

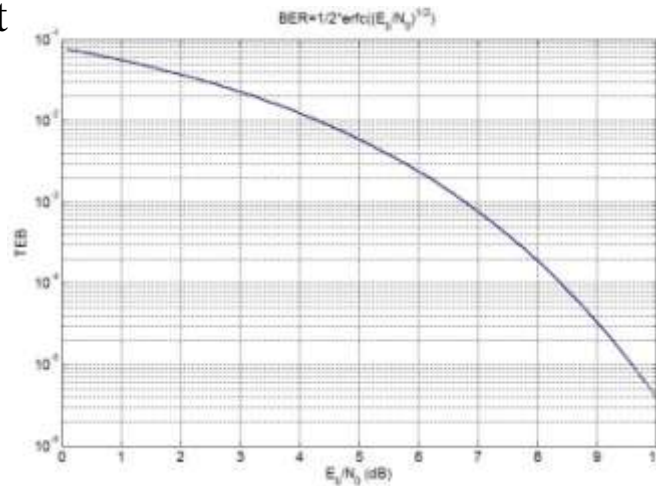
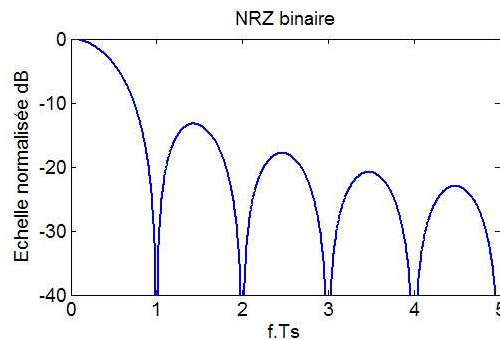
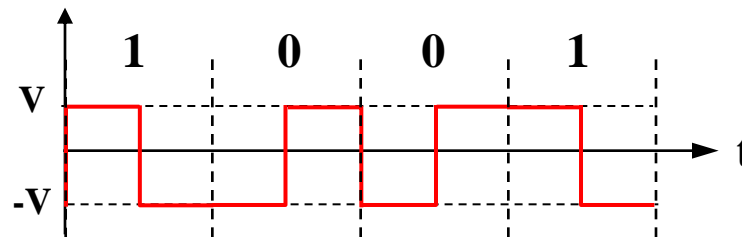
# Communications Numériques

Master 2 FESUP



Eric Vourc'h

eric.vourch@satie.ens-cachan.fr



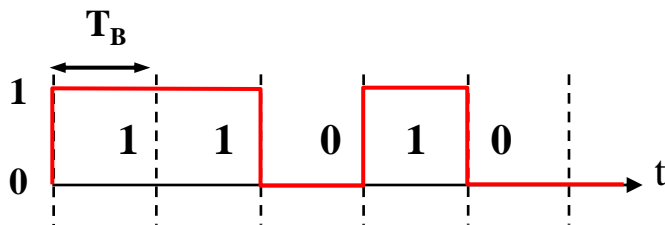
# Plan du cours

- ✓ Introduction
- ✓ Les transmissions en bande de base
- ✓ Les transmissions sur fréquence porteuse
- ✓ Les systèmes de transmission numériques par fibre optique

La transmission d'une information numérique passe par la création d'un signal qui peut être considéré de deux points de vues : sous son aspect temporel, ou sous son aspect fréquentiel.

## Variations temporelles d'un signal numérique

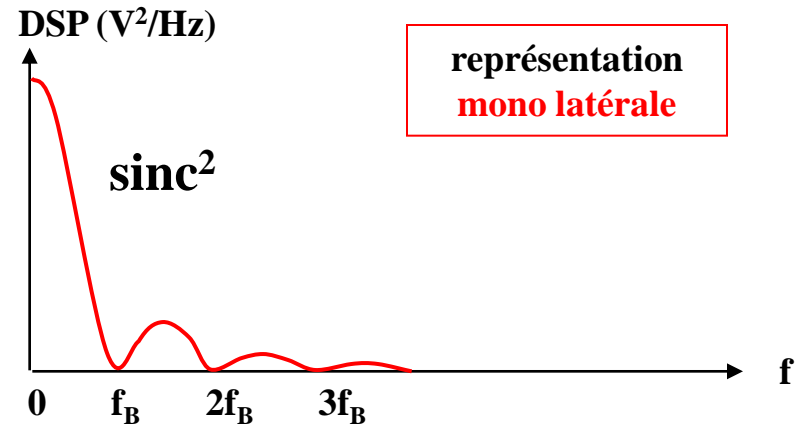
Données numériques  
(Séquence PSA)



$T_B$  : Temps bit

## Spectre d'un signal numérique

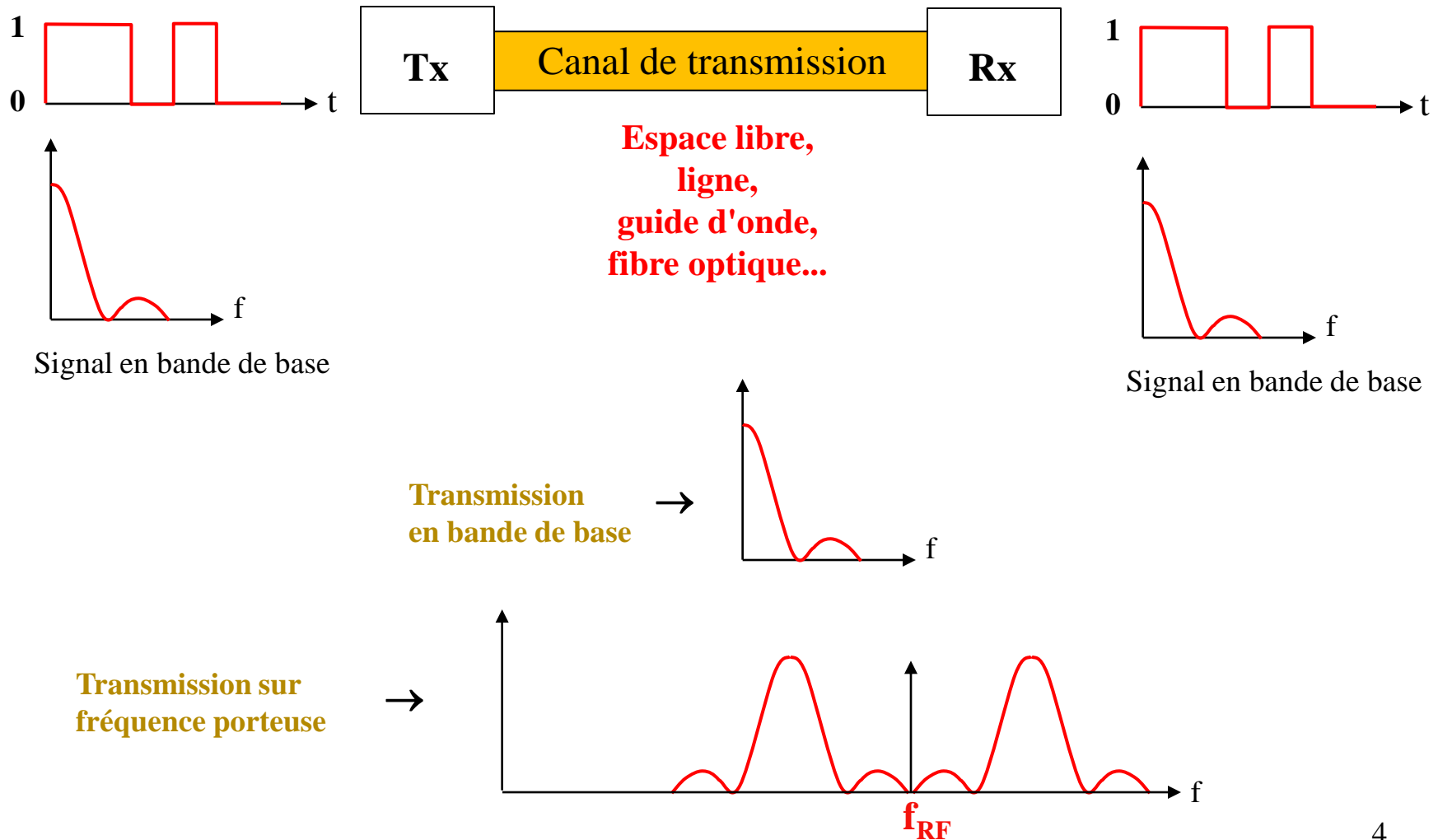
$$\gamma_s(f) \triangleq TF\{corr_{ss}(\tau)\} = TF\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t) \cdot s(t + \tau) dt\right\}$$



Spectre en bande de base

$$f_B = 1/T_B \text{ débit binaire}$$

- ✓ Transmission en bande de base
- ✓ Transmission sur fréquence porteuse



### ▪ Canal de transmission :

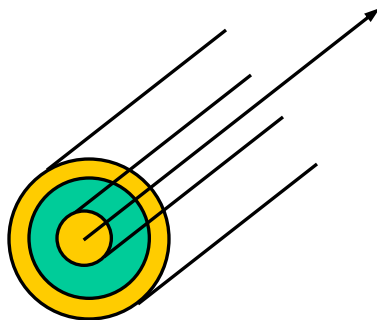
La principale contrainte qui détermine le mode de transmission (en bande de base ou sur fréquence porteuse) est le **type de canal de transmission**

**Canal de transmission** : support ou milieu de propagation des signaux (câble, guide d'ondes, espace libre)

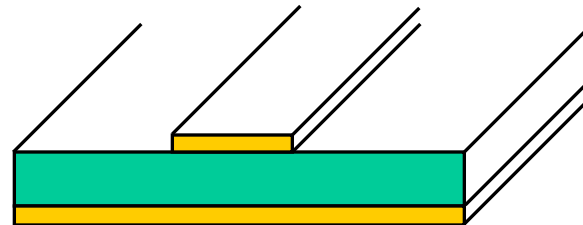
### ▪ Les guides TEM (transverse électromagnétiques) ou lignes de transmission :

Exemples : paires téléphonique, câbles coaxiaux, lignes microruban

Elles permettent de faire des **transmissions en bande de base** et **sur fréquence porteuse**.  
Elles n'ont pas de fréquence de coupure basse...



**Câble  
coaxial**

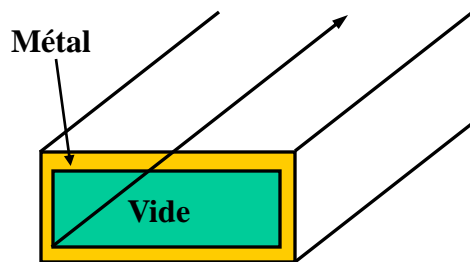


**Ligne  
microruban**

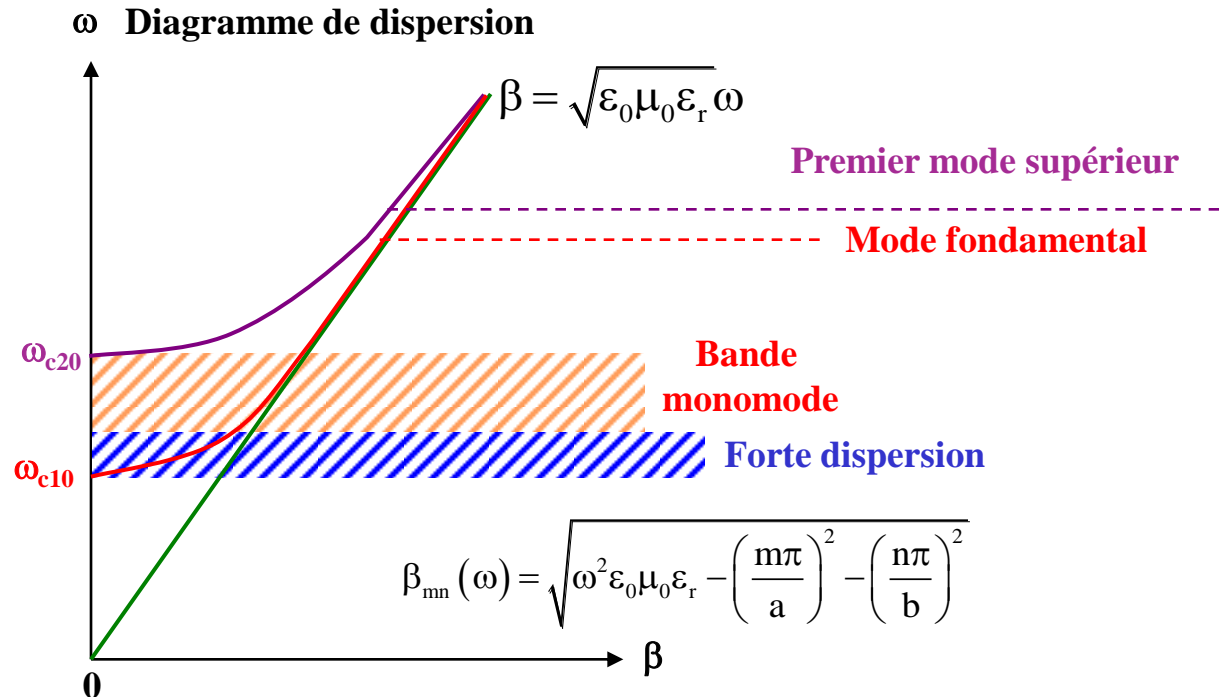
### ▪ Guides non TEM :

Exemples: les guides rectangulaires métalliques, guides cylindriques métalliques

Ils permettent de faire uniquement des **transmissions sur fréquence porteuse**, car ils ont une fréquence de coupure basse. Ils ont également une fréquence maximum d'utilisation (ces fréq. Sont liées aux dimensions du guide considéré).



