega_1$ où $\omega_1 < \omega < \omega_2$ définit l'intervalle de fréquence dans lequel réside 99% de la puissance du signal.

La largeur de bande d'un signal $x(t)$ peut être définie au moyen du concept de bande passante à 3 dB d'un filtre, en étudiant le spectre d'amplitude $|X(\omega)|$ du signal. C'est ainsi qu'en remplaçant $|H(\omega)|$ par $|X(\omega)|$ sur les figures 1-6, 1-7 et 1-8, on obtient les représentations de signaux respectivement de spectre basse fréquence, de spectre haute fréquence et de spectre limité en fréquence.

1.12 RELATION ENTRE DENSITÉS SPECTRALES D'ENTRÉE ET DE SORTIE D'UN SYSTÈME

Considérons un système linéaire indépendant du temps dont la fonction de transfert est $H(\omega)$ auquel est appliqué un signal d'entrée $x(t)$ et qui délivre un signal de sortie $y(t)$. S'il s'agit de signaux de durée limitée, d'après la relation (1.62) leurs densités spectrales énergétiques sont respectivement $S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$ et $S_{yy}(\omega) = |Y(\omega)|^2$. Comme $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$, il en résulte que :

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \quad (1.100)$$

Une relation semblable existe pour les signaux de durée illimitée dont on peut évaluer la puissance moyenne, en utilisant la densité spectrale de puissance de ces signaux :

$$\overline{S}_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 \overline{S}_{xx}(\omega) \quad (1.101)$$

Problèmes résolus

CLASSIFICATION DES SIGNAUX

1.1. Tracer les signaux suivants et déterminer s'il s'agit de signaux à énergie finie, à puissance finie ou n'appartenant à aucune de ces deux catégories.

- (a) $x(t) = A \sin t, -\infty < t < \infty$
- (b) $x(t) = A[u(t+a) - u(t-a)], a > 0$
- (c) $x(t) = e^{-a|t|}, a > 0$
- (d) $x(t) = u(t)$
- (e) $x(t) = tu(t)$

- (a) $x(t) = A \sin t$ (voir fig. 1-11). Comme $x(t)$ est périodique de période 2π , il s'agit d'un signal à puissance finie.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T [x(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^2 \sin^2 t dt \\ &= \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

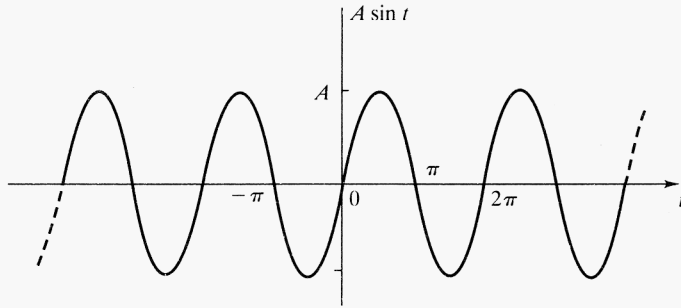


Fig. 1-11

- (b) $x(t) = A[u(t+a) - u(t-a)]$, $a > 0$ (voir fig. 1-12). Ce signal a une durée limitée, il est donc à énergie finie.

$$E = \int_{-a}^a A^2 dt = 2aA^2$$

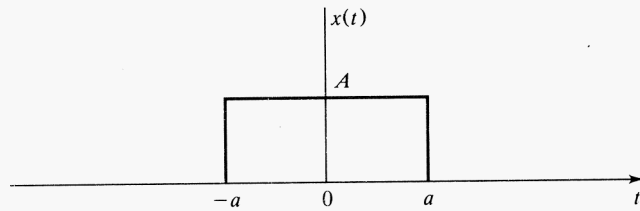


Fig. 1-12

- (c) $x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases}$ (Voir Figure 1-13.)

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{a} < \infty \end{aligned}$$

$x(t)$ est donc un signal à énergie finie.

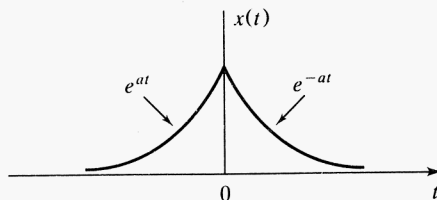


Fig. 1-13

(d) $x(t) = u(t)$ (Voir figure 1-14)

$$\begin{aligned} E &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T/2} 1^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2} = \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$x(t)$ est donc un signal à puissance finie

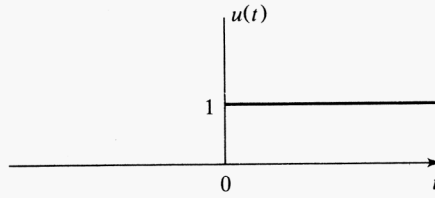


Fig. 1-14

(e) $x(t) = tu(t)$ (Voir figure 1-15.)

$$\begin{aligned} E &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T/2} t^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(T/2)^3}{3} = \infty \\ P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} t^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{(T/2)^3}{3} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T^2}{24} = \infty \end{aligned}$$

Ainsi $x(t)$ n'est ni un signal à énergie finie ni un signal à puissance finie.

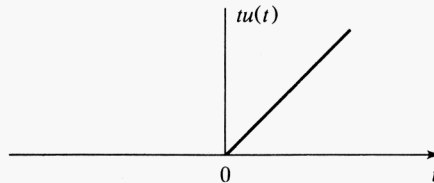


Fig. 1-15

- 1.2.** Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux signaux périodiques de périodes respectives T_1 et T_2 . Dans quelles conditions la somme

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

est-elle périodique et, dans ce cas, quelle est sa période?

D'après la relation (I.5),

$$x_1(t) = x_1(t + T_1) = x_1(t + mT_1) \quad \text{avec } m \text{ entier}$$

$$x_2(t) = x_2(t + T_2) = x_2(t + nT_2) \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

Si donc T_1 et T_2 sont tels que

$$mT_1 = nT_2 = T \quad (I.102)$$

alors

$$x(t + T) = x_1(t + T) + x_2(t + T) = x_1(t) + x_2(t) = x(t)$$

ce qui signifie que $x(t)$ est périodique. La condition pour cela est que l'on ait la relation :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m} = \text{un nombre rationnel}$$

La valeur de la période commune est le plus petit commun multiple des nombres T_1 et T_2 , déduit de la relation (I.102), lorsque m et n sont premiers entre eux. Si, en revanche, le rapport T_1/T_2 est irrationnel, les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ n'ont pas de période commune et $x(t)$ n'est pas périodique.

- 1.3.** Les signaux qui suivent sont-ils périodiques? S'ils le sont, trouver leur période.

(a) $x(t) = \cos \frac{1}{3}t + \sin \frac{1}{4}t$

(b) $x(t) = \cos t + 2 \sin \sqrt{2}t$

(a) $\cos \frac{1}{3}t$ est une fonction périodique de période $T_1 = 6\pi$, et $\sin \frac{1}{4}t$ est périodique de période $T_2 = 8\pi$. Comme $T_1/T_2 = 6\pi/8\pi = \frac{3}{4}$, valeur rationnelle, $x(t)$ est périodique, de période $T = 4T_1 = 3T_2 = 24\pi$.

(b) $\cos t$ est périodique, de période $T_1 = 2\pi$, et $\sin \sqrt{2}t$ est périodique, de période $T_2 = \sqrt{2}\pi$. Comme $T_1/T_2 = 2\pi/(\sqrt{2}\pi) = \sqrt{2}$, valeur irrationnelle, $x(t)$ n'est pas périodique.

FONCTIONS SINGULIÈRES

- 1.4.** Vérifier les propriétés (I.9) et (I.10) :

(a) $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

(b) $\delta(-t) = \delta(t)$

La démonstration de ces propriétés repose sur la *relation d'équivalence* suivante :

Soit $g_1(t)$ et $g_2(t)$ deux fonctions généralisées, il existe une relation d'équivalence qui énonce que $g_1(t) = g_2(t)$ si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \phi(t) dt \quad (I.103)$$

quelle que soit la fonction $\phi(t)$.

- (a) En faisant le changement de variable, $at = \tau$, $t = \tau/a$, $dt = (1/a)d\tau$, on obtient :

Si $a > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) \phi(t) dt &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \phi\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{a} \phi\left(\frac{\tau}{a}\right) \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{|a|} \phi(0) \end{aligned}$$

Si $a < 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t) dt &= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} \delta(\tau)\phi\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\phi\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau \\ &= -\frac{1}{a} \phi\left(\frac{\tau}{a}\right) \Big|_{\tau \rightarrow 0} = \frac{1}{|a|} \phi(0) \end{aligned}$$

Ainsi, quel que soit a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t) dt = \frac{1}{|a|} \phi(0)$$

En utilisant la relation (I.7) pour $\phi(0)$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t) dt = \frac{1}{|a|} \phi(0) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \delta(t)\phi(t) dt$$

quelle que soit la fonction $\phi(t)$. En invoquant alors l'équivalence de la relation (I.103), on obtient :

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

(b) En faisant $a = -1$ dans la relation ci-dessus, il vient :

$$\delta(-t) = \frac{1}{|-1|} \delta(t) = \delta(t)$$

ce qui montre que $\delta(t)$ est une fonction paire.

1.5. Vérifier la propriété (I.12) :

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

Si $x(t)$ est continue à $t = t_0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)\delta(t - t_0)]\phi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)[x(t)\phi(t)] dt \\ &= x(t_0)\phi(t_0) \\ &= x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\phi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_0)\delta(t - t_0)]\phi(t) dt \end{aligned}$$

et ceci quelle que soit la fonction $\phi(t)$. En invoquant la relation d'équivalence (I.103), on conclut que :

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

1.6. Montrer que les propriétés suivantes s'appliquent aussi aux dérivées de $\delta(t)$:

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta'(t) dt = -\phi'(0) \quad (I.104)$$

(b)

$$t\delta'(t) = -\delta(t) \quad (I.105)$$

- (a) En utilisant les relations (I.15) et (I.7), on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'(t) dt = -\phi'(0)$$

- (b) En utilisant à nouveau les relations (I.15) et (I.7), il vient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [t\delta'(t)]\phi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)[t\phi(t)] dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \frac{d}{dt}[t\phi(t)] dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)[\phi(t) + t\phi'(t)] dt \\ &= -[\phi(t) + t\phi'(t)]|_{t=0} \\ &= -\phi(0) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [-\delta(t)]\phi(t) dt \end{aligned}$$

En invoquant l'équivalence (I.103), on en déduit que :

$$t\delta'(t) = -\delta(t)$$

1.7. Evaluer les intégrales qui suivent.

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + \cos \pi t)\delta(t-1) dt$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta(2t-2) dt$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}\delta'(t) dt$$

(a)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + \cos \pi t)\delta(t-1) dt &= (t^2 + \cos \pi t)|_{t=1} \\ &= 1 + \cos \pi = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta(2t-2) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta[2(t-1)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \frac{1}{|2|} \delta(t-1) dt \\ &= \frac{1}{2} e^{-t} \Big|_{t=1} = \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}\delta'(t) dt &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}(e^{-2t})\delta(t) dt \\ &= 2e^{-2t} \Big|_{t=0} = 2 \end{aligned}$$

SÉRIES DE FOURIER

1.8. Trouver la série de Fourier complexe du signal :

$$x(t) = \cos \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t$$

Nous pourrions faire appel à la relation (I.19) pour calculer les coefficients de la série mais utilisons ici les formules d'Euler qui définissent le sinus et le cosinus.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) + \left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \right]^2 \\ &= \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} - \frac{1}{4}(e^{2j\omega_0 t} - 2 + e^{-2j\omega_0 t}) \\ &= -\frac{1}{4}e^{-2j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{4}e^{2j\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

On trouve en définitive que $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$, $c_2 = c_{-2} = -\frac{1}{4}$ et que tous les autres coefficients sont identiquement nuls.