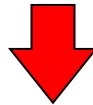
**Guide  
rectangulaire  
métallique**



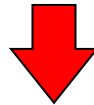
A chaque mode correspond une fréquence de coupure  $\omega_c$  (fréquence en deçà de laquelle il n'y a pas de propagation :  $\beta = 0$ ).

- **L'espace libre :** les **transmissions** se font **sur fréquence porteuse**

Ondes acoustiques : fortement atténuées, faible vitesse de propagation,  
nécessité de Tx/Rx en vision directe



Aux ondes sonores correspondent des ondes EM  
**en basses fréquences** (exple voix  $\cong$  4kHz)



La transmission en espace libre d'une info sonore (numérisée ou non)  
nécessite de recourir à une **fréquence porteuse**.

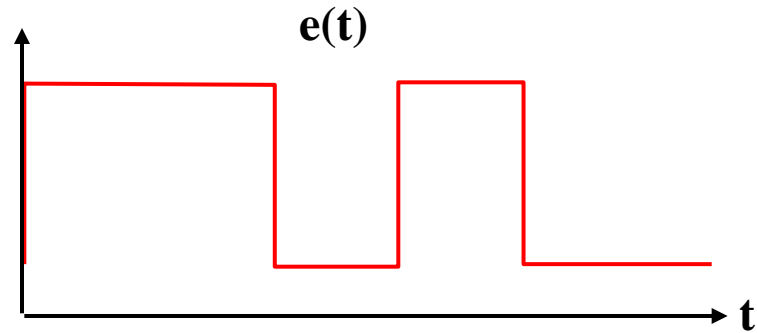
En effet, les dimensions des antennes sont de l'ordre de  $\lambda/2$ .

La transmission de basses fréquences ( $1\text{kHz} < f < 100\text{kHz} \Leftrightarrow 300\text{km} > \lambda > 3\text{km}$ ).

Nécessiterait des antennes immenses...

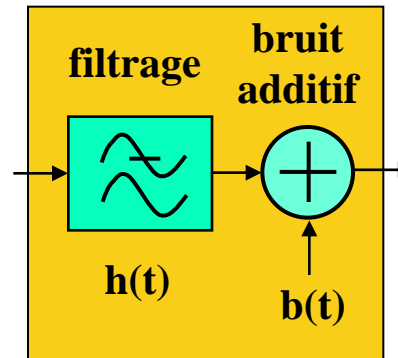
- Distorsions subies par l'information numériques et conséquences sur la qualité de la transmission :

### Emission

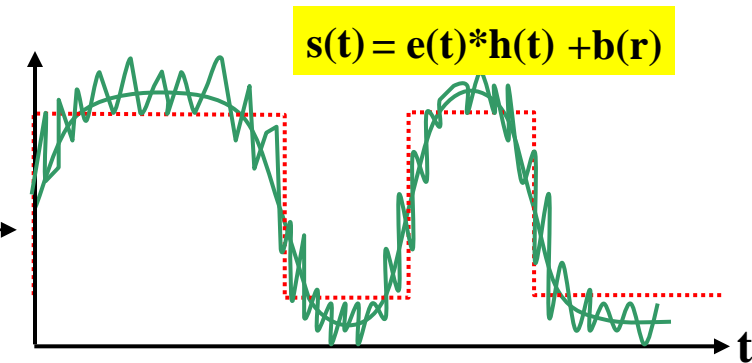


### Canal

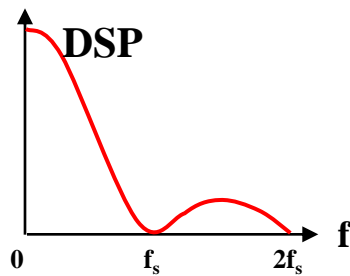
2 distorsions



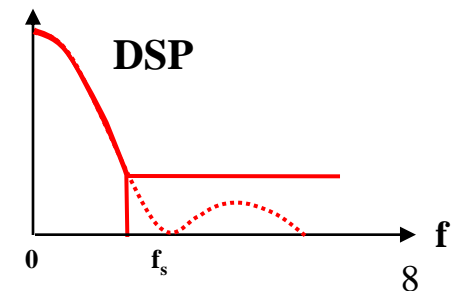
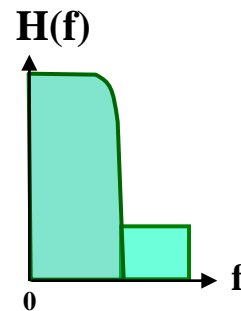
### Réception



TF{corr<sub>ee</sub>}

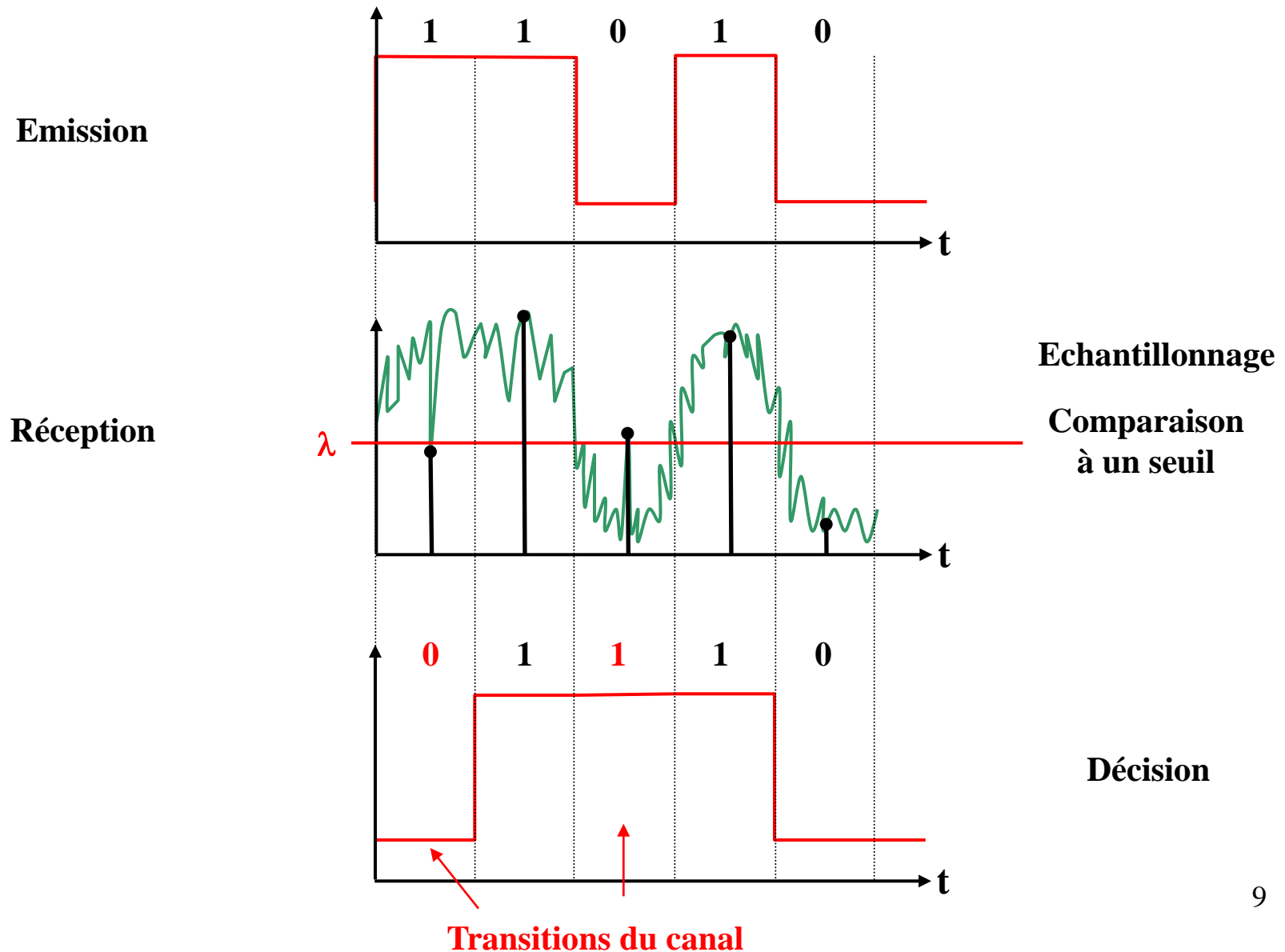


Filtrage



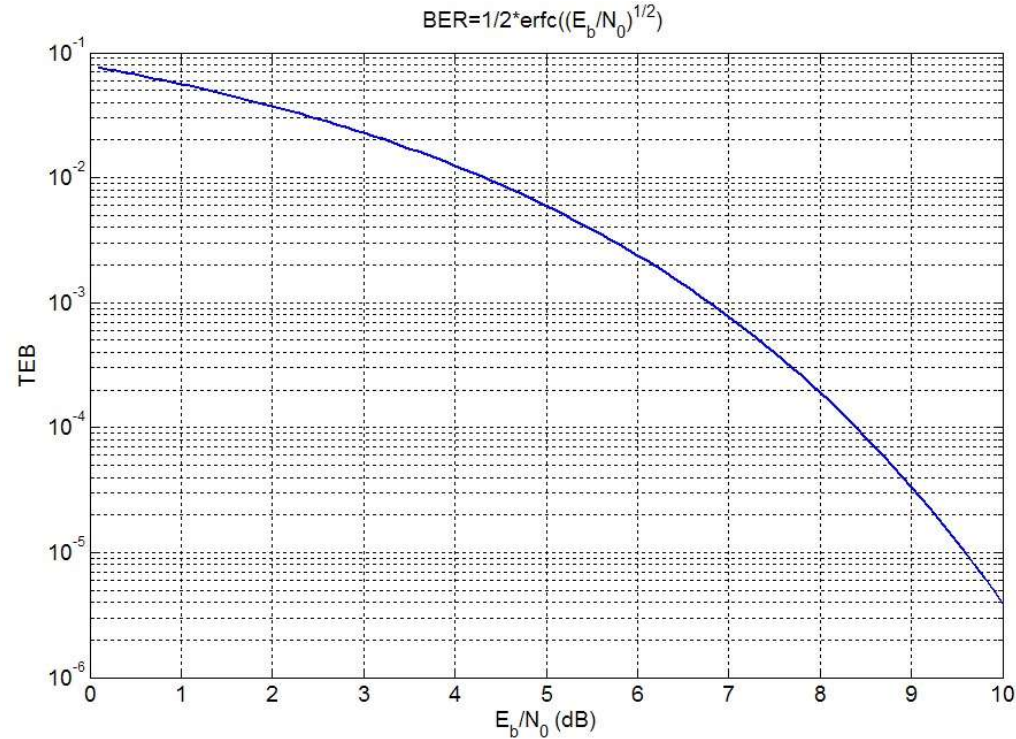


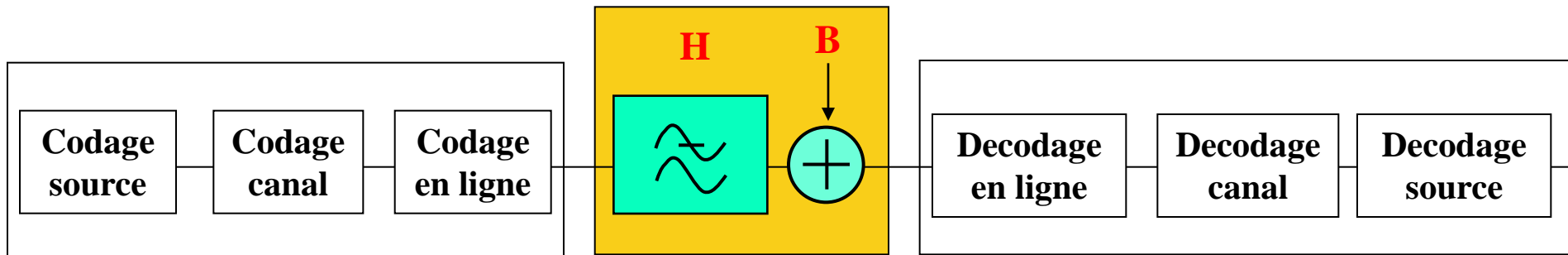
### Erreurs lors de la reconstitution des données (récepteur optimal)



Contraintes	Leviers	
	Transm. en BdB	Transm. sur freq porteuse
<b>Débit</b>	<b>Codage source</b>	
<b>BER</b>	<b>Sondage de canal</b> <b>Codage canal</b> <b>S/N</b> <b>Codage en ligne (respect du critère de Nyquist)</b>	<b>Format de modulation</b>
<b>Occupation spectrale</b>	<b>Codage en ligne</b>	<b>Format de modulation</b>
<b>Efficacité spectrale (bit/s/Hz)</b>	<b>Codage en ligne</b>	<b>Format de modulation</b>

La quantité d'erreurs commises (taux d'erreur binaire, TEB ou BER...) est une fonction décroissante du S/N.





➔ **Codage source : compression de l'information**, ou comment réduire la quantité de données binaires transmise (symboles codés par des mots de longueurs variables, algorithme de Huffman...)

➔ **Codage canal : redondance** pour la **correction des erreurs** causées en réception par le bruit additif du canal (but : améliorer le BER).

➔ **Codage en ligne : mise en forme des données sous forme d'impulsions**. Un des critères de choix du code en ligne est le rapport largeur de spectre/débit binaire.



## Codage sans répétition

Symboles	Mots codés	Mots reçus	Détection des transition	Correction des erreurs
0	0	0	NON	NON
1	1	1	NON	NON

## Codage par double répétition

Symboles	Mots codés	Mots reçus	Détection des transition	Correction des erreurs
0	00	00	NON	NON
1	11	01	OUI	NON
		10	OUI	NON
		11	NON	NON

## Codage par triple répétition

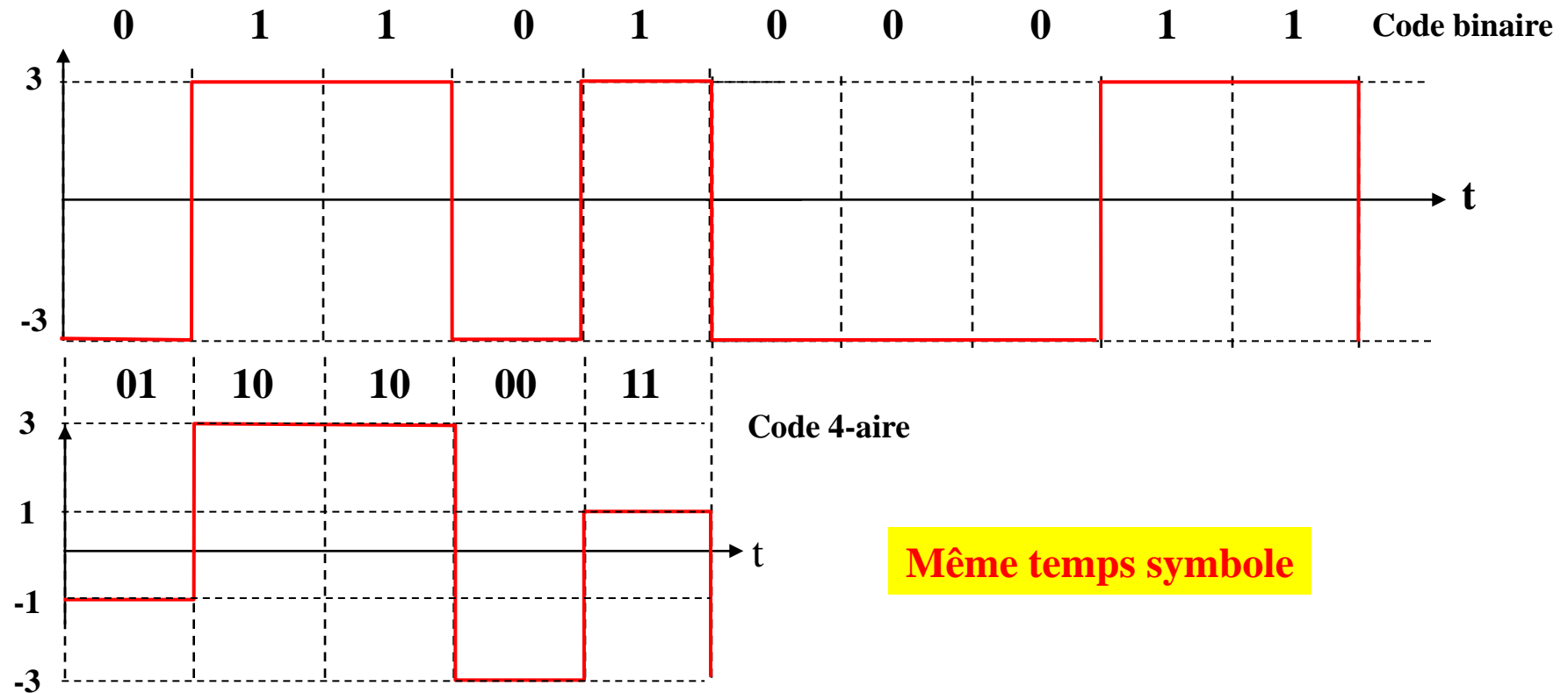
Symboles	Mots codés	Mots reçus	Détection des transition	Correction des erreurs
0	000	000	NON	NON
1	111	001	OUI	OUI
		010	OUI	OUI
		011	OUI	OUI
		100	OUI	OUI
		101	OUI	OUI
		110	OUI	OUI
		111	NON	NON







## Comparaison codage binaire/quaternaire :



## Expression du signal $e(t)$ issu d'un codeur en ligne :

Supposons un **code M-aire** :

Le codeur peut émettre  **$M = 2^n$  signaux  $S_i(t)$  de durée  $T$**  (temps symbole).

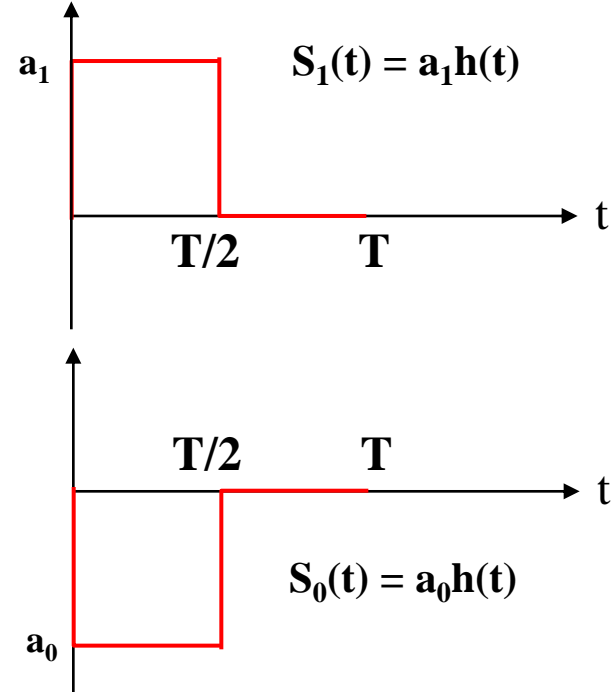
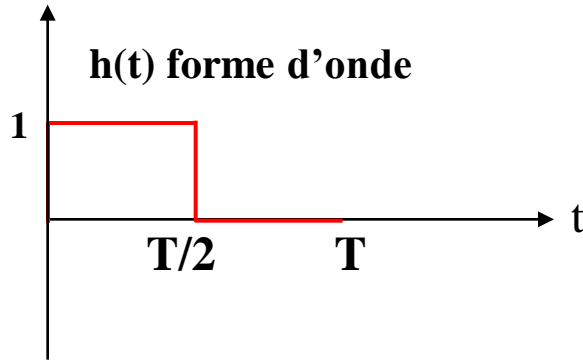
Le signal généré vaut : 
$$e(t) = \sum_k S_{i(k)}(t - kT) \quad ; \quad i(k) = 0, 1, \dots, (M - 1)$$

où  $\begin{cases} k \text{ varie de } -\infty \text{ à } +\infty \\ i(k) \text{ est fct}^\circ \text{ du symbole émis à l'instant } kT \end{cases}$

Pour la plupart des codes, les signaux  **$S_{i(k)}(t)$**  peuvent s'exprimer en **fct<sup>o</sup> d'une forme d'onde unique  $h(t)$**  (voir fig.) :

$$S_{i(k)} = a_{i(k)} h(t - kT) \quad \text{où } h(t) \text{ est la forme d'onde unique}$$

**Exple :** Signal **binaire** basé sur une forme d'onde unique



On a alors

$$e(t) = \sum_k a_{i(k)} h(t - kT)$$

où les  $a_{i(k)}$  prennent leur valeur dans un alphabet à  $M$  éléments  $\{A_0, A_1, \dots, A_{M-1}\}$

## Critères de choix d'un code en ligne :

➔ Rapidité de modulation

➔ Sensibilité au bruit

➔ Occupation spectrale

➔ Récupération d'horloge en réception (lié au spectre du code :

il est bon que celui-ci présente une raie à la fréquence d'horloge)



**Les caractéristiques spectrales sont importantes**

## Densité spectrale de puissance d'un code en ligne :

**Rq. :** Dans ce cours nous désignerons souvent la DSP par le mot spectre.

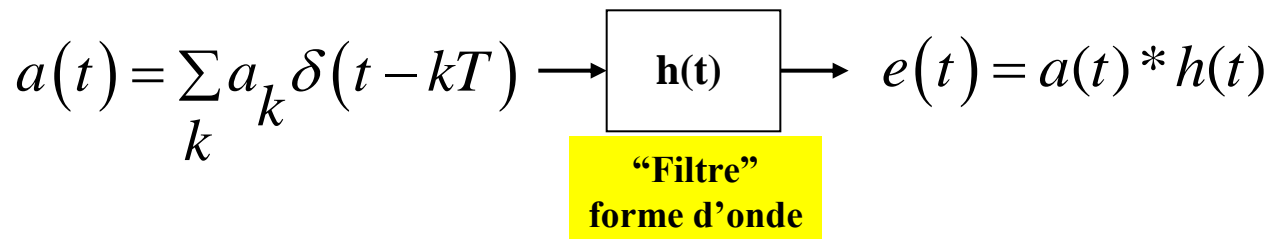
Expression de la DSP d'un code en ligne :

On a  $e(t) = \sum_k a_{i(k)} h(t - kT)$  que l'on écrira  $e(t) = \sum_k a_k h(t - kT)$

$\uparrow$   
 $i(k) = 0, 1, \dots, (M-1)$

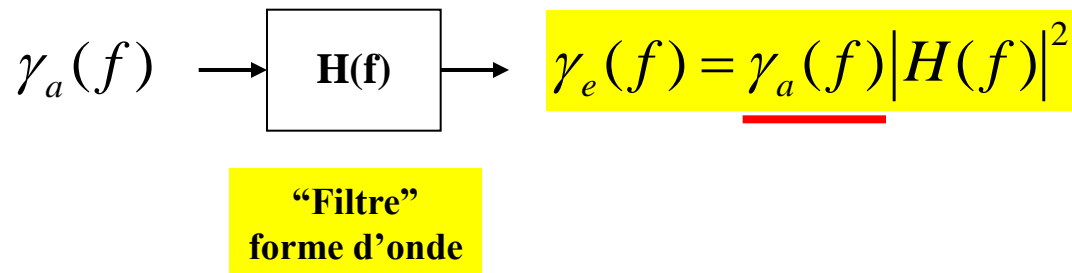
**Rq. :  $e(t)$  peut être vu comme le filtrage d'un signal  $a(t)$  tel que  $a(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT)$**

**par un filtre de réponse impulsionnelle  $h(t)$**



Soient :

$$\begin{cases} \gamma_e(f) & \text{la DSP de } e(t) \\ \gamma_a(f) & \text{la DSP de } a(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT) \\ H(f) & \text{la TF de } h(t) \end{cases}$$



$\gamma_a(f)$  est une fonction de la fréquence qui ne dépend que des propriétés statistiques des symboles  $a_k$ .

Que vaut  $\gamma_a(f)$  ? (Cf Glavieux p. 14-15 et annexe I)

$$\gamma_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{2\sigma_a^2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma'_a(k) \cos(2\pi fT) + \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{T})$$

avec  $\left\{ \begin{array}{ll} m_a & \text{moyenne} \\ \sigma_a^2 & \text{variance} \\ \Gamma'_a(k) & \text{fct}^\circ \text{ d'autocorrélation normalisée des symboles } a_k \text{ centrés.} \end{array} \right.$

**Les symboles  $a_k$  étant stationnaires** (leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps).

$$\left\{ \begin{array}{l} m_a = E[a_n] \quad \forall n \quad \text{espérance mathématique = moyenne statistique} \\ \sigma_a^2 = E[(a_n - m_a)^2] \quad \forall n \\ \Gamma'_a(j) = \frac{E[(a_n - m_a)(a_{n-k} - m_a)]}{\sigma_a^2} \quad \forall n, k \end{array} \right.$$

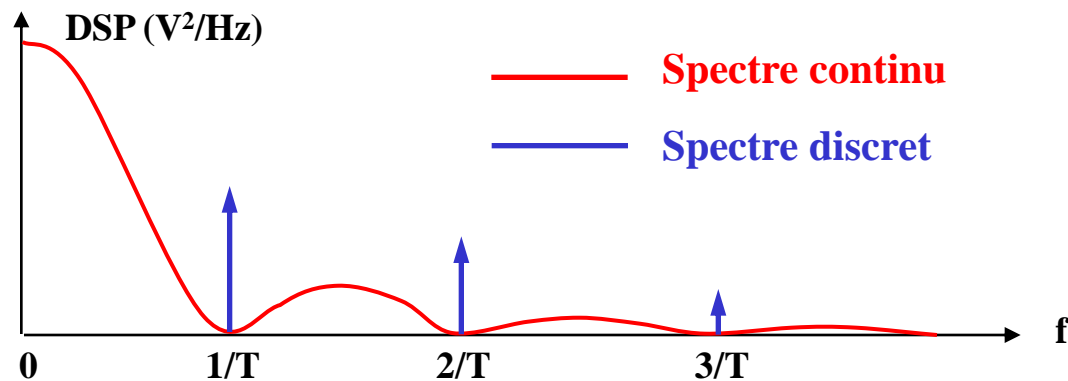


Après multiplication de  $\gamma_a(f)$  par  $|H(f)|^2$ , la DSP de  $\gamma_e(f)$  peut s'exprimer comme la somme d'un spectre continu en fréquence  $\gamma_e^c(f)$

$$\gamma_e^c(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2 + \frac{2\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma'_a(k) \cos(2\pi fT)$$

et d'un spectre de raies (discret)  $\gamma_e^d(f)$

$$\gamma_e^d(f) = \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| H\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$



$$\gamma_e^c(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2 + \frac{2\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma'_a(k) \cos(2\pi fT) \quad \gamma_e^d(f) = \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| H\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