1.9. Trouver la décomposition en série de Fourier du train d'impulsions $\delta_T(t)$ représenté sur la figure 1-16(a), défini par la relation

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.106)$$

Posons

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

D'après la relation (I.19), les coefficients c_n sont donnés par :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

Ainsi :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jn\omega_0 t} \quad (1.107)$$

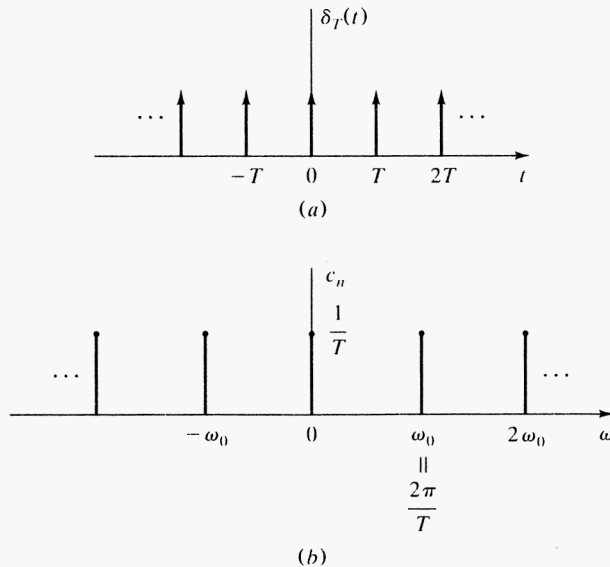


Fig. 1-16

- 1.10.** Calculer et tracer le spectre d'amplitude du signal carré périodique $x(t)$ représenté sur la figure 1-17(a) pour
 (a) $d = T/4$ et (b) $d = T/8$.

D'après la relation (1.18) (en faisant $t_0 = 0$), avec $\omega_0 = 2\pi/T$, il vient :

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T} \int_0^d e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_0^d = \frac{A}{T} \frac{1}{jn\omega_0} (1 - e^{-jn\omega_0 d}) \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 d/2} (e^{jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2}) \\
 &= \frac{Ad \sin(n\omega_0 d/2)}{T n\omega_0 d/2} e^{-jn\omega_0 d/2}
 \end{aligned} \tag{1.108}$$

On notera que $|c_n| = 0$ chaque fois que $n\omega_0 d/2 = m\pi$, soit :

$$n\omega_0 = \frac{m2\pi}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

- (a) $d = T/4$, $n\omega_0 d/2 = n\pi d/T = n\pi/4$

$$|c_n| = \frac{A}{4} \left| \frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4} \right|$$

Le spectre d'amplitude correspondant est représenté sur la figure 1-17(b).

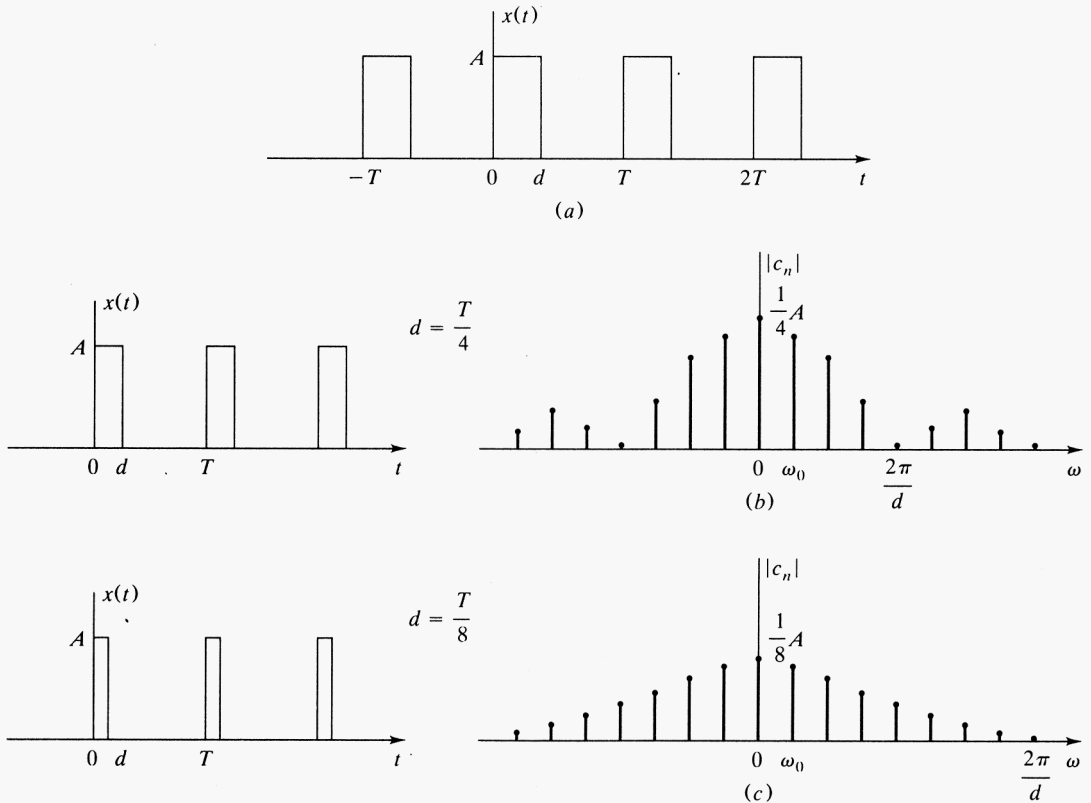


Fig. 1-17

$$(b) \quad d = T/8, n\omega_0 d/2 = n\pi d/T = n\pi/8$$

$$|c_n| = \frac{A}{8} \left| \frac{\sin(n\pi/8)}{n\pi/8} \right|$$

Le spectre d'amplitude correspondant est représenté sur la figure 1-17(c).

1.11. Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux signaux périodiques de période T , dont les séries complexes de Fourier s'expriment comme suit :

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 t} \quad x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Montrer que le signal $x_1(t)x_2(t)$ est périodique de période T et peut se mettre sous la forme

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

où c_n a pour expression :

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{n-k} \quad (1.109)$$

$$x(t+T) = x_1(t+T)x_2(t+T) = x_1(t)x_2(t) = x(t)$$

Donc $x(t)$ est périodique de période T . Posons donc

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Alors :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \right) x_2(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_2(t) e^{-j(n-k)\omega_0 t} dt \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{n-k} \end{aligned}$$

1.12. Reprenons les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ du problème 1.11. Montrer que

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e_{-n} \quad (1.110)$$

La relation (1.110) est connue sous le nom de *formule de Parseval*.

D'après le problème 1.11 et la relation (1.109), on a :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{n-k}$$

En faisant $n = 0$ dans l'expression précédente, on obtient :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e_{-n}$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

1.13. Quelle est la transformée de Fourier de l'impulsion rectangulaire $x(t)$, représentée sur la figure 1-18(a), d'expression

$$x(t) = p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases} \quad (1.111)$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{2 \sin a\omega}{\omega} = 2a \frac{\sin a\omega}{a\omega} \end{aligned} \quad (1.112)$$

La figure 1-18(b) représente la transformée de Fourier de $p_a(t)$.

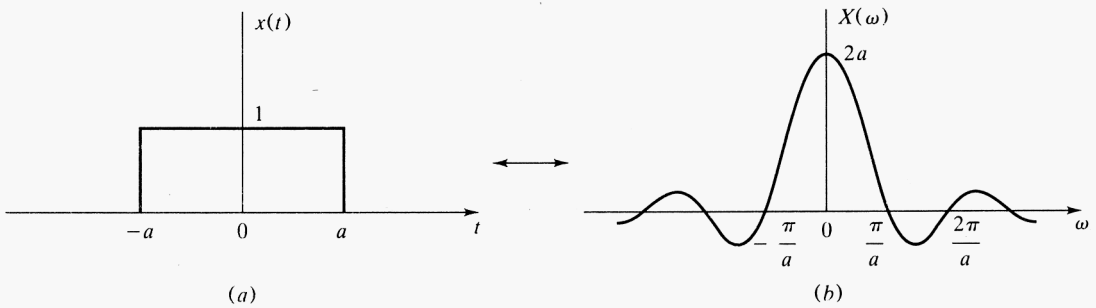


Fig. 1-18

1.14. Calculer la transformée de Fourier du signal représenté sur la figure 1-19(a), qui a pour expression :

$$x(t) = \frac{\sin at}{\pi t} \quad (1.113)$$

D'après la solution du problème 1.13, nous avons :

$$\mathcal{F}[p_a(t)] = \frac{2}{\omega} \sin a\omega$$

En invoquant la propriété de dualité (1.34) de la transformée de Fourier, il vient :

$$\mathcal{F}\left[\frac{2}{t} \sin at\right] = 2\pi p_a(-\omega)$$

Donc

$$X(\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{\sin at}{\pi t}\right] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\left[\frac{2}{t} \sin at\right] = p_a(-\omega) = p_a(\omega) \quad (1.114)$$

où $p_a(\omega)$ répond à la définition suivante [voir relation (1.111) et figure 1-19(b)] :

$$p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

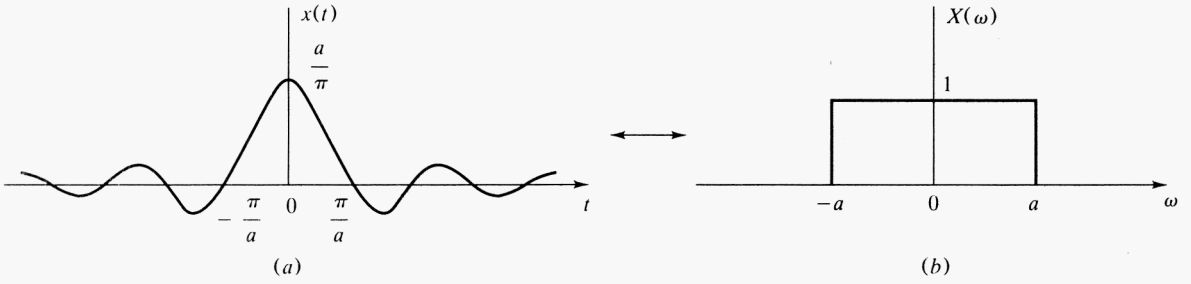


Fig. 1-19

1.15. Montrer que si

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

alors

$$x(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) \quad (1.115)$$

La relation (1.15) est connue sous le nom de *théorème de la modulation*.

En appliquant la *formule d'Euler*

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

si l'on invoque alors la propriété (1.31) relative au décalage en fréquence, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t) \cos \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}\right] \\ &= \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

1.16. La transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ a pour expression

$$X(\omega) = \frac{1}{2} p_a(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} p_a(\omega + \omega_0)$$

Trouver l'expression de $x(t)$ et en donner la représentation graphique.

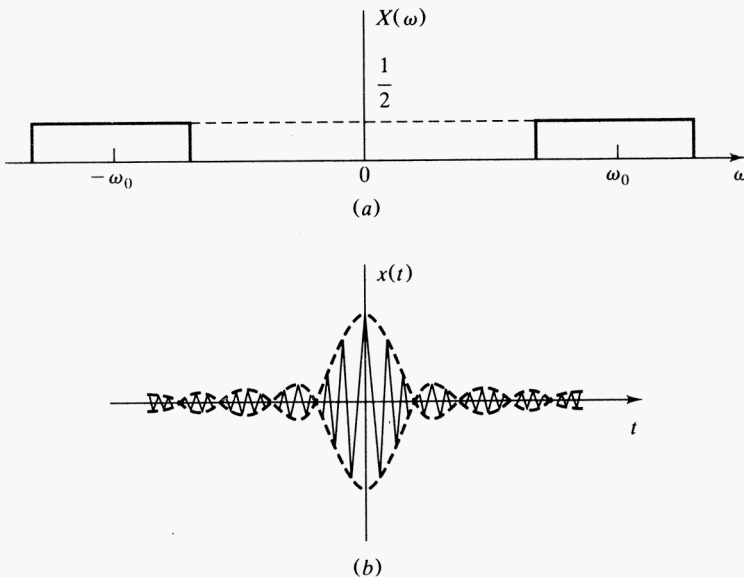


Fig. 1-20

D'après la relation (1.114) et le théorème de la modulation, on peut écrire :

$$x(t) = \frac{\sin at}{\pi t} \cos \omega_0 t$$

fonction que l'on a représentée sur la figure 1.20(b).

1.17. Soit $x(t)$ un signal réel et sa transformée $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$, montrer que l'on a :

$$\mathcal{F}[x(-t)] = X(-\omega) = X^*(\omega) \quad (1.116)$$

D'après la définition (1.24) on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(-t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j(-\omega)\lambda} d\lambda = X(-\omega) \end{aligned}$$

Si donc $x(t)$ est un signal réel,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \right]^* = X^*(\omega)$$

D'où finalement :

$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

1.18. Considérons un signal réel $x(t)$ et sa transformée :

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = A(\omega) + jB(\omega) \quad (1.117)$$

(a) Montrer que $x(t)$ peut se décomposer comme suit :

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t) \quad (1.118)$$

où $x_p(t)$ et $x_i(t)$ sont les composantes respectivement paire et impaire de $x(t)$.

(b) Montrer que :

$$x_p(t) \leftrightarrow A(\omega) \quad (1.119)$$

$$x_i(t) \leftrightarrow jB(\omega) \quad (1.120)$$

(a) Posons

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

alors

$$x(-t) = x_p(-t) + x_i(-t) = x_p(t) - x_i(t)$$

et l'on a :

$$x_p(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad (1.121a)$$

$$x_i(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad (1.121b)$$

(b) Maintenant, si $x(t)$ est un signal réel, d'après la relation (1.116) du problème 1.17, on a :

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

$$\mathcal{F}[x(-t)] = X(-\omega) = X^*(\omega) = A(\omega) - jB(\omega)$$

D'où l'on conclut que

$$\mathcal{F}[x_p(t)] = \frac{1}{2}X(\omega) + \frac{1}{2}X^*(\omega) = A(\omega)$$

$$\mathcal{F}[x_i(t)] = \frac{1}{2}X(\omega) - \frac{1}{2}X^*(\omega) = jB(\omega)$$

Les relations (1.119) et (1.120) montrent que la transformée de Fourier d'un signal réel pair est une fonction réelle de ω et que celle d'un signal réel impair est une fonction imaginaire pure de ω .

- 1.19.** Trouver la transformée de Fourier de la fonction *signe* notée $\text{sgn}(t)$ (voir fig. 1-21), définie de la façon suivante :

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (1.122)$$

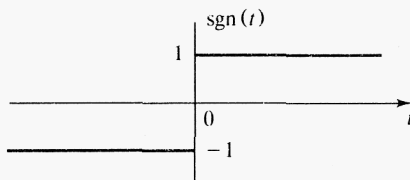


Fig. 1-21 Fonction signe

La fonction signe $\text{sgn}(t)$ peut aussi s'exprimer de la façon suivante :

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

La relation (1.16) permet d'écrire

$$\frac{d}{dt} \text{sgn}(t) = 2\delta(t)$$

Soit

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = X(\omega)$$

En appliquant le théorème de dérivation (1.35), on obtient :

$$j\omega X(\omega) = \mathcal{F}[2\delta(t)] = 2$$

et

$$X(\omega) = \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega} \quad (1.123)$$

On aura remarqué au passage que $\text{sgn}(t)$ est une fonction impaire et que, donc, sa transformée de Fourier est une fonction imaginaire pure de ω .

- 1.20.** Vérifier la relation (1.44), qui établit que :

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Comme on l'a vu sur la figure 1-22, $u(t)$ peut s'exprimer de la façon suivante :

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$$

Notons que $\frac{1}{2}$ est la composante paire de $u(t)$ et que $\frac{1}{2}\text{sgn}(t)$ est la composante impaire de $u(t)$, il en résulte que :

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[1] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[\text{sgn}(t)]$$

ce qui devient, en invoquant les relations (1.40) et (1.123) :

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

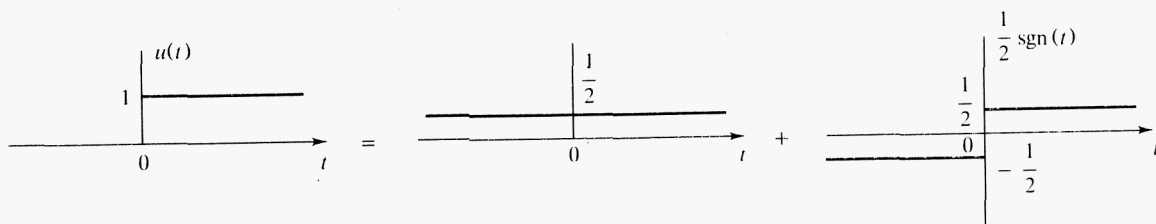


Fig. 1-22 Fonction échelon unitaire et ses composantes paire et impaire

1.21. Quelle est la structure de la transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ périodique, de période T ?

On peut exprimer $x(t)$ sous la forme :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

En prenant la transformée de Fourier des deux membres de cette relation et en tenant compte de la relation (1.41), on obtient :

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (1.124)$$

La transformée de Fourier d'un signal périodique se compose d'une suite de raies aux fréquences harmoniques de la fréquence fondamentale du signal.

1.22. Calculer la transformée de Fourier du train d'impulsions périodique $\delta_T(t)$ [figure 1-23(a) et relation (1.106)].

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

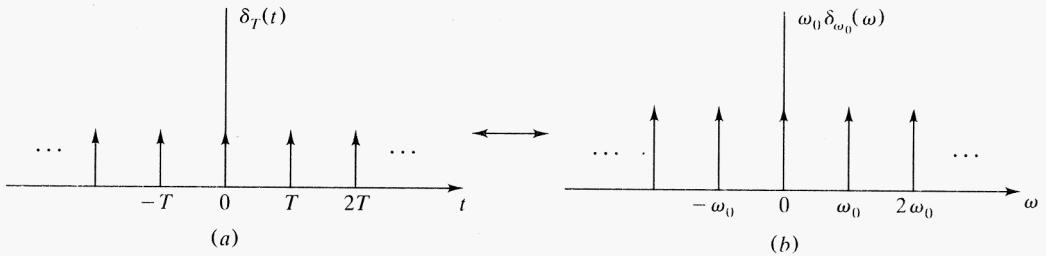


Fig. 1-23 Train d'impulsions unitaires et sa transformée de Fourier

D'après la relation (1.107) du problème 1.9, le développement en série de Fourier complexe de $\delta_T(t)$ est le suivant :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

En appliquant la relation (1.24) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta_T(t)] &= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) \end{aligned}$$

or il se trouve que :

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right] = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad (1.125)$$

Il en résulte que la transformée de Fourier d'un train d'impulsions unitaires de période T est aussi un train d'impulsion unitaire, de période $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ [voir fig. 1-23 (b)].

CONVOLUTION

1.23. Démontrer la relation (1.52), qui énonce que :

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Si l'on invoque la propriété (1.48) de commutativité de la convolution ainsi que la propriété (1.8) relative à la fonction δ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t - t_0) &= \delta(t - t_0) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0) x(t - \tau) d\tau \\ &= x(t - \tau)|_{\tau=t_0} = x(t - t_0) \end{aligned}$$

1.24. Montrer que

$$x(t) * \delta'(t) = x'(t) \quad (1.126)$$

Il nous sera utile de démontrer tout d'abord que :

$$\delta'(-t) = -\delta'(t) \quad (1.127)$$

Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(-t) \phi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) \phi(-t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi'(-t) dt \quad \text{relation (1.15)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi'(t) dt \quad \text{puisque } \phi'(-t) = -\phi'(t) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) \phi(t) dt \quad \text{relation (1.15)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [-\delta'(t)] \phi(t) dt \end{aligned}$$

Si l'on invoque la propriété d'équivalence (1.103),

$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

et d'après la définition de la convolution (1.47) :

$$\begin{aligned} x(t) * \delta'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta'(t - \tau) d\tau \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta'(\tau - t) d\tau \quad \text{relation (1.127)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x'(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = x'(t) \quad \text{relation (1.15)} \end{aligned}$$

1.25. Démontrer le théorème temporel de la convolution (1.53), à savoir :

$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &\leftrightarrow X_1(\omega) X_2(\omega) \\ \mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

En échangeant l'ordre des intégrations, il vient :

$$\mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

Et en appliquant la propriété de translation temporelle (I.30) de la transformée de Fourier,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = X_2(\omega) e^{-j\omega \tau}$$

On obtient en définitive :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) X_2(\omega) e^{-j\omega \tau} d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right] X_2(\omega) = X_1(\omega) X_2(\omega) \end{aligned}$$

1.26. Montrer que :

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

et calculer sa transformée de Fourier.