**Rq. : L'expression du spectre d'un code en ligne se simplifie considérablement si :**

- Si les **symboles  $a_k$**  sont **indépendants** alors  $\Gamma'_a(k) = cc_{a_k} = 0 \Rightarrow \gamma_e^c(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2$
- Si la **moyenne  $m_a$**  des symboles  $a_k$  est **nulle**  $\Rightarrow \gamma_e^d(f) = 0$

Si ces deux conditions sont réunies alors :  $\gamma_e(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2$

$$\text{Avec } \sigma_a^2 = E\left[(a_n - m_a)^2\right] = E\left[a_n^2\right] \text{ puisque } m_a \text{ est nulle}$$

**A retenir :** La DSP d'un code en ligne dépend

➔ de la TF de la forme d'onde  $h(t)$

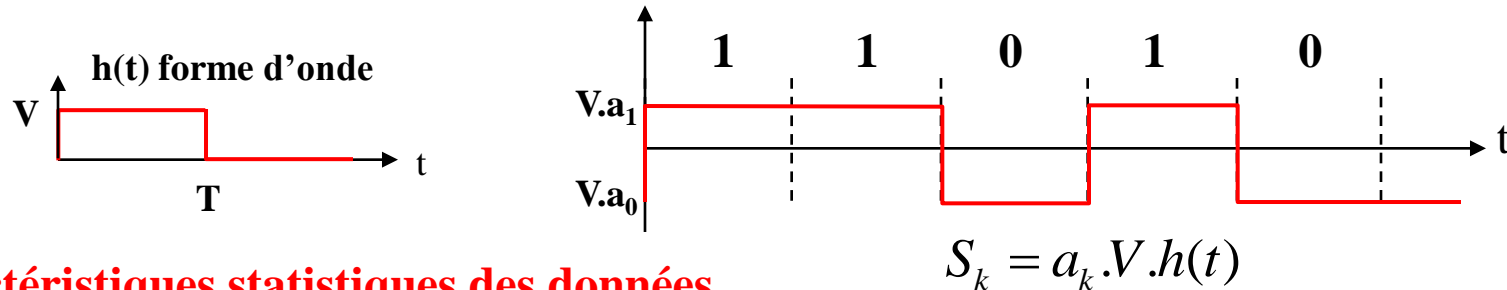
➔ Des propriétés statistiques des symboles  $a_k$

**Exemples de codes en ligne :**

- Codes en ligne à symboles indépendants (décorrélés)
- Codes en ligne à symboles dépendants (corrélés)

## • Codes en ligne à symboles indépendants (décorrélés):

Le code NRZ binaire (Non Retour à Zéro) :



## Caractéristiques statistiques des données

$b_1 \rightarrow a_1 = 1 ; b_0 \rightarrow a_0 = -1$  où  $b_i$  désigne le bit considéré

$$m_a = p_1 a_1 + p_0 a_0 = \frac{1}{2} 1 + \frac{1}{2} (-1) = 0$$

!!! Le calcul se fait sans tenir compte de la mise en forme h(t)

$$m_a = 0$$

$$\sigma_a^2 = E[(a_n - m_a)^2] = E[a_n^2] = \sum_{n=1}^N P_n a_n^2 = \frac{1}{2} 1 + \frac{1}{2} 1 = 1$$

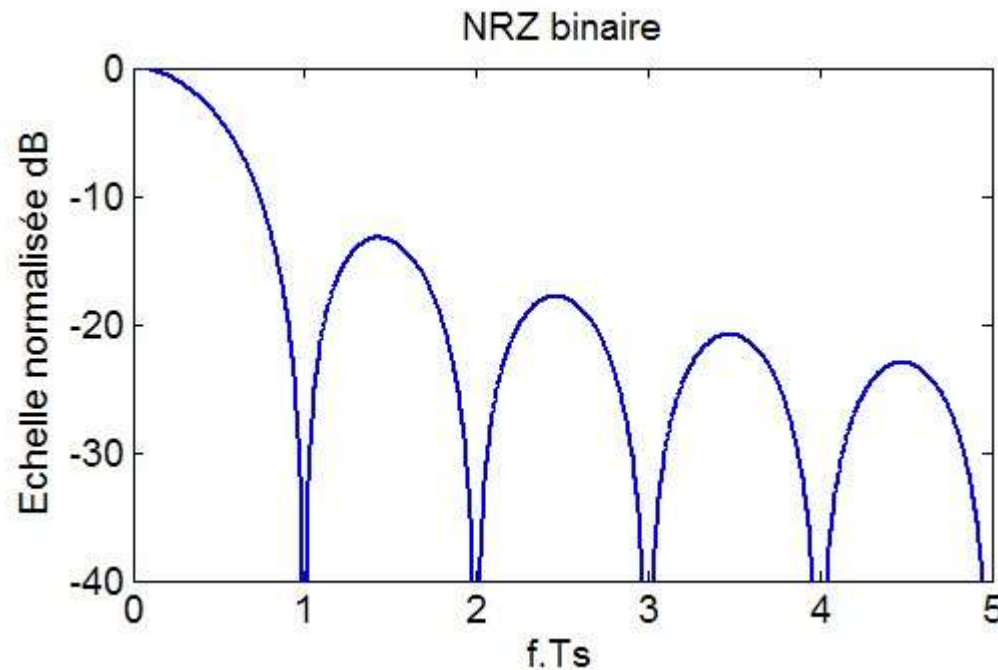
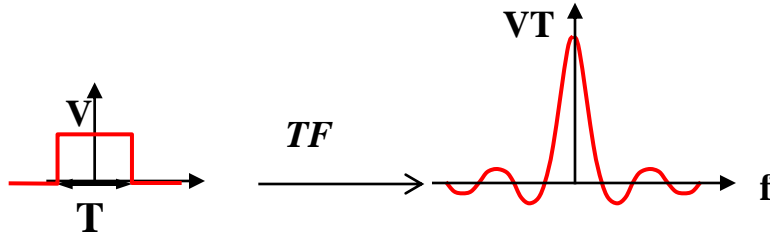
$$\sigma_a^2 = 1$$

- Les symboles sont indépendants
- La moyenne  $m_a$  des symboles  $a_k$  est nulle

$$\Rightarrow \gamma_e(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2$$

$$h(t) = V \cdot \Pi_T(t) \xrightarrow{TF} H(f) = VT \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

$$\Rightarrow \gamma_e(f) = V^2 T \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}$$

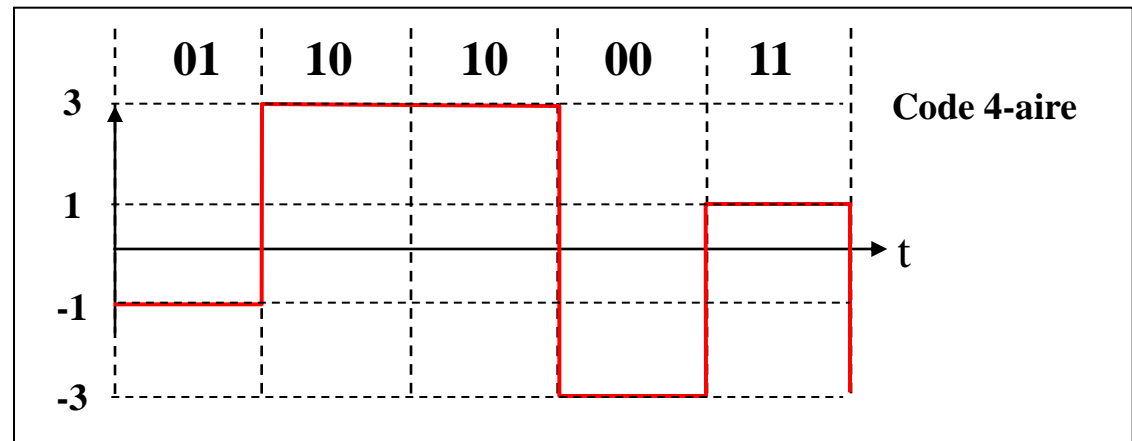
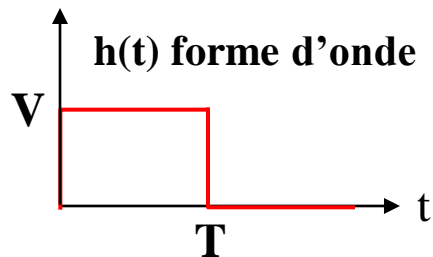


Le spectre (DSP) d'un code NRZ binaire s'annule  $\forall$  les multiples de  $1/T$  où  $T$  est le temps symbole

## Le code NRZ M-aire :

Considérons un code NRZ M-aire dont les  $a_k$  prennent leur valeur dans un alphabet à M éléments

$$a_k \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2p+1), \dots, \pm(M-1)\}$$



$$S_k = a_k \cdot V \cdot h(t)$$

## Le code NRZ M-aire :

Considérons un code NRZ M-aire dont les  $a_k$  prennent leur valeur dans un alphabet à M éléments

$$a_k \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2p+1), \dots, \pm(M-1)\}$$

(exple d'un code quaternaire )

$$symb_{00} \rightarrow a_{00} = -3 ; symb_{01} \rightarrow a_{01} = -1 ; symb_{11} \rightarrow a_{11} = 1 symb_{10} \rightarrow a_{10} = 3$$

## Caractéristiques statistiques des données

$$m_a = E[a_k] = \sum_k a_k p_k = \sum_{p=-(M-2)/2}^{(M-2)/2} (2p+1) \frac{1}{M} = 0$$

Le calcul se fait sans tenir compte de la mise en forme h(t)

**$m_a = 0$**

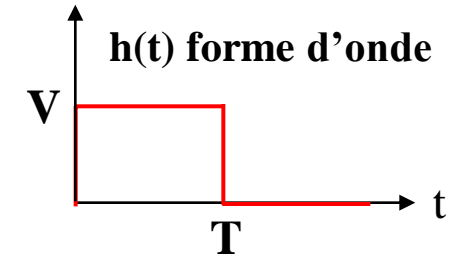
$$\sigma_a^2 = E[a_n^2] = \frac{2}{M} \sum_{p=0}^{(M/2)-1} (2p+1)^2 \Rightarrow \sigma_a^2 = \frac{M^2 - 1}{3}$$

## Le code NRZ M-aire :

- Les symboles sont indépendants
- $m_a = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Les symboles sont indépendants} \\ m_a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_e(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2 \quad \text{avec} \quad \sigma_a^2 = \frac{M^2 - 1}{3}$$

La forme d'onde  $h(t)$  est toujours la porte d'amplitude  $V$  et de temps symbole  $T$ .

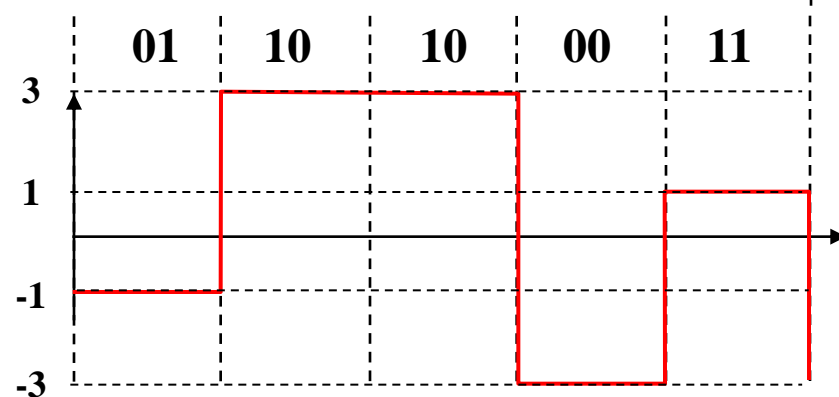
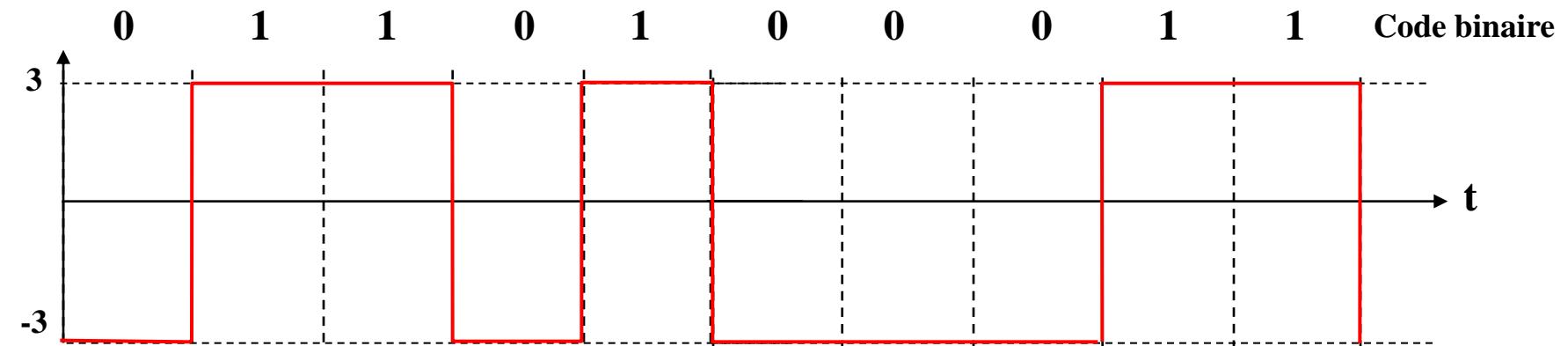


$$h(t) \xrightarrow{TF} H(f) = VT \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