D'après la définition de la convolution (I.47), on a :

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Puisque

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \tau < t \\ 0 & \tau > t \end{cases}$$

Ensuite, en invoquant le théorème de la convolution (I.53) et la relation (I.44), il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] &= X(\omega) \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \\ &= \pi X(\omega) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega) \\ &= \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega) \end{aligned}$$

Puisque $X(\omega) \delta(\omega) = X(0) \delta(\omega)$ d'après la relation (I.11).

1.27. Montrer que, si $x(t)$ est un signal dont la bande passante est limitée, c'est-à-dire

$$X(\omega) = 0 \quad \text{pour } |\omega| > \omega_c$$

alors

$$x(t) * \frac{\sin at}{\pi t} = x(t) \quad \text{si } a > \omega_c$$

D'après le problème 1.14, on a :

$$\frac{\sin at}{\pi t} \leftrightarrow p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

On a aussi, d'après le théorème de la convolution (I.53),

$$x(t) * \frac{\sin at}{\pi t} \leftrightarrow X(\omega) p_a(\omega) = X(\omega) \quad \text{si } a > \omega_c$$

D'où :

$$x(t) * \frac{\sin at}{\pi t} = x(t) \quad \text{si } a > \omega_c$$

- 1.28.** Utiliser le théorème de convolution relatif au domaine des fréquences (I.54) pour déduire le théorème de la modulation (I.115). (Voir problème 1.15.)

D'après la relation (I.42), on a :

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$

D'après le théorème de la convolution (I.54),

$$x(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * [\pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)] = \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0)$$

la seconde égalité résulte de la relation (I.52).

- 1.29.** Soit deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dont les transformées de Fourier sont, respectivement, $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$. Montrer que l'on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega) d\omega \quad (I.128)$$

D'après le théorème de la convolution (I.54), nous avons :

$$\mathcal{F}[x_1(t)x_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(\omega - \lambda) d\lambda$$

C'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t)x_2(t)]e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(\omega - \lambda) d\lambda$$

En faisant $\omega = 0$, il vient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(-\lambda) d\lambda$$

Et en changeant le nom de la variable muette d'intégration :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega) d\omega$$

- 1.30.** Démontrer le théorème de Parseval [relation (I.65)] pour la transformée de Fourier.

Si $x(t)$ est réel, on déduit de la relation (I.116) du problème 1.17 l'égalité suivante :

$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

En utilisant la relation (I.128) du problème 1.29, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t)]^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_1(-\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_1^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_1(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

CORRÉLATION ET DENSITÉ SPECTRALE

- 1.31.** Calculer et tracer la fonction d'autocorrélation $R_{11}(\tau)$ de la fonction

$$x_1(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$$

D'après la définition (I.55) de l'autocorrélation,

$$\begin{aligned} R_{11}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_1(t - \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-a(t-\tau)}u(t - \tau) dt \\ &= e^{a\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at}u(t)u(t - \tau) dt \end{aligned}$$

Pour $\tau > 0$ on a :

$$u(t)u(t - \tau) = \begin{cases} 1 & t > \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

Ainsi,

$$R_{11}(\tau) = e^{a\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} e^{-a\tau}$$

Comme $R_{11}(\tau)$ est une fonction paire de τ [relation (1.58)], on en déduit que :

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{2a} e^{-a|\tau|} \quad a > 0$$

ce qu'illustre la figure 1-24.

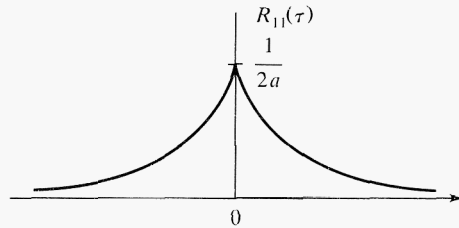


Fig. 1-24

- 1.32.** Montrer que la fonction d'intercorrélation des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ peut s'écrire sous forme d'une convolution :

$$R_{12}(\tau) = x_1(\tau) * x_2(-\tau) \quad (1.129)$$

Si l'on applique la définition de la convolution :

$$\begin{aligned} x_1(\tau) * x_2(-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda) x_2[-(\tau - \lambda)] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda) x_2(\lambda - \tau) d\lambda = R_{12}(\tau) \end{aligned}$$

- 1.33.** Montrer que si

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(\omega) \quad \text{et} \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(\omega)$$

Alors

$$\mathcal{F}[R_{12}(\tau)] = X_1(\omega) X_2(-\omega) \quad (1.130)$$

$$\mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = X_1(\omega) X_1(-\omega) \quad (1.131)$$

D'après la propriété d'inversion du temps (1.33) de la transformée de Fourier :

$$x(-\tau) \leftrightarrow X(-\omega)$$

En appliquant le théorème de la convolution (1.53) à la relation (1.129), on obtient :

$$\mathcal{F}[R_{12}(\tau)] = X_1(\omega) X_2(-\omega)$$

Et en faisant $x_2(t) = x_1(t)$, il vient :

$$\mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = X_1(\omega) X_1(-\omega)$$

- 1.34.** Démontrer la relation (1.62) qui établit, si $x_1(t)$ est réel, que :

$$S_{11}(\omega) = \mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = |X_1(\omega)|^2$$

Si $x_1(t)$ est réel, on peut écrire, d'après la relation (1.116) du problème 1.17 :

$$x_1(-t) \leftrightarrow X_1(-\omega) = X_1^*(\omega)$$

Et en appliquant la relation (I.13) nous obtenons :

$$S_{11}(\omega) = \mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = X_1(\omega)X_1(-\omega) = X_1(\omega)X_1^*(\omega) = |X_1(\omega)|^2$$

1.35. Vérifier la relation (I.62) pour $x_1(t) = e^{-at}u(t)$.

D'après la relation (I.45),

$$X_1(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

donc

$$|X_1(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + a^2}$$

Nous avons aussi, d'après le problème 1.31 :

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{2a} e^{-a|\tau|} \quad a > 0$$

Et d'après la relation (I.46) :

$$S_{11}(\omega) = \mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = \frac{1}{\omega^2 + a^2} = |X_1(\omega)|^2$$

1.36. Montrer que la fonction d'autocorrélation moyennée temporellement d'un signal périodique de période T_1 est périodique et de même période.

Soit $x_1(t)$ un signal périodique de période T_1 . On peut écrire que :

$$x_1(t) = x_1(t + T_1)$$

$$x_1(t - \tau) = x_1(t - \tau + T_1)$$

En appliquant la relation (I.68)

$$\begin{aligned} \bar{R}_{11}(\tau - T_1) &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t)x_1[t - (\tau - T_1)] dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t)x_1(t - \tau + T_1) dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t)x_1(t - \tau) dt \\ &= \bar{R}_{11}(\tau) \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\bar{R}_{11}(\tau)$ est périodique, de période T_1 .

1.37. Calculer la fonction d'autocorrélation moyennée temporellement du signal sinusoïdal :

$$x_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \phi) \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

D'après la relation (I.68),

$$\begin{aligned} \bar{R}_{11}(\tau) &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t)x_1(t - \tau) dt \\ &= \frac{A^2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \sin(\omega_1 t + \phi) \sin[(\omega_1(t - \tau) + \phi)] dt \\ &= \frac{A^2}{2T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} [\cos \omega_1 \tau - \cos(2\omega_1 t + 2\phi - \omega_1 \tau)] dt \\ &= \frac{A^2}{2T_1} \cos \omega_1 \tau \int_{-T_1/2}^{T_1/2} dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega_1 \tau \end{aligned} \quad (I.132)$$

1.38. Vérifier la relation (I.72) pour le signal sinusoïdal du problème 1.37.

D'après les résultats obtenus au problème 1.37, la relation (I.132), et en invoquant la relation (I.142), l'expression de la densité spectrale de puissance $\overline{S}_{11}(\omega)$ de $x_1(t)$ est la suivante :

$$\overline{S}_{11}(\omega) = \mathcal{F}[\overline{R}_{11}(\tau)] = \frac{\pi A^2}{2} \delta(\omega - \omega_1) + \frac{\pi A^2}{2} \delta(\omega + \omega_1)$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S}_{11}(\omega) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\pi A^2}{2} \delta(\omega - \omega_1) + \frac{\pi A^2}{2} \delta(\omega + \omega_1) \right] d\omega \\ &= \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)] d\omega \\ &= \frac{A^2}{4} (1 + 1) = \frac{A^2}{2} = P_1 \end{aligned}$$

Où P_1 est la puissance moyenne du signal $x_1(t)$ sur une période.

REPRÉSENTATION ET CLASSIFICATION DES SYSTÈMES

1.39. Considérons le système dont la relation entre signal d'entrée $x(t)$ et le signal de sortie $y(t)$ est linéaire :

$$y(t) = ax(t) + b$$

où a et b sont des constantes. Peut-on dire que ce système est linéaire ?

On représente la relation entre signal d'entrée et signal de sortie au moyen d'un opérateur \mathcal{P} , tel que :

$$y(t) = \mathcal{P}[x(t)] = ax(t) + b$$

Considérons deux signaux d'entrée $x_1(t)$ et $x_2(t)$, les signaux de sortie correspondants seront respectivement :

$$y_1(t) = \mathcal{P}[x_1(t)] = ax_1(t) + b$$

$$y_2(t) = \mathcal{P}[x_2(t)] = ax_2(t) + b$$

Si l'on applique maintenant un signal $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, le signal de sortie s'exprime comme suit :

$$y(t) = \mathcal{P}[x_1(t) + x_2(t)] = a[x_1(t) + x_2(t)] + b$$

On constate que

$$y(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$$

ce qui prouve que la propriété d'additivité (I.74) n'est pas satisfaite et que le système n'est donc pas linéaire.

D'ailleurs, la propriété d'homogénéité (I.75) n'est pas satisfaite non plus puisque

$$\mathcal{P}[2x(t)] = 2ax(t) + b \neq 2y(t)$$

1.40. Déterminer si les systèmes proposés ci-après sont linéaires ou non.

(a) $\mathcal{P}[x(t)] = x(t) \cos \omega_c t$

(b) $\mathcal{P}[x(t)] = [A + x(t)] \cos \omega_c t$

(a)
$$\begin{aligned} \mathcal{P}[x_1(t) + x_2(t)] &= [x_1(t) + x_2(t)] \cos \omega_c t \\ &= x_1(t) \cos \omega_c t + x_2(t) \cos \omega_c t \\ &= \mathcal{P}[x_1(t)] + \mathcal{P}[x_2(t)] \\ \mathcal{P}[\alpha x(t)] &= [\alpha x(t)] \cos \omega_c t = \alpha \mathcal{P}[x(t)] \end{aligned}$$

Le système (a) est donc linéaire.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}[x_1(t) + x_2(t)] &= [A + x_1(t) + x_2(t)] \cos \omega_c t \\
&\neq \mathcal{P}[x_1(t)] + \mathcal{P}[x_2(t)] \\
&= [A + x_1(t)] \cos \omega_c t + [A + x_2(t)] \cos \omega_c t \\
&= [2A + x_1(t) + x_2(t)] \cos \omega_c t
\end{aligned}$$

Le système (b) n'est donc pas linéaire. Il ne satisfait pas non plus à la condition d'homogénéité (1.75). On retiendra au passage que le système (a) est appelé *modulateur équilibré*. Il est utilisé en télécommunication pour obtenir la modulation d'amplitude de la fréquence porteuse (voir paragraphe 2.3 de cet ouvrage) au moyen de deux bandes latérales symétriques, d'où l'appellation DBL (double bande latérale) de ce procédé. Le système (b) correspond à un modulateur couramment utilisé en modulation d'amplitude *classique* (voir paragraphe 2.4).

1.41. Considérons le système représenté par la relation :

$$\mathcal{P}[x(t)] = x^*(t)$$

où $x^*(t)$ est le complexe conjugué de $x(t)$. Ce système est-il linéaire ?

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}[x_1(t) + x_2(t)] &= [x_1(t) + x_2(t)]^* = x_1^*(t) + x_2^*(t) \\
&= \mathcal{P}[x_1(t)] + \mathcal{P}[x_2(t)]
\end{aligned}$$

La condition d'additivité des signaux est bien remplie et il faut maintenant vérifier si la condition d'homogénéité (1.75) est satisfaite. Soit donc α une constante quelconque,

$$\mathcal{P}[\alpha x(t)] = [\alpha x(t)]^* = \alpha^* x^*(t) = \alpha^* \mathcal{P}[x(t)] \neq \alpha \mathcal{P}[x(t)]$$

ce qui montre que ce système ne répond pas à la définition d'un système linéaire.

1.42. Considérons un système dont l'entrée et la sortie sont reliées comme suit :

$$y(t) = x(t) \delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

(a) S'agit-il d'un système linéaire ?

(b) Ce système est-il invariant dans le temps ?

(a) Soit $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Alors :

$$\begin{aligned}
y(t) &= [x_1(t) + x_2(t)] \delta_T(t) = x_1(t) \delta_T(t) + x_2(t) \delta_T(t) \\
&= y_1(t) + y_2(t)
\end{aligned}$$

De même, soit $x(t) = \alpha x_1(t)$, on a :

$$y(t) = [\alpha x_1(t)] \delta_T(t) = \alpha [x_1(t) \delta_T(t)] = \alpha y_1(t)$$

Ce système est donc linéaire.

(b) Soit le signal

$$x_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

alors

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(nT) \delta(t - nT) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{T}nT\right) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)
\end{aligned}$$

Considérons maintenant le signal d'entrée

$$x_2(t) = x_1\left(t - \frac{T}{4}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

1.52. Considérons un filtre de fonction de transfert $H(\omega) = 1/(1 + j\omega)$ auquel on applique un signal d'entrée $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

- (a) Calculer la densité spectrale énergétique du signal de sortie.
 (b) Montrer que l'énergie délivrée en sortie est le tiers de celle qui est fournie à l'entrée du filtre.
 (a)

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + 4}$$

La densité spectrale énergétique du signal de sortie, d'après la relation (1.99), s'exprime comme suit :

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{\omega^2 + 1} - \frac{1}{3} \frac{1}{\omega^2 + 4}$$

- (b) En invoquant le *théorème de Parseval* (1.65) et en tenant compte des relations suivantes :

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0 \rightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad |X(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + a^2}$$

on obtient :

$$E_{\text{entrée}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 + 4} = \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{1}{4}$$

$$E_{\text{sortie}} = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-2t} dt - \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-4t} dt$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} E_{\text{entrée}}$$

1.53. Considérons un différentiateur idéal tel que le représente la figure 1-31(a). On applique à son entrée un signal dont la densité spectrale de puissance est représentée sur la figure 1-31(b). Calculer et tracer la densité spectrale de puissance du signal de sortie. Evaluer la moyenne quadratique de ce signal.

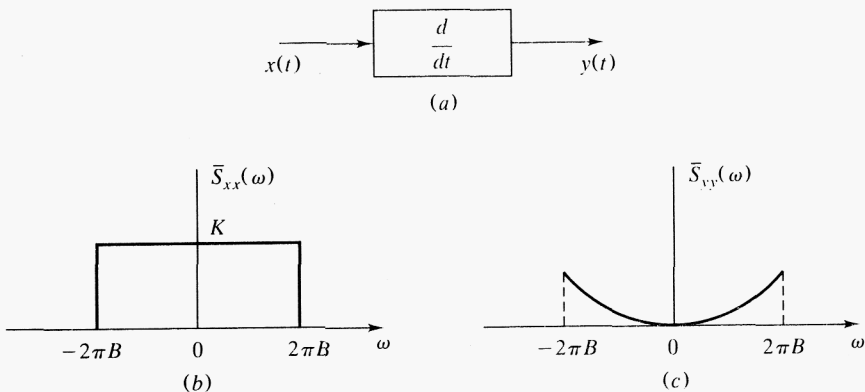


Fig. 1-31

D'après la relation (1.35), on peut écrire :

$$H(\omega) = j\omega$$

En invoquant la relation (1.100), on obtient :

$$\overline{S}_{yy}(\omega) = |j\omega|^2 \overline{S}_{xx}(\omega) = \omega^2 \overline{S}_{xx}(\omega)$$

courbe représentée sur la figure 1-31(c).

D'après la relation (1.72), la moyenne quadratique de $y(t)$ s'obtient en évaluant l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [y(t)]^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S}_{yy}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} K \omega^2 d\omega \\ &= \frac{K}{\pi} \int_0^{2\pi B} \omega^2 d\omega = \frac{8\pi^2 K B^3}{3} \end{aligned}$$

Problèmes supplémentaires

1.54. Montrer que si

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\ x^{(n)}(t) &= \frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega) \end{aligned}$$

Indication : Appliquer n fois le théorème de la dérivation (1.35).

1.55. Appliquer les méthodes de dérivation et le résultat obtenu au problème 1.54 pour obtenir la transformée de Fourier de l'impulsion triangulaire représentée sur la figure 1-32.

Réponse :

$$Ad \left[\frac{\sin(\omega d/2)}{\omega d/2} \right]^2$$

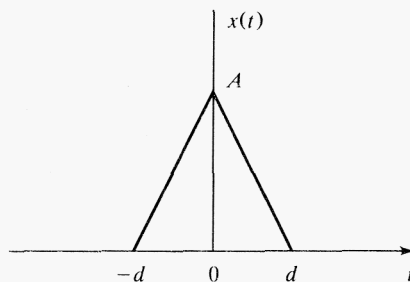


Fig. 1-32

- 1.56.** Soit $R_{11}(\tau)$ et $R_{22}(\tau)$ les fonctions d'autocorrélation respectives de $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Soit $R_{12}(\tau)$ leur fonction d'intercorrrelation. Montrer que les relations suivantes sont valables pour toute valeur de τ :

- (a) $R_{11}(0) \geq |R_{11}(\tau)|$
 (b) $R_{22}(0) \geq |R_{22}(\tau)|$
 (c) $R_{11}(0) + R_{22}(0) \geq 2|R_{12}(\tau)|$

Indication : utiliser la relation suivante, valable pour toute valeur de τ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t) \pm x_2(t - \tau)]^2 dt \geq 0$$

- 1.57.** Calculer la fonction d'autocorrélation moyennée temporellement et la densité spectrale de puissance du signal suivant :

$$x(t) = \cos 2\pi t + 2 \cos 4\pi t$$

Réponse :

$$\begin{aligned} \overline{R}_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2} \cos 2\pi \tau + 2 \cos 4\pi \tau \\ \overline{S}_{xx}(\omega) &= \frac{1}{2} \pi [\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)] + 2\pi [\delta(\omega - 4\pi) + \delta(\omega + 4\pi)] \end{aligned}$$

- 1.58.** Lorsqu'on applique un signal borné à l'entrée d'un système stable, on obtient en sortie un signal borné. Montrer qu'un système est stable, au sens qui précède, si sa réponse impulsionnelle est intégrable en valeur absolue, c'est-à-dire si :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Indication : Prendre la valeur absolue des deux membres de la relation (1.82) en tenant compte de ce que $|x(t - \tau)| < K$.

- 1.59.** Montrer que, si la réponse impulsionnelle d'un SLIT causal ne présente pas de pic à $t = 0$, et en posant :

$$H(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

$A(\omega)$ et $B(\omega)$ satisfont les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \\ B(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \end{aligned}$$

Ces relations définissent ce que l'on appelle une *paire de transformées de Hilbert* (voir problème 1.47).

Indication : Poser $h(t) = h_e(t) + h_o(t)$ et utiliser la causalité de $h(t)$ pour montrer que $h_e(t) = h_o(t)[\text{sgn}(t)]$, $h_o(t) = h_e(t)[\text{sgn}(t)]$.

- 1.60.** Montrer que :

(a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} [m(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\widehat{m}(t)]^2 dt$$

(b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} m(t) \widehat{m}(t) dt = 0$$

où $\widehat{m}(t)$ est la transformée de Hilbert de $m(t)$.

Indication : (a) Utiliser la relation (1.141) et appliquer le théorème de Parseval (1.65) relatif à la transformée de Fourier.

(b) Utiliser la relation (1.141) ainsi que la relation (1.128) du problème 1.29.

- 1.61.** Déterminer la réponse impulsionnelle et la bande passante à 3 dB d'un filtre dont la fonction de transfert est $H(\omega) = 10/(\omega^2 + 100)$.

Réponse : $h(t) = \frac{1}{2}e^{-10|t|}$, $B_{3\text{ dB}} = 6,44 \text{ rad/s}$.

- 1.62.** Un filtre gaussien est un système linéaire dont la réponse en fréquence (ou fonction de transfert) est :

$$H(\omega) = e^{-a\omega^2} e^{-j\omega t_0}$$

Calculer (a) la bande passante à 3 dB $B_{3\text{ dB}}$ et (b) la bande équivalente B_{eq} définie par la relation suivante :

$$B_{\text{eq}} = \frac{1}{2} \frac{1}{H(0)} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)| d\omega$$

Réponses : (a) $B_{3\text{ dB}} = \frac{0,59}{\sqrt{a}}$ (b) $B_{\text{eq}} = \frac{0,886}{\sqrt{a}}$

- 1.63.** Un filtre de *Butterworth* passe-bande a pour fonction de transfert :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^{2n}}}$$

où n est le nombre de composants réactifs (inductances ou capacités).

- (a) Montrer que lorsque $n \rightarrow \infty$, $|H(\omega)|$ s'approche de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas idéal, telle que la représente la figure 1-6(a), avec $\omega_0 = \omega_c$.