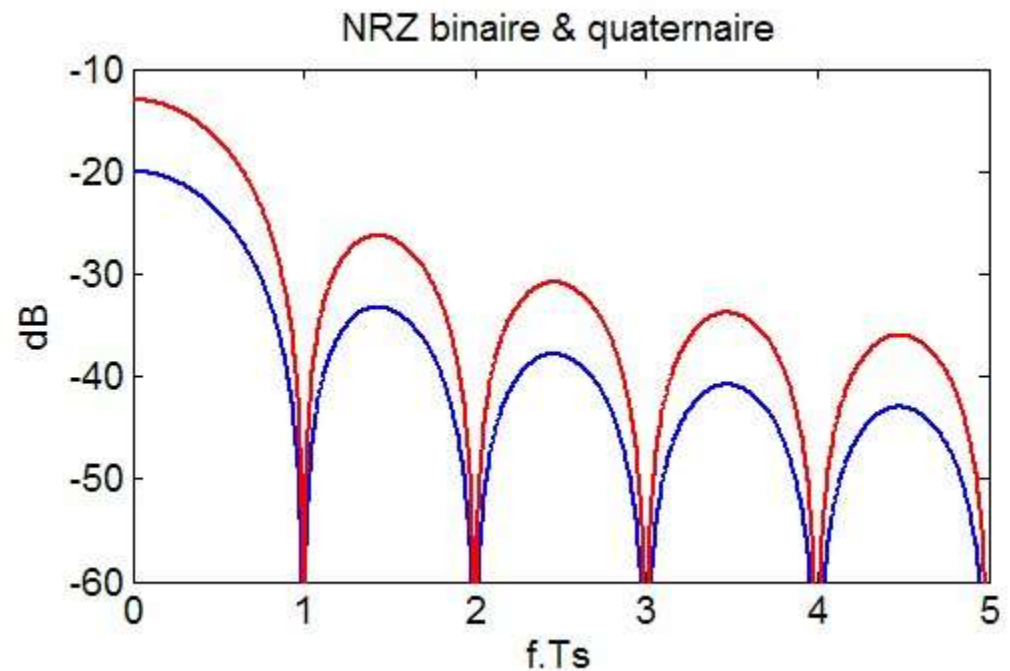
$$\Rightarrow \gamma_e(f) = \frac{M^2 - 1}{3} V^2 T \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}$$



## Comparaison code NRZ binaire/quaternaire :

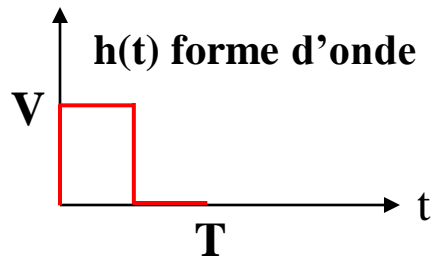


**Un code quaternaire permet, pour un même temps symbole  $T$ , de transmettre dans une même bande passante  $n=\log_2(M)$  fois plus de bits qu'un code binaire. Mais il est + sensible au bruit.**



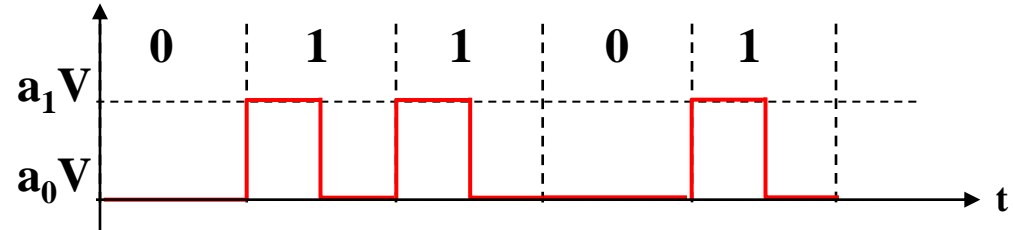
Comparaison faite en considérant la même amplitude max  $V_{\text{max}}$

## Le code RZ binaire :



$$a_k \in \{0,1\}$$

$$S_k = a_k \cdot V \cdot h(t)$$



La forme d'onde  $h(t)$  est un signal de durée  $T$  constitué par une porte de durée  $\lambda T$  ( $0 < \lambda < 1$ ) suivie d'un retour à zéro de durée  $(1-\lambda)T$ .

## Caractéristiques statistiques des données

$$m_a = p_1 a_1 + p_0 a_0 = \frac{1}{2} 1 + \frac{1}{2} 0 = \frac{1}{2}$$

$$m_a = \frac{1}{2}$$

Le calcul se fait sans tenir compte de la mise en forme  $h(t)$

$$\sigma_a^2 = E[(a_k - m_a)^2] = E[a_k^2 - 2m_a a_k + m_a^2] = E[a_k^2] - 2m_a E[a_k] + E[m_a^2]$$

$$\sigma_a^2 = E[a_k^2] - 2m_a^2 + m_a^2 \Rightarrow \sigma_a^2 = E[a_k^2] - m_a^2$$

$$\Rightarrow \sigma_a^2 = 1^2 p_1 - 0^2 p_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{4}$$

On a

$$m_a = \frac{1}{2} \quad \sigma_a^2 = \frac{1}{4} \quad H(f) = V \lambda T \frac{\sin(\pi f \lambda T)}{\pi f \lambda T} \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

## Partie continue du spectre

$$\gamma_e^c(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2 \Rightarrow \gamma_e^c(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} V^2 \lambda^2 T \frac{\sin^2(\pi f \lambda T)}{(\pi f \lambda T)^2} \Rightarrow \gamma_e^c(f) = \frac{1}{16} V^2 T \frac{\sin^2(\pi f T / 2)}{(\pi f T / 2)^2}$$

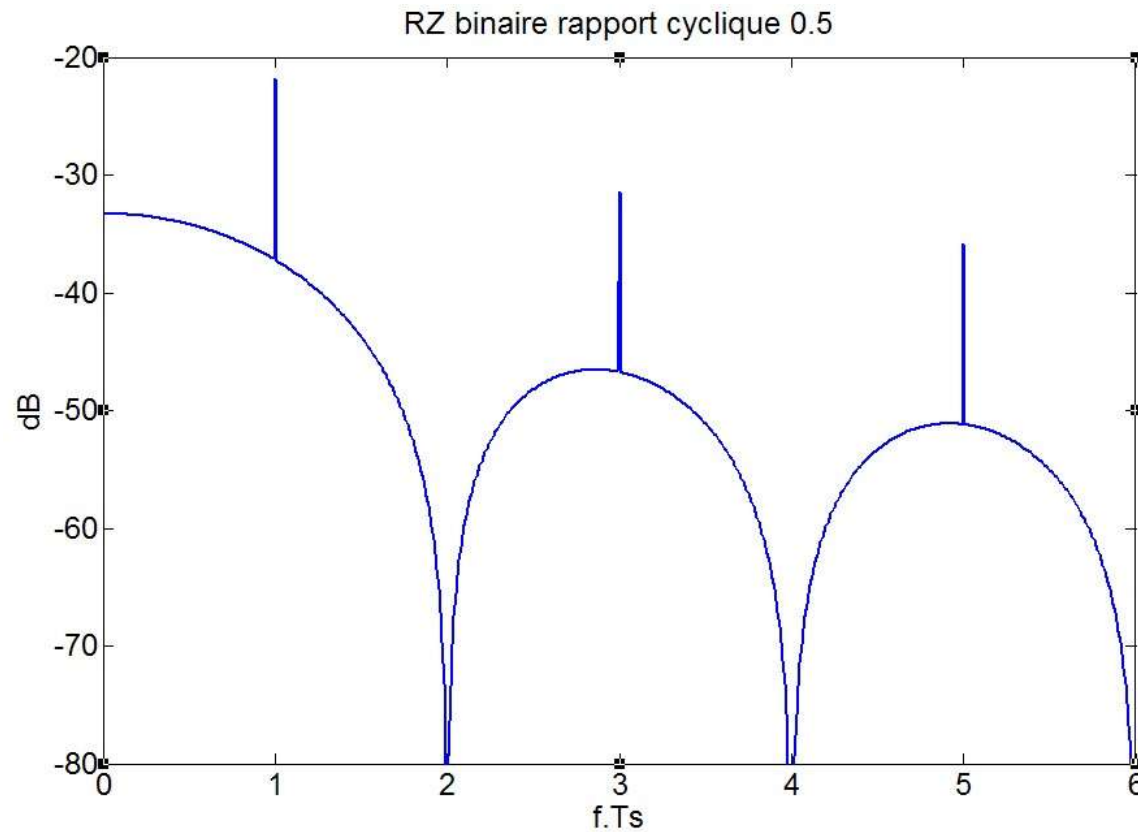
## Partie discrete du spectre

$$\gamma_e^d(f) = \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| H\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \Rightarrow \gamma_e^d(f) = \frac{m_a^2}{T^2} \lambda^2 V^2 T^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin(k \lambda \pi)}{k \lambda \pi} \right)^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

si  $\lambda=1/2$  seuls les termes t.q.  
 $k = 2p+1$  sont non nuls

$$\Rightarrow \gamma_e^d(f) = \frac{1}{16} V^2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2 \pi^2} \delta\left(f - \frac{2p+1}{T}\right)$$

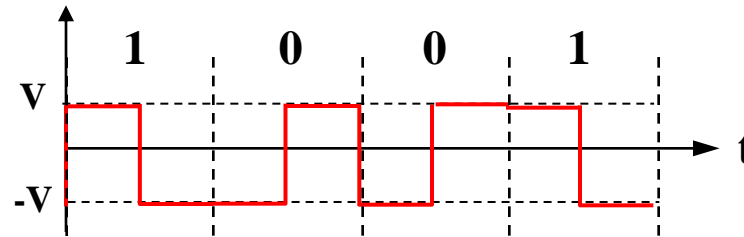
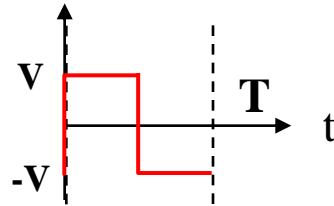
Le spectre du signal RZ est la superposition d'un spectre continu et d'un spectre discret (harmoniques impaires de  $(1/T)$ )



**La raie à  $1/T_s$  est utile pour la récupération d'horloge en réception.**

## Le code biphasé binaire (Manchester) :

forme d'onde  $h(t)$



Ce code en ligne présente une transition de  $V \leftrightarrow -V$  à chaque temps symbole ce qui peut faciliter la récupération d'horloge moyennant un traitement de détection des fronts en réception.

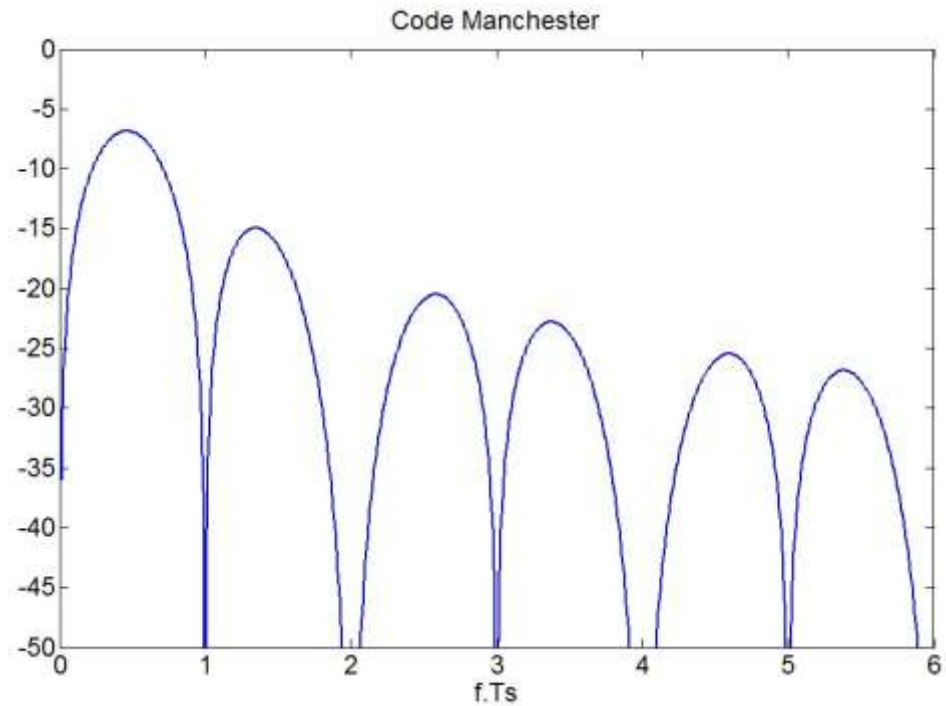
Rq :  $m_a=0 \Rightarrow$  le spectre ne présente pas de partie discrète

## Le code biphase binaire (Manchester) :

$$\gamma_e(f) = V^2 T \sin^2\left(\frac{\pi f T}{2}\right) \sin_c^2\left(\frac{f T}{2}\right)$$