- (b) Trouver n pour que $|H(\omega)|^2$ soit constante à 1 dB près sur l'intervalle de fréquence $|\omega| = 0,8\omega_0$

Réponse : (a) On aura vu que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2n} = \begin{cases} \infty & \text{pour } \omega > \omega_0 \\ 0 & \text{pour } \omega < \omega_0 \end{cases}$$

(b) $n = 3$

- 1.64.** Soit $x(t)$ et $y(t)$ les signaux d'entrée et de sortie à puissance finie d'un SLIT de fonction de transfert $H(\omega)$. Montrer que les fonctions d'autocorrélation moyennées temporellement du signal d'entrée et du signal de sortie satisfont la relation suivante :

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \bar{R}_{xx}(\tau + \sigma - \beta) d\sigma d\beta$$

Indication : Utiliser les relations (1.80) et (1.66).

- 1.65.** Justifier la relation (1.101)

Indication : Utiliser le résultat du problème 1.64 et la relation (1.69).

- 1.66.** Un signal de puissance finie $x(t)$ et de densité spectrale constante K est appliqué au filtre passe-bas RC du problème 1.46 [fig. 1-25(a)]. Evaluer la moyenne quadratique du signal de sortie.

Réponse : $\frac{K}{2RC}$

Transformée de Fourier

DÉFINITION

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Théorèmes de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega) X_2^*(\omega) d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Tableau A-1 Propriétés de la transformée de Fourier

Propriété	$x(t)$	$X(\omega)$
Linéarité	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$
Décalage temporel	$x(t - t_0)$	$X(\omega) e^{-j\omega t_0}$
Homothétie	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Inversion	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Dualité	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Translation	$x(t) e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega - \omega_0)$
Modulation	$x(t) \cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$
Dérivation en temps	$x'(t)$	$j\omega X(\omega)$
Dérivation en fréquence	$-jtx(t)$	$X'(\omega)$
Intégration	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
Convolution	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega) X_2(\omega)$
Multiplication	$x_1(t) x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$

Tableau A-2 Paires de transformées de Fourier

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\frac{1}{\pi t}$	$-j\text{sgn}(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$e^{-at}u(t) \quad a > 0$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$te^{-at}u(t) \quad a > 0$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}$
$e^{-a t } \quad a > 0$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$e^{-t^2/(2\sigma^2)}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$
$p_a(t) = \begin{cases} 1 & t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$	$2a \frac{\sin \omega a}{\omega a}$
$\frac{\sin at}{\pi t}$	$p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega < a \\ 0 & \omega > a \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{a} & t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$	$a \left[\frac{\sin(\omega a/2)}{\omega a/2} \right]^2$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$	$-j\text{sgn}(\omega)X(\omega)$

Annexe B

Fonctions de Bessel $J_n(\beta)$

Fonctions de Bessel de première espèce, d'argument β :

FONCTION GÉNÉRATRICE ET DÉFINITION

$$e^{j\beta \sin \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_m t}$$

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin \lambda - n\lambda)} d\lambda$$

$$J_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta/2)^{2k+n}}{k!(k+n)!}$$

PROPRIÉTÉS DE $J_n(\beta)$:

1. $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$
2. $J_{n-1}(\beta) + J_{n+1}(\beta) = \frac{2n}{\beta} J_n(\beta)$
3. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$

Tableau B-1 Quelques valeurs de $J_n(\beta)$

n/β	0,1	0,2	0,5	1	2	5	8	10
0	0,997	0,990	0,938	0,765	0,224	-0,178	0,172	-0,246
1	0,050	0,100	0,242	0,440	0,577	-0,328	0,235	0,043
2	0,001	0,005	0,031	0,115	0,353	0,047	-0,113	0,255
3			0,003	0,020	0,129	0,365	-0,291	0,058
4				0,002	0,034	0,391	-0,105	-0,220
5					0,007	0,261	0,286	-0,234
6					0,001	0,131	0,338	-0,014
7						0,053	0,321	0,217
8						0,018	0,224	0,318
9						0,006	0,126	0,292
10						0,001	0,061	0,208
11							0,026	0,123
12							0,010	0,063
13							0,003	0,029
14							0,001	0,012
15								0,005
16								0,002

Annexe C

Fonction complémentaire $Q(z)$ de la fonction d'erreur $\text{erf}(z)$

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\lambda^2/2} d\lambda$$

$$Q(0) = \frac{1}{2} \quad Q(-z) = 1 - Q(z) \quad z \geq 0$$

$$Q(z) = \frac{1}{2} - \text{erf}(z)$$

$$\text{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\lambda^2/2} d\lambda$$

$$Q(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} z} e^{-z^2/2} \quad z \gg 1 \quad (z > 4)$$

Tableau C-1 $Q(z)$

z	$Q(z)$	z	$Q(z)$	z	$Q(z)$	z	$Q(z)$
0,00	0,500 0	1,00	0,158 7	2,00	0,022 8	3,00	0,001 35
0,05	0,480 1	1,05	0,146 9	2,05	0,020 2	3,05	0,001 14
0,10	0,460 2	1,10	0,135 7	2,10	0,017 9	3,10	0,000 97
0,15	0,440 4	1,15	0,125 1	2,15	0,015 8	3,15	0,000 82
0,20	0,420 7	1,20	0,115 1	2,20	0,013 9	3,20	0,000 69
0,25	0,401 3	1,25	0,105 6	2,25	0,012 2	3,25	0,000 58
0,30	0,382 1	1,30	0,096 8	2,30	0,010 7	3,30	0,000 48
0,35	0,363 2	1,35	0,088 5	2,35	0,009 4	3,35	0,000 40
0,40	0,344 6	1,40	0,080 8	2,40	0,008 2	3,40	0,000 34
0,45	0,326 4	1,45	0,073 5	2,45	0,007 1	3,45	0,000 28
0,50	0,308 5	1,50	0,066 8	2,50	0,006 2	3,50	0,000 23
0,55	0,291 2	1,55	0,060 6	2,55	0,005 4	3,55	0,000 19
0,60	0,274 3	1,60	0,054 8	2,60	0,004 7	3,60	0,000 16
0,65	0,257 8	1,65	0,049 5	2,65	0,004 0	3,65	0,000 13
0,70	0,242 0	1,70	0,044 6	2,70	0,003 5	3,70	0,000 11
0,75	0,226 6	1,75	0,040 1	2,75	0,003 0	3,75	0,000 09
0,80	0,216 9	1,80	0,035 9	2,80	0,002 6	3,80	0,000 07
0,85	0,197 7	1,85	0,032 2	2,85	0,002 2	3,85	0,000 06
0,90	0,184 1	1,90	0,028 7	2,90	0,001 9	3,90	0,000 05
0,95	0,171 1	1,95	0,025 6	2,95	0,001 6	3,95	0,000 04
4,00	0,000 03						
4,25	10^{-5}						
4,75	10^{-6}						
5,20	10^{-7}						
5,60	10^{-8}						

Formules mathématiques usuelles

D.1 IDENTITÉS TRIGONOMETRIQUES

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta)$$

$$a \cos x + b \sin x = C \cos(x + \theta) \quad \text{où } C = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \theta = -\arctan \frac{b}{a}$$

D.2 DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ET APPROXIMATIONS

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{1}{2!}n(n-1)x^2 + \dots$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{1}{2!}(x \ln a)^2 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

lorsque $|x| \ll 1$,

$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

$$e^x \approx 1+x$$

$$\cos x \approx 1$$

$$\sin x \approx x$$

$$a^x \approx 1+x \ln a$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

D.3 INTÉGRALES

Intégrales indéfinies

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \sin ax \cos bx \, dx = -\left[\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \right] \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \arctan \frac{bx}{a}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{x}{b^2} - \frac{a}{b^3} \arctan \frac{bx}{a}$$

Intégrales définies

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \quad a > 0 \\ \int_0^\infty e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad a > 0 \\ \int_0^\infty x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \quad a > 0 \\ \int_0^\infty x^{2k} e^{-ax^2} dx &= \frac{1 \times 3 \times \cdots (2k-1)}{2^{k+1} a^k} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad a > 0 \\ \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx &= \frac{a}{a^2 + b^2} \quad a > 0 \\ \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx &= \frac{b}{a^2 + b^2} \quad a > 0 \\ \int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos bx dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-b^2/(4a^2)} \\ \int_0^\infty \frac{\cos ax}{b^2 + x^2} dx &= \frac{\pi}{2b} e^{-ab} \quad a > 0, b > 0 \\ \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{b^2 + x^2} dx &= \frac{\pi}{2} e^{-ab} \quad a > 0, b > 0 \end{aligned}$$

Intégration par parties

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Symboles mathématiques et abréviations

E.1 SYMBOLES

Symbole	Signification
\approx	peu différent de
\leftrightarrow	indique une paire de transformées de Fourier
\oplus	addition modulo 2
\cup	union de deux événements
\cap	intersection de deux événements
\subset	sous-ensemble de
\emptyset	événement nul
\sum	sommation
\prod	produit
\mathcal{F}	transformée de Fourier de
\mathcal{F}^{-1}	transformée de Fourier inverse de
\mathcal{P}	opérateur d'application linéaire
$\langle \cdot \rangle$	moyenne temporelle
\bar{x}	moyenne temporelle de $x(t)$
$ a $	valeur absolue de a
$E[\cdot]$	espérance mathématique de
max	maximum
min	minimum
\bar{A}	événement complémentaire de A
$A^T (\mathbf{x}^T)$	transposition de la matrice A (du vecteur \mathbf{x})
A^{-1}	inverse de la matrice A
$\det A$	déterminant de la matrice A
$H^*(\omega)$	complexe conjugué de $H(\omega)$
$\{x(n)\}(x[n])$	suite
$x'(\cdot)$	dérivée première de
$x(t) * y(t)$	convolution de $x(t)$ et de $y(t)$
$\hat{m}(t)$	transformée de Hilbert de $m(t)$
$\tilde{m}(t)$	approximation en escalier de $m(t)$
$m_+(\cdot)$	l'indice + indique un signal analytique
$\text{sgn}(\cdot)$	fonction signe de
$N(\mu; \sigma^2)$	VA normale de moyenne μ et de variance σ^2

E.2 ABBREVIATIONS

Abréviation	Signification
ac	<i>alternating current</i> , courant alternatif
AM	<i>amplitude modulation</i> , modulation d'amplitude
AMI	<i>alternate mark inversion</i> , inversion d'impulsion alternée
ASK	<i>amplitude-shift keying</i> , modulation par saut (ou commutation) d'amplitude
b/s	bit par seconde
BBGA	bruit blanc gaussien additif
BLD	à bande latérale double
BLI	bande latérale inférieure
BLR	à bande latérale résiduelle
BLS	bande latérale supérieure
BLU	à bande latérale unique
CAD	convertisseur analogique-digital
CBS	canal binaire symétrique
CD	<i>compact disk</i> , disque compact
CDA	convertisseur digital-analogique
CDSM	canal discret sans mémoire
CW	<i>continuous wave</i> , onde entretenue pure, graphie
dB	décibel
dc	<i>direct current</i> , courant continu
dét	déterminant
DM	<i>delta modulation</i> , modulation delta
DSB	<i>double-sideband</i> , à bande latérale double
DSB-SC	<i>double-sideband suppressed carrier</i> , bande latérale double à suppression de porteuse
exp	fonction exponentielle
FDM	<i>frequency division multiplexing</i> , multiplex à division de fréquence
fdp	fonction de densité de probabilité
FI	fréquence intermédiaire
FM	<i>frequency modulation</i> , modulation de fréquence
FSK	<i>frequency-shift keying</i> , modulation par saut de phase
Gb	gigabit
Hz	hertz
IF	<i>intermediate frequency</i> , fréquence intermédiaire (FI)
ISI	<i>intersymbol interference</i> , confusion intersymbole, diaphonie
kb/s	kilobits par seconde
kHz	kilohertz
ln	logarithme naturel (ou népérien)

Abréviation	Signification
LSB	lower sideband, bande latérale inférieure (BLI)
MAP	maximum <i>a posteriori</i>
Mb	mégabit
Mb/s	mégabit par seconde
MDF	multiplex à division de fréquence
MHz	mégahertz
ms	milliseconde
mV	millivolt
μs	microseconde
NB	<i>narrow band</i> , bande étroite
NBFM	<i>narrow band frequency modulation</i> , FM à bande étroite
NBPM	<i>narrow band phase modulation</i> , modulation de phase à bande étroite
NRZ	non-retour à zéro
PAM	<i>pulse amplitude modulation</i> , modulation d'impulsions en amplitude
PCM	<i>pulse code modulation</i> , modulation d'impulsions codées
PM	<i>phase modulation</i> , modulation de phase
PSK	<i>phase-shift keying</i> , modulation par sauts de phase
RF	<i>radio frequency</i> , radiofréquence
rms	<i>root mean square</i> , valeur efficace (ou quadratique)
RZ	retour à zéro
s	seconde
S/B	rapport signal sur bruit
SDSM	source discrète sans mémoire
sgn	fonction signe
SLIT	système linéaire invariant dans le temps
$(S/N)_e$	rapport S/N (ou S/B) en entrée
$(S/N)_q$	rapport signal sur bruit de quantification
$(S/N)_s$	rapport S/N en sortie
SNR ou S/N	<i>signal to noise ratio S/N</i> , rapport signal sur bruit S/B
SSB	<i>single-sideband</i> , à bande latérale unique
SSL	stationnaire au sens large
SSS	stationnaire au sens strict
USB	<i>upper sideband</i> , bande latérale supérieure (BLS)
V	volt
var	variance
VCO	<i>voltage controlled oscillator</i> , oscillateur commandé en tension
VSF	<i>vestigial sideband</i> , à bande latérale résiduelle
WB	<i>wide band</i> , à large bande
WBFM	modulation de fréquence à large bande
WBPM	modulation de phase à large bande

Index

A

Addition modulo 2, 276
Alphabet source, 263
Ambiguïté, 268
Armstrong, modulateur FM, 91
ASCII, code, 136
Autocorrélation, 7, 8, 185-187
Autocovariance, 185, 188

B

Bande
 de base, 49
 de bruit équivalente, 216
 étroite (NB, *narrow band*)
 filtre, 15
 modulation d'argument, 77, 80-81
 processus aléatoire, 93
 large, modulation d'argument, 80
 latérale,
 double (BLD), modulation, 48, 59, 84, 222
 double à suppression de porteuse (DSB-SC), 49
 inférieure (BLI), 49
 supérieure (BLS), 49
 unique (BLU), modulation, 48, 52, 64
 passante
 à 3 dB, 15, 41
 d'un filtre, 15
 d'un système, 15
 en puissance, 16
BBGA, bruit blanc gaussien additif, 230, 270
Biphase, signal, 108
Bit, définition, 264
Brouilleur, 70
Bruit
 additif, 220
 en AM, 222, 238
 en bande de base, 221, 237
 BBGA, 230, 270
 blanc, 192
 blanc à bande limitée, 192
 coloré, 256
 en modulation d'argument, 226, 244
 de quantification, 102
 thermique, 219
 équivalent, 216

gaussien, 232
additif, 230, 270

C

Canal
 binaire à effacement, 284, 289
 binaire symétrique (CBS), 267
 déterministe, 266, 269
 discret sans mémoire (CDSM), 265, 282
 sans bruit, 267, 269
 sans perte, 266
Capacité d'un canal, 269, 288
 binaire à effacement, 289
 binaire symétrique, 269, 289
 bruité par un BBGA, 270, 292
 déterministe, 269
 sans bruit, 269
 sans perte, 269
Codage, 263
 d'un canal, 274, 300
 contrôle d'erreur, 275, 302
 entropique, 273, 297
 de Huffman, 274
 de Shannon-Fano, 273
 de source, 271, 293
Code,
 à contrôle de parité linéaire, 275-276
 ASCII, 136
 par blocs, 275
 linéaire, 307
 déchiffable de façon unique, 272
 détecteur d'erreur, 302
 dual, 313
 efficacité, 271
 longueur, 271
 de longueur variable, 272
 Manchester, 108
 parfait, 277
 redondance, 271
 remplissage, 275
 répétitif, 300, 304
 systématique
 vecteur, 276
Codes,
 correcteurs d'erreur, 275
 cycliques, 275
 de Hamming, 277
 de ligne, 107
 de longueur fixe, 272

instantanés, 272
 optimaux, 272
 sans préfixes, 272
 Coefficients de Fourier, 4
 Compander
 (compression-expansion de dynamique), 104
 Contrôle de parité
 bits, 275
 équation, 277
 matrice, 276
 Conversion de fréquence, 57
 Convertisseur analogique-digital (CAD), 98
 Convolution, 6, 10, 30
 théorèmes, 7, 30-31
 Correction d'erreur, 277, 307
 Corrélateur, 234, 253
 Corrélation, 7-8, 32, 187, 198, 234
 autocorrélation, 7
 coefficient de, 147
 inter -, 7
 Covariance, 147
 matrice de, 191
 stationnaire, 197
 Critère,
 d'erreur minimale, 232
 de Nyquist, forme d'impulsion, 133

D

Décalage de fréquence, 57
 Démodulation, 49
 synchrone, 50
 en AM, 50
 en BLR, 56
 en BLU, 54, 68
 en DM, 107
 en DSB, 49
 en FM, 81
 en modulation d'argument, 81
 en PM, 82
 Densité,
 interspectrale, 189
 spectrale de puissance, 8, 31, 188, 190
 spectrale énergétique, 7
 Déphasage, 39, 53
 Désaccentuation, filtre de, 246-247
 Descrambler, 74
 Détecteur,
 à maximum de vraisemblance, 231-232, 249
 d'enveloppe, 51, 63
 quadratique, 62, 242
 Détection,
 cohérente, 50

d'enveloppe, 50, 224
 d'erreur, 277, 307
 erreur de, 277-278, 307
 optimale, 233, 235
 synchrone, 66, 222
 Détection-intégration, 251
 Déviation standard, 146
 Diagramme
 de Venn, 139, 153-154
 vectoriel,
 en AM, 87
 en NBFM, 87
 Différentiateur, 44, 209
 Discrimination de fréquence, 53, 81-82
 Distance
 de Hamming, 277
 minimum, 278
 Distorsion
 d'amplitude, 12
 de phase, 12
 Distribution
 binomiale, 148
 conditionnelle, 143
 conjointe, 142
 gaussienne, 150
 marginale, 143
 normale, 150
 de Poisson, 150

E

Echantillonnage, 98, 99
 fréquence, 99
 idéal, 100
 instantané, 99
 intervalle, 1
 naturel, 100
 non idéal, 100
 période, 99
 rectangulaire, 100
 Echantillonneur-bloqueur, 100
 Echelon unitaire, 2
 Effet
 d'ouverture, 122
 de seuil, 224
 en AM, 226
 en modulation d'argument, 229
 Efficacité d'un codage, 271
 Egaliseur, filtre, 42
 Energie, 1
 moyenne, 1
 Entropie, 264
 conditionnelle, 268
 conjointe, 268
 différentielle, 270

Enveloppe, détection d', 50, 224
 Equivalence, propriété, d', 19
 Ergodicité, 186, 197
 en autocorrélation, 187
 en moyenne, 187
 Espace des événements, 138
 Espérance mathématique, 146
 conditionnelle, 177
 Événement(s), 138-141
 nul, 138
 Excursion
 maximum de fréquence, 75
 de phase instantanée, 75

F

Famille de fonctions, 184
 Filtrage, 11-12
 Filtre
 adapté, 233-234, 253
 et bruit coloré, 256
 causal, 15
 gaussien, 47
 de préaccentuation, 246
 de prédétection, 222
 à pente cosinus raidi, 111
 passe-bande, 14
 passe-bas Butterworth, 47
 passe-haut, 13
 transverse, 42
 Fonction
 de Bessel, 78, 85, 316
 caractéristique
 conjointe, 148
 marginale, 148
 complémentaire de la fonction d'erreur, 151, 317
 de densité de probabilité, 142, 157
 conditionnelle, 143
 conjointe, 142
 marginale, 143
 de densité gaussienne, 191
 à deux variables, 213
 à plusieurs variables, 191, 221
 de Dirac, 2
 élémentaire, 184
 généralisée, 2
 propres, 38
 Q, 151, 233, 317
 signe, 27
 singulières, 2-3, 19
 de transfert (réponse en fréquence), 10
 unitaire, 2

Formule
 de Parseval, 24
 de Wiener-Khinchin, 186
 Fréquence
 fondamentale, 2
 image, 57
 instantanée, 75, 83
 excursion, 75
 de Nyquist, 99
 pure, modulation, 78

G-H

Gain de détection, 223
 Génération des signaux
 AM, 50
 BLD, 48
 BLR, 55
 BLU, 53-54, 64
 à modulation d'argument, 80, 90
 Hétérodyne, 57

I

Identité d'Euler, 26
 Index de modulation, 51
 en modulation d'amplitude, 51
 en modulation d'argument, 78
 Inégalité
 de Cauchy-Schwarz, 176
 de Kraft, 273, 295
 de Markov, 175
 de Schwartz, 253
 de Tchebychev, 176
 Information,
 contenu, 263
 débit, 263-264
 mesure, 263, 279
 moyenne, 264
 mutuelle, 268, 284
 source, 263
 Intercorrélation, 7, 33, 188
 Intercovariance, 188
 Interférence intersymbole (ISI), 110, 133
 Intervalle de Nyquist, 99
 Inversion d'impulsions alternée (AMI), 108

J-L

Jacobien, 145
 Largeur de bande
 équivalente, 47
 d'un signal AM, 52
 des signaux à modulation d'argument, 79, 88