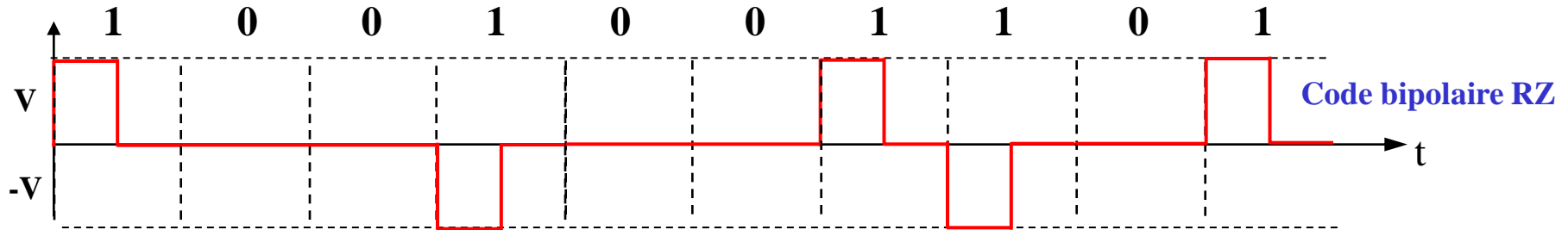
*D'après "A. Glavieux"...*

**La DSP est nulle en  $f=0$**



- Codes en ligne à symboles dépendants (corrélés):

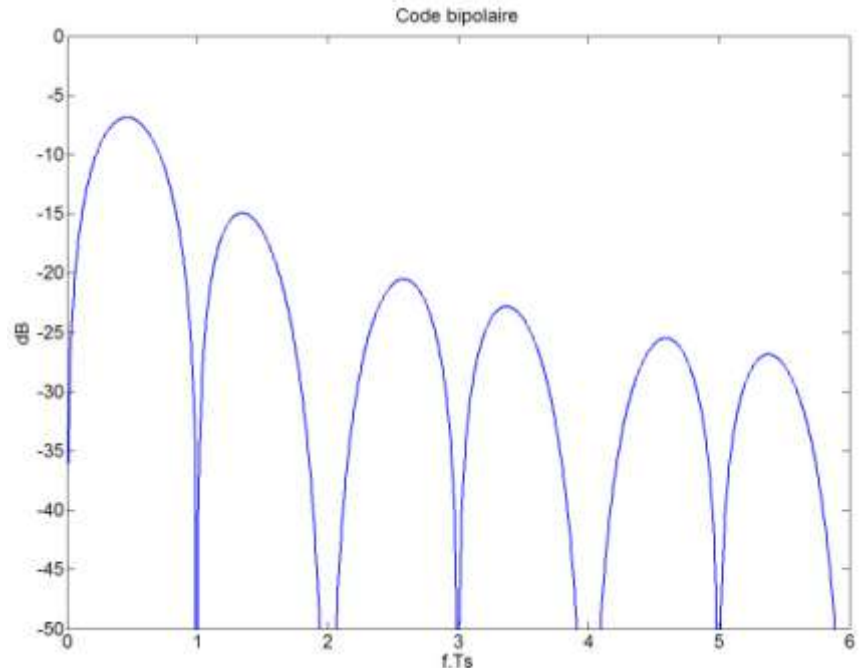
Le code bipolaire : Deux "1" successifs ne sont pas indépendants (règle d'alternance)



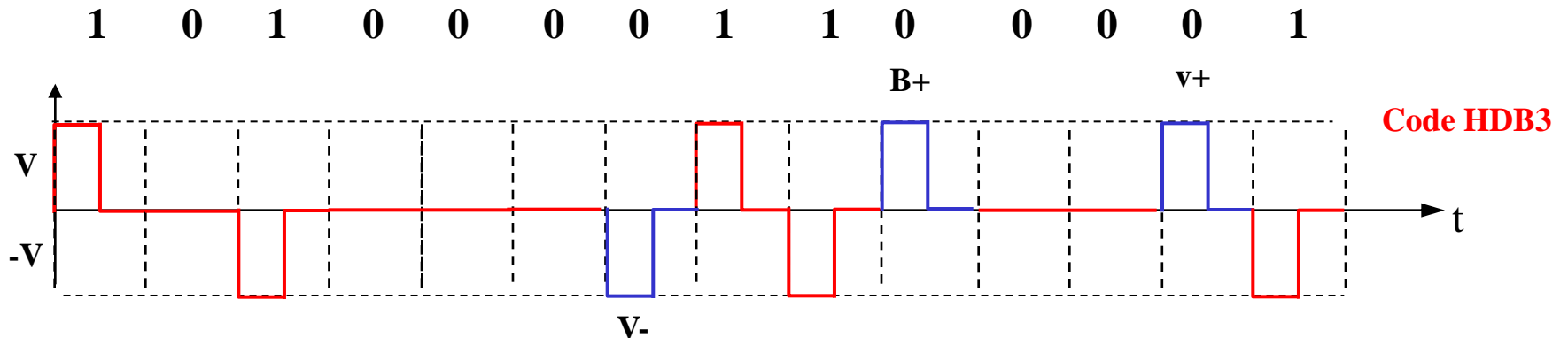
$$\gamma_e(f) = \frac{V^2 T}{4} \sin^2(\pi f T) \sin_c^2\left(\frac{f T}{2}\right)$$

*D'après "A. Glavieux"...*

**La DSP est nulle en f=0**



## Le code HDBn:



**Code bipolaire : règle d'alternance bipolaire sur les "1" émis**

**Bits de viol en  $(n+1)^{\text{ième}}$  position (d'où le HDBn) lorsque  $n+1$  "0" consécutifs sont transmis. Les bits de viol respectent la règle d'alternance bipolaire.**

**Bits de bourrage afin de ne pas confondre un "1" avec un bit de viol**

**Intérêt : permettre la récupération d'horloge**

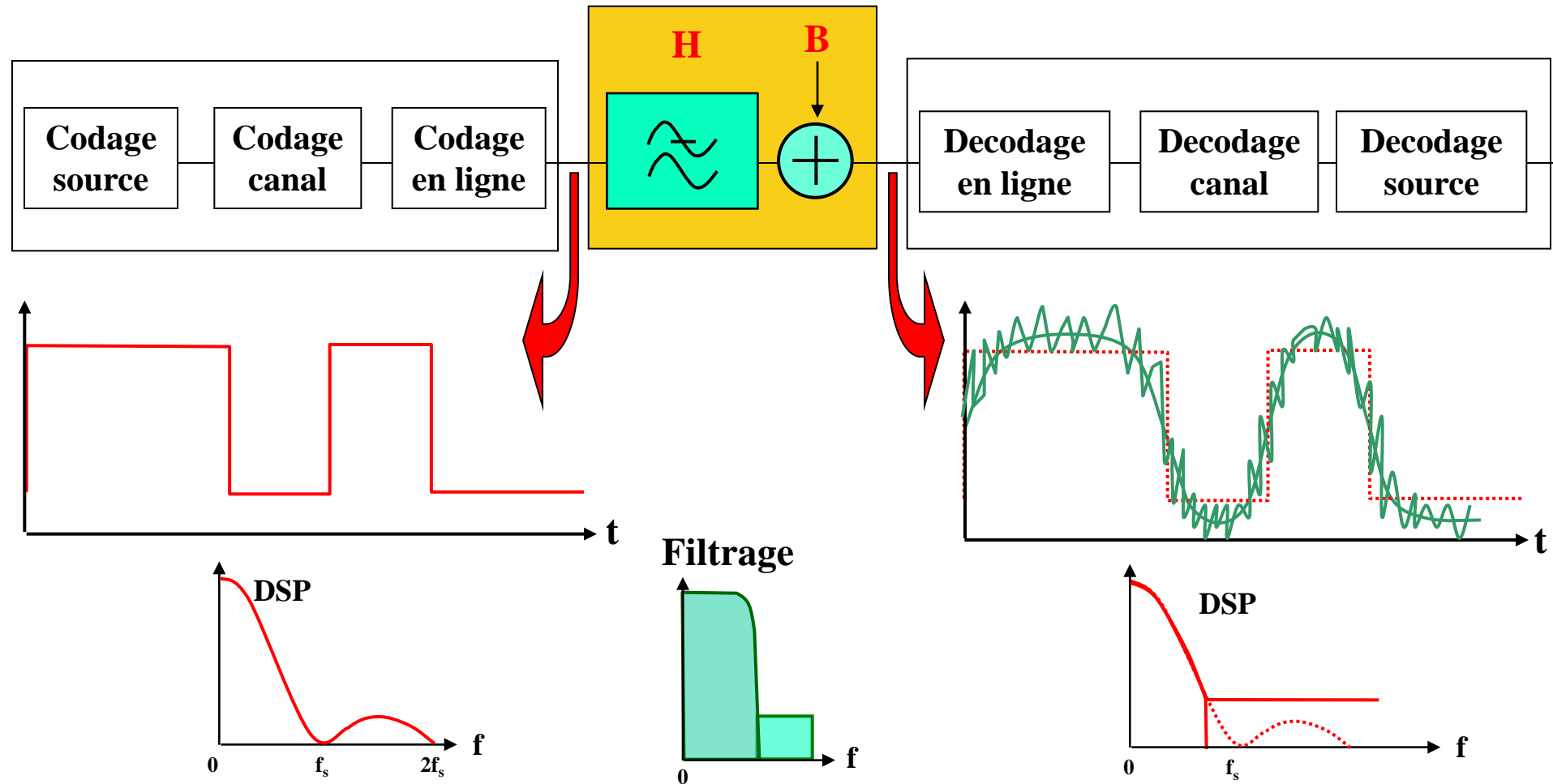
**Le HDB3 est utilisé dans le RTC (réseau téléphonique commuté)**

**La DSP d'un HDB3 (RZ) est semblable à celle d'un code bipolaire RZ.**



$\exists$  2 perturbations du canal
 

- Le filtrage  $\Leftrightarrow$  canal à bande limitée
- Le bruit additif



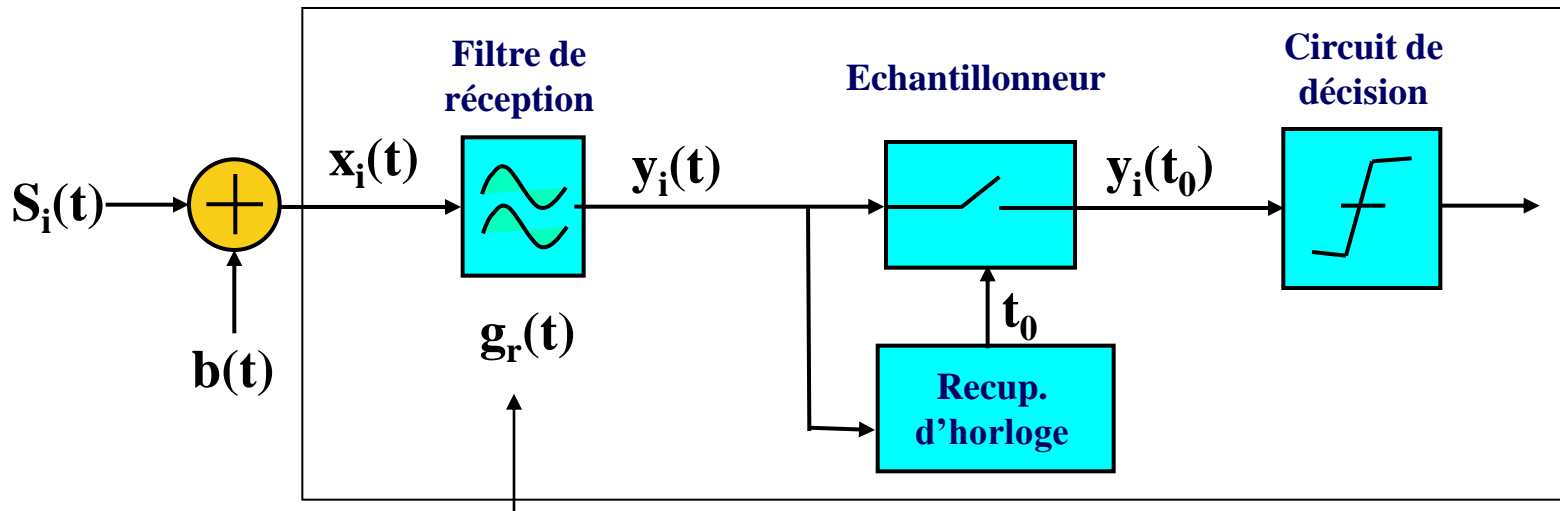
Le filtrage et le bruit du canal affectent la reconnaissance des symboles reçus et donc le TEB en réception.

Commençons par considérer un **canal à bande illimitée** (pas de filtrage)

## • TEB en réception dans un canal à bande illimitée

On va chercher à quantifier les erreurs dues au bruit additif du canal

### Récepteur



Sert à filtrer au maximum le bruit (bruit blanc : sa puissance est proportionnelle à la bande de fréquence)

## → Entrée du filtre

En fait DS de tension quadratique ( $V^2/Hz$ )

$$x_i(t) = S_i(t) + b(t) \quad \text{avec } b(t) \text{ bruit blanc gaussien} \Rightarrow \gamma_b(f) = \frac{N_0}{2} \quad (\text{DSP})$$

$i = 0,1$

## → Sortie du filtre

$$y_i(t) = S_i(t) * g_r(t) + \underbrace{b(t) * g_r(t)}_{n(t)}$$

$n(t)$

avec

$$\frac{N_0}{2} \xrightarrow{(V^2/Hz)} \boxed{G_r(f)} \rightarrow \sigma^2 \xrightarrow{(V^2)}$$

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_r(f)|^2 df$$

Variance du bruit filtré

$$\langle \{n(t) * g_r(t)\}^2 \rangle \quad (V^2)$$

## → Sortie de l'échantillonneur

$$y_i(t_0) = S_i(t) * g_r(t) \Big|_{t_0} + n(t_0)$$

$$y_i(t_0) = U_i + n(t_0)$$



$y_i(t_0)$  peut être vue comme une variable aléatoire gaussienne de centrée sur  $U_i$  et d'écart type  $\sigma$

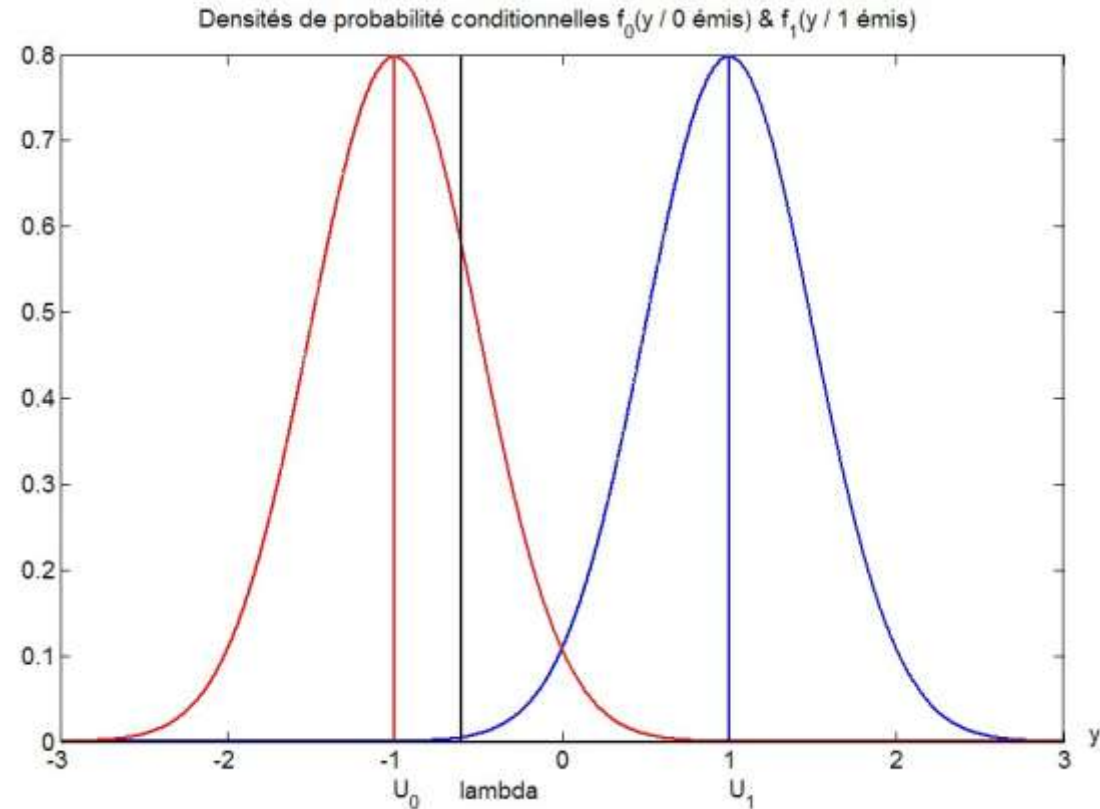


Valeur certaine (i étant supposé fixé)

Densités de probabilité de  $y_1$  et  $y_0$  en sortie de l'échantillonneur

$$f_1(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - U_1)^2}{\sigma^2 2}\right]$$

$$f_0(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - U_0)^2}{\sigma^2 2}\right]$$



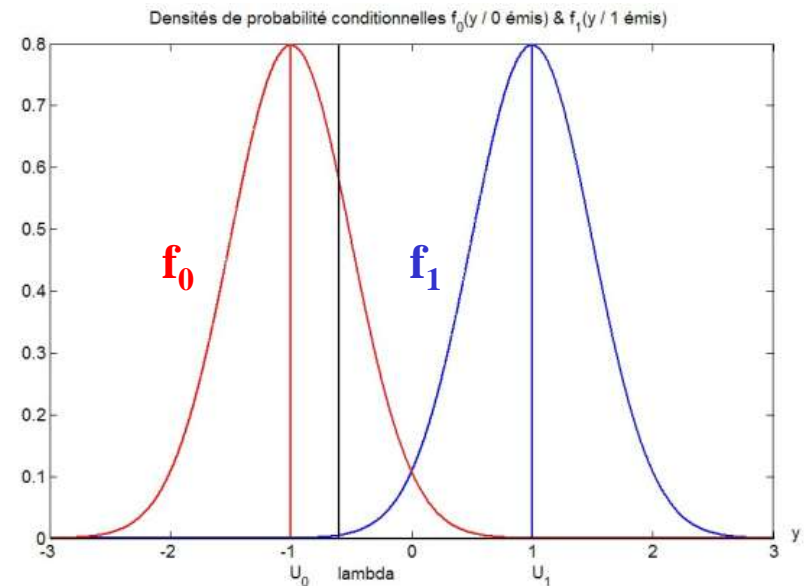
## Probabilité d'erreur en sortie du comparateur à seuil

### Proba d'erreur binaire

$$P_{eb} = p_0 \cdot P(1/0 \text{ émis}) + p_1 \cdot P(0/1 \text{ émis})$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 Proba d'émettre un "0"      Proba de décider "1" quand un "0" est émis

$$P_{eb} = p_0 \cdot \int_{\lambda}^{\infty} f_0(y) dy + p_1 \cdot \int_{-\infty}^{\lambda} f_1(y) dy$$



Après calculs et chgt de variable :

$$P(0/1) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left[ -\frac{(\lambda - U_1)}{\sigma\sqrt{2}} \right]$$

$$P(1/0) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left[ \frac{(\lambda - U_0)}{\sigma\sqrt{2}} \right]$$

avec

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-z^2) dz$$

$$\Rightarrow P_{eb} = \frac{1}{2} p_1 \text{erfc} \left[ -\frac{(\lambda - U_1)}{\sigma\sqrt{2}} \right] + \frac{1}{2} p_0 \text{erfc} \left[ \frac{(\lambda - U_0)}{\sigma\sqrt{2}} \right]$$

### Seuil de décision optimal

Dans le cas d'**équiprobabilité**  $p_0=p_1=1/2$ , alors  $\lambda = \frac{U_0 + U_1}{2}$

Alors

$$P_{eb} = \frac{1}{2} \text{erfc} \left[ \frac{(U_1 - U_0)}{2\sigma\sqrt{2}} \right]$$

← Équiprobabilité  
← Seuil optimal

- Filtre de réception optimal (filtre adapté sous entendu au signal utile)

Le but est d'optimiser le rapport signal sur bruit  $\frac{U_1 - U_0}{2\sigma\sqrt{2}}$  (d'ailleurs  $\text{erfc}(x)$  est décroissante...) en optimisant le filtrage du bruit. **Le filtre optimal est celui dont la fonction de transfert épouse la TF des symboles émis.**

Réponse impulsionnelle du filtre adapté (au signal utile) :

$$g_r^{opt}(t) = k[S_1(t_0 - t) - S_0(t_0 - t)]$$

→ Exprimons  $\frac{U_1 - U_0}{2\sigma\sqrt{2}}$

$$\rightarrow U_1 - U_0 = [S_1(t) - S_0(t)] * k[S_1(t_0 - t) - S_0(t_0 - t)] \Big|_{t=t_0}$$

$$U_1 - U_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} [S_1(\tau) - S_0(\tau)] \cdot k[S_1(\tau - t_0 + t) - S_0(\tau - t_0 + t)] d\tau \Big|_{t=t_0}$$

$$U_1 - U_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(\tau) - S_0(\tau)|^2 d\tau \quad \text{On suppose le signal réel } ( )^2 = | |^2$$

D'après Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(\tau) - S_0(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{S}_1(f) - \hat{S}_0(f)|^2 df = \underline{E_d} = U_1 - U_0$$

$\varepsilon$  de la  $\neq$  entre les symboles

→ **Exprimons**  $2\sigma\sqrt{2} \dots \frac{U_1 - U_0}{2\sigma\sqrt{2}}$

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_r(f)|^2 df \xrightarrow{\text{Parseval}} \sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_r(t)|^2 dt$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(t_0 - t) - S_0(t_0 - t)|^2 dt \quad \Rightarrow \sigma^2 = \frac{N_0}{2} E_d$$

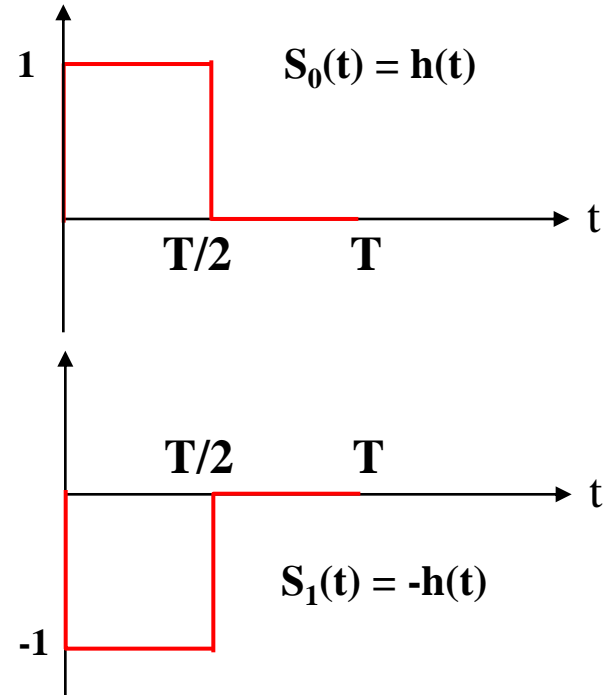
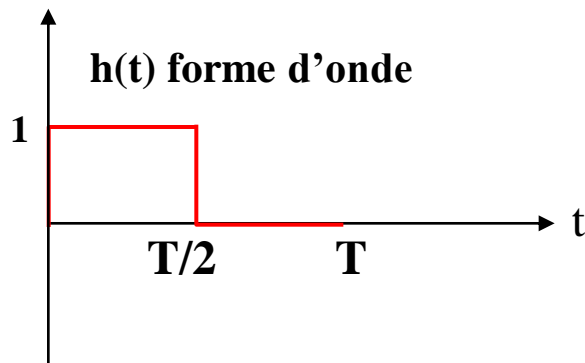
D'où  $\frac{U_1 - U_0}{2\sigma\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{E_d}{4N_0}}$

$$\Rightarrow P_{eb} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_d}{4N_0}} \right)$$

(V<sup>2</sup>)  
 ← Équiprobabilité  
 ← Seuil optimal  
 ← Filtre adapté  
 (V<sup>2</sup>)



Et lorsque le signal binaire basé sur une **forme d'onde unique**



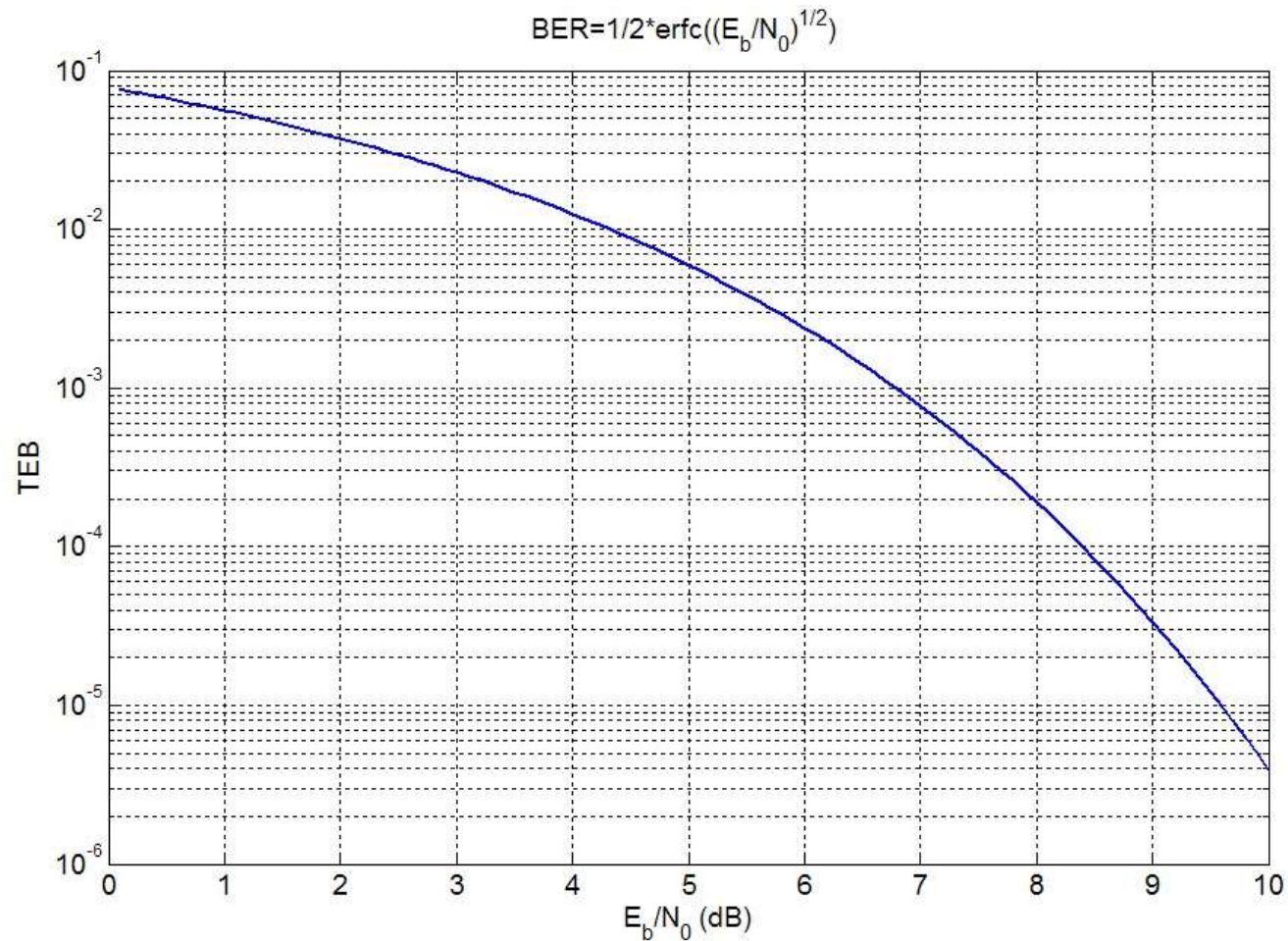
$$E_d = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau) + h(\tau)|^2 d\tau = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|^2 d\tau = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = 4E_b$$