- Ligne
 à retard, 93
 à retard à prises, 42
Limite de Hamming, 277
Limiteur, 97
Loi
 binomiale, 148
 de compression A, 104, 136
 de compression μ , 104, 206
 de Morgan, 139
 de Poisson, 150
 de Shannon-Hartley, 270
- M**
- Masquage d'un bruit, 229
Matrice
 génératrice, 276
 de transition d'un canal, 265-267, 283
Maximum *a posteriori* (MAP), critère, 249
Mélange de fréquence, 57, 70
Mise en forme d'impulsions, 110, 133
Modulateur équilibré, 36
Modulation
 d'amplitude (AM), 36, 48-74
 d'amplitude à quadrature (QAM), 72
 d'argument, 75-97
 à bande latérale double (BLD), 48, 59, 84, 222
 à bande latérale résiduelle (BLR), 48, 59, 84, 222
 à bande latérale résiduelle (BLR), 48, 55, 68
 en bande latérale unique (BLU), 48, 52, 64
 delta (DM), 98, 106, 128
 exponentielle, 77
 de fréquence (FM), 48, 75, 84
 à fréquence pure, 78
 d'impulsions, 48
 en amplitude (PAM), 101
 codées (PCM), 98
 numériques, 98
 en quadrature (QAM), 72
 de phase (PM), 48, 75, 84
 linéaire, 48, 84
 non linéaire, 84
 numérique d'une porteuse, 112
 récepteur, 97
 par sauts d'amplitude (ASK), 112-113, 236
 par sauts de fréquence (FSK), 112-113, 236
 par sauts de phase (PSK), 112, 113, 236
 par tout ou rien, 112-113, 236
 sinusoïdale, 78
Moments,
 centré d'ordre n , 146
 centré d'ordre deux, 146
 conjoint, 147
 conjoint d'ordre n , 185
 fonction génératrice, 147, 178
 ordre, 147
 d'ordre n , 146
Mot codé, 271
Moyenne
 d'ensemble, 185
 temporelle, 186
 vectorielle, 191
 statistiques, 145, 169, 185
Multiplexage,
 en fréquence 58, 70,
 en quadrature, 72
 temporel, 58, 109, 131
Multiplicateur(s)
 de fréquence, 80
 de Lagrange, 291
- N-O**
- Non retour à zéro (NRZ), 107
Opérateur linéaire, 9
 fonctions propres, 38
 valeurs propres, 38
- P**
- Passage à zéro, 94, 200
Période, 2
Poids de Hamming, 278
Point élémentaire, 138
Porteuse, 48
Probabilité
 a priori, 232
 a posteriori, 249
 en ASK, 236
 en bipolaire / bande de base, 236
 en bruit gaussien, 232-233
 conditionnelle, 140
 densité, 143
 répartition, 143
 conjointe,
 définition axiomatique, 140
 d'erreur, 220, 231-232, 249
 fonction de densité, 143
 fonction de répartition, 142
 fréquence relative, 140
 en FSK, 236
 marginale, fonction de densité, 143
 matrice, 266
 mesure, 138
 en monopolaire / bande de base, 235-236
 en PSK, 236
 répartition, 143

totale, 141
 de transition d'un canal, 265
 Processus aléatoire 184, 194
 à bande étroite, 193
 définition, 184
 ergodique, 187
 gaussien, 191, 212
 non corrélé, 188
 orthogonal, 188
 périodique, 195
 représentation cartésienne, 193
 stationnaire
 en covariance, 197
 au sens large (SSL), 186
 au sens strict (SSS), 186
 statistique, 185, 194
 Processus stochastiques (aléatoires), 184
 Puissance, 4
 moyenne, 1

Q

Quantification, 98, 101, 123
 bruit de, 102
 erreur, 102, 107
 non uniforme, 103
 uniforme, 101

R

Raideur d'un filtre, 111
 Rapport
 de vraisemblance, 232
 porteuse sur bruit, 226
 signal sur bruit (S/N, S/B), 220
 en AM, 223
 en BLD, 222-223
 en BLU, 223
 en FM, 228
 en PM, 228
 en sortie, 220
 signal sur bruit de quantification, 124
 Rayleigh, variable aléatoire, 169
 Recouvrement (ou aliasing), 114
 Règle
 de Bayes, 140
 de Carson, 80, 90
 de parité, 301
 majoritaire, 300
 Rendement (transmission AM), 61
 Répartition normale, 150
 Réponse
 en fréquence, 10, 37

impulsionnelle, 10, 37
 indicielle, 37
 Représentation cartésienne d'un processus aléatoire, 193
 composante en phase, 193
 composante en quadrature, 193
 Retour à zéro, 107

S

Série
 de Fourier, 3, 22
 de Fourier complexe, 3
 de Fourier exponentielle, 3, 22
 Seuil
 niveau, 240
 optimal, 232
 Signal
 aléatoire, 1, 184
 analogique, 1
 analytique, 73
 apériodique, 2
 à bande limitée, 36
 binaire aléatoire, 201
 bipolaire, 107-108
 causal, 10
 complexe, 1
 des télégraphistes, 218
 déterministe, 1
 numérique, 1
 périodique, 2, 19
 à puissance finie, 1
 réel, 1
 à temps continu, 1
 à temps discrétisé, 1
 Source discrète sans mémoire (SDSM), 263
 Sous-porteuse, 58
 Spectre
 d'amplitude, 4-5
 de Fourier, 5
 de Fourier d'un signal modulé en argument, 77, 86
 de fréquence, 4, 11
 de fréquence discret, 4
 de phase, 5
 de puissance, 188, 198
 de raies, 4
 Stationnarité
 au sens large (SSL), 186
 au sens strict (SSS), 186
 Statistique des processus aléatoires, 185, 194
 Superhétérodyne, récepteur AM, 70
 Symbole de Kronecker, 117
 Syndrome, 277
 décodage, 277
 Système(s)
 à temps continu, 9

- bande passante, 15
- causal, 10
- discret, 9
- filtrage, 11
- linéaires, définition, 9, 37
 - caractéristiques fréquentielles, 40
 - invariant dans le temps (SLIT), 9, 189
 - et processus aléatoire, 189-190, 206-212
 - réponse en fréquence, 10, 37
 - réponse impulsionnelle, 10
 - réponse, 189

T

- T1, système, 110
- Télégraphistes, signal des -, 200, 218
- Test d'hypothèse, 230
- Théorème
 - du codage, 275
 - de l'échantillonnage, 98, 114
 - dans le domaine des fréquences, 135
 - passé-bande, 119
 - passé-bas, 99, 114
 - uniforme, 99
 - de la convolution en fréquence, 7, 31
 - de la limite centrée, 151
 - de la modulation, 26
 - de Parseval
 - pour la transformation de Fourier, 8, 32
 - pour les séries de Fourier, 4
- Thermique, bruit, 219
- Tirage aléatoire, 138
- Train d'impulsions unitaires, 22, 29
- Trainage, 106-107
- Transformées
 - de Fourier, 4, 25
 - définition, 4, 314
 - inverse, 5
 - paire de -, 5, 315
 - propriétés, 5, 314
 - de Hilbert, 39, 46, 73, 207, 219

- Transmission
 - en bande de base d'un signal bipolaire, 235
 - sans distorsion, 11

U-V

- Unipolaire, signal, 107, 235-236
- Valeurs propres, 38
- Variable aléatoire, 14, 157
 - de Cauchy, 182
 - conjointement normale, 162
 - continue, 142
 - déviations standard, 146
 - discrète, 141
 - espérance, 145
 - exponentielle, 160
 - fonctions, 144, 163
 - gaussienne, 150
 - gaussienne normalisée, 151
 - indépendante, 144
 - moment centré d'ordre n , 146
 - moment d'ordre n , 146
 - moyenne, 145
 - non corrélée, 147
 - normale, 151
 - de Poisson, 150, 171
 - de Rayleigh, 169
 - orthogonales, 147
 - uniforme, 159, 169
 - variance, 146
- Variance, 146
- VCO, oscillateur commandé en tension, 81
- Vecteur
 - aléatoire, 191
 - code, 276
 - données, 276
 - d'erreur, 277
- Vraisemblance, 232

LOUIS - J E A N
avenue d'Embrun, 05003 GAP cedex
Tél. : 92.53.17.00
Dépôt légal : 635 — Septembre 1994
Imprimé en France

Série Schaum

Le bon réflexe pour comprendre les éléments fondamentaux du cours et pour réussir aux examens

- une série unique, de renommée mondiale, disponible en 15 langues
- plus de 45 000 exercices résolus introduits par de nombreux rappels de cours
- des ouvrages spécialement conçus pour l'étudiant

BIOLOGIE

Anatomie et physiologie humaines
Génétique 2^e éd.

CHIMIE

Biochimie, 2 vol.
Chimie analytique
Chimie générale 7^e éd.
Chimie organique
Chimie physique, 2 vol.

ÉCONOMIE

Macroéconomie 2^e éd.
Mathématiques pour l'économiste
Microéconomie 2^e éd.
Principes d'économie

ÉLECTRICITÉ, ÉLECTRONIQUE

Circuits électriques
Communications analogiques
et numériques
Électronique, 2 vol.
Microprocesseurs, 2 vol.
Systèmes asservis 2^e éd.
Techniques numériques

GESTION, COMPTABILITÉ

Gestion de la production
et des opérations
Statistiques de la gestion

Technique comptable approfondie
Technique comptable de base

INFORMATIQUE

Infographie
Introduction à l'informatique
Mathématiques pour informaticiens
Programmation Basic
Programmation en assembleur
Programmation en C
Programmation en Cobol structuré
Programmation Fortran
Programmation Pascal
Structures de données
Traitement de l'information

MATHÉMATIQUES

Algèbre linéaire 2^e éd.
Algèbre moderne
Analyse
Analyse de Fourier
Analyse numérique
Analyse vectorielle
Calcul différentiel et intégral 2^e éd.
Calcul matriciel
Équations différentielles
Équations différentielles - Méthodes
et applications
Formules et tables de mathématiques
Géométrie analytique

Introduction au calcul différentiel
et intégral
Mathématiques de base 2^e éd.
Mathématiques discrètes
Matrices
Probabilités
Probabilités et statistique
Statistique 2^e éd.
Topologie
Transformées de Laplace
Trigonométrie
Variables complexes

PHYSIQUE

Électromagnétisme
Mécanique générale
Optique
Physique appliquée
Physique générale
Physique générale
et appliquée
Physique de l'ingénieur
Physique moderne
Thermodynamique

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

Mécaniques des fluides
et hydraulique
Résistance des matériaux, 2 vol.



Pour tous renseignements concernant
les ouvrages de la série Schaum en français,
s'adresser à :
Ediscience international,
28, rue Beaunier, 75014 Paris
McGraw-Hill, Éditeurs, Montréal, Canada

COMM ANALOG
95-06-15 Rea
Rayon 3130
978270421283
Px 210,00

ISBN : 2-7042-1283-X
ISSN : 0768-2727