Alors

$$\Rightarrow P_{eb} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

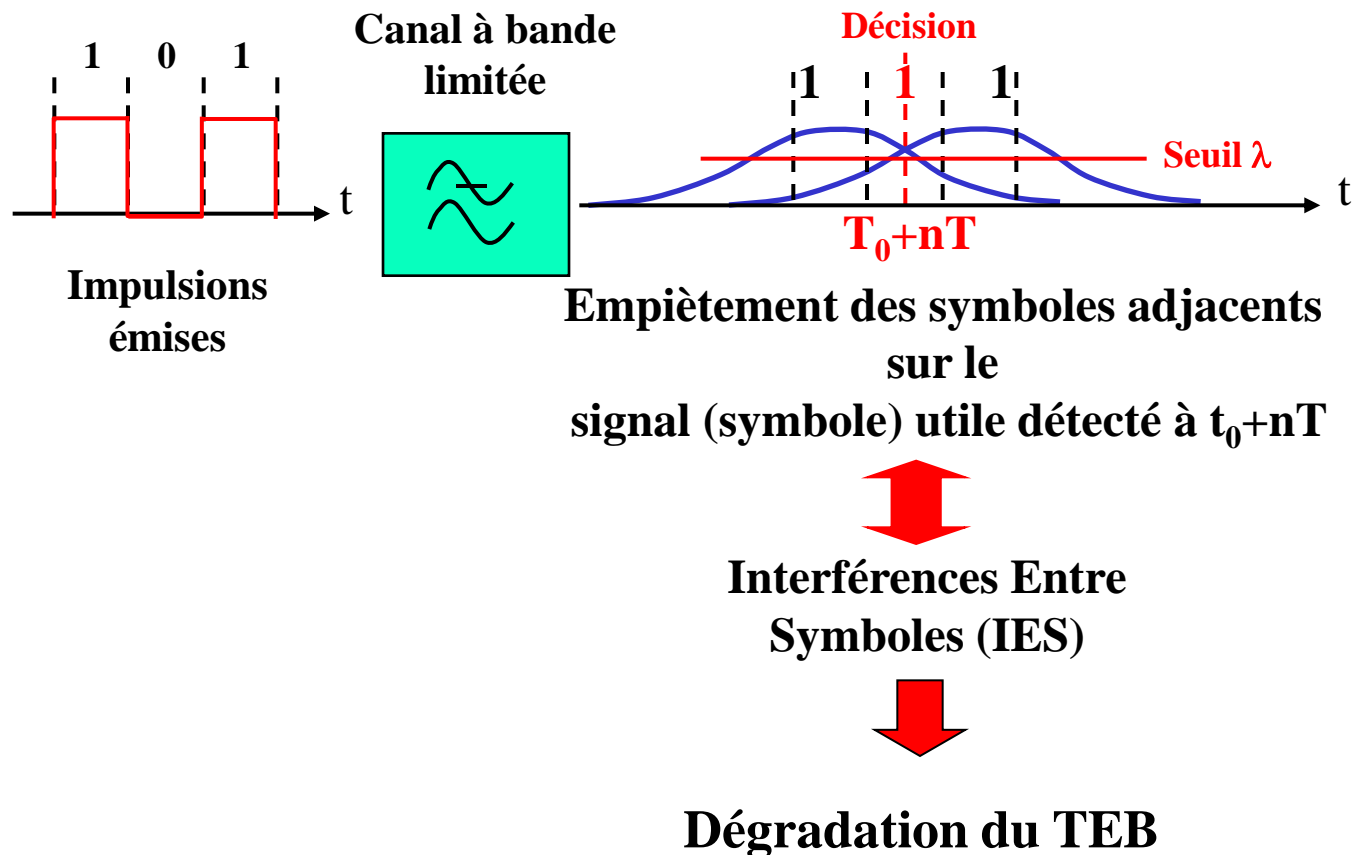
- ← Équiprobabilité
- ← Seuil optimal
- ← Filtre adapté
- ← Forme d'onde unique avec  $a_i = \pm 1$

(V<sup>2</sup>)



## • Perturbations liées à la limitation en bande passante du canal

Considérons maintenant l'effet du filtrage du canal (bande limitée) sur les symboles reçus.

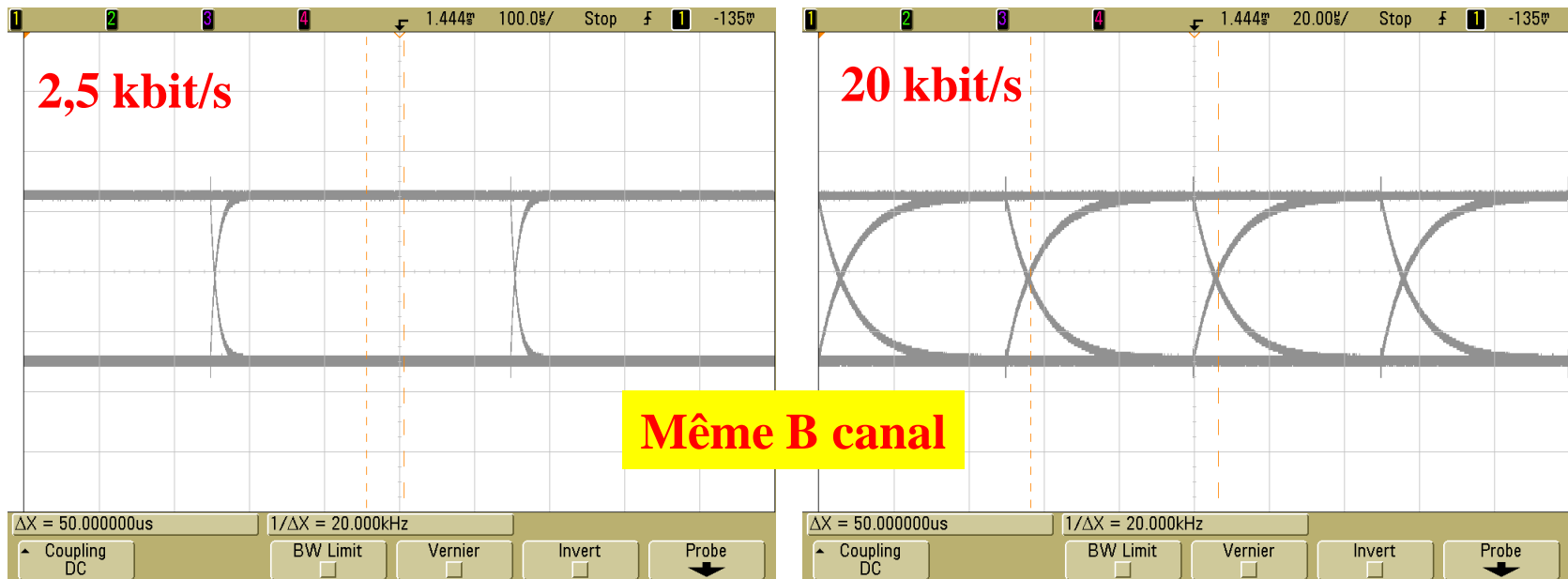


## • Perturbations liées à la limitation en bande passante du canal

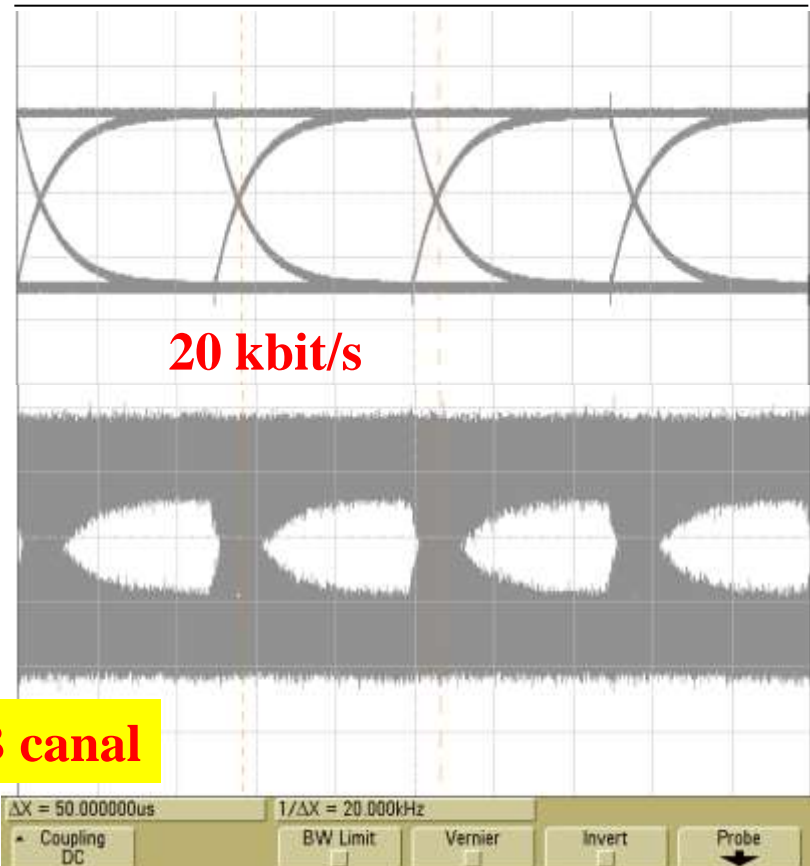
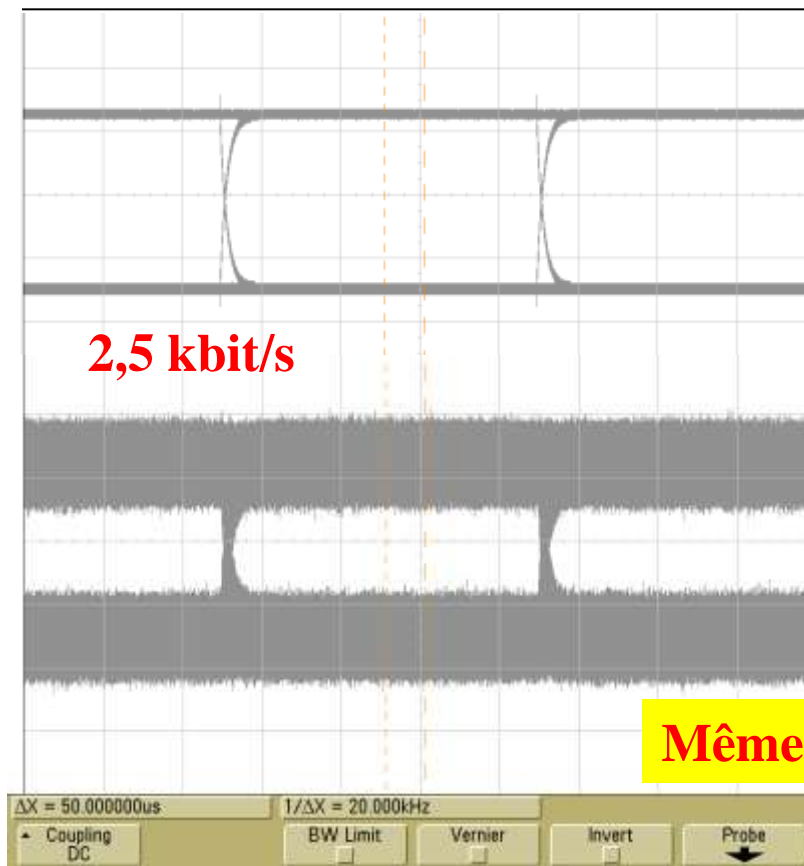
Diagramme de l'oeil :

L'observation à l'oscilloscope de la superposition des symboles reçus (rémanence  $\infty$ ) est appelée diagramme de l'oeil.

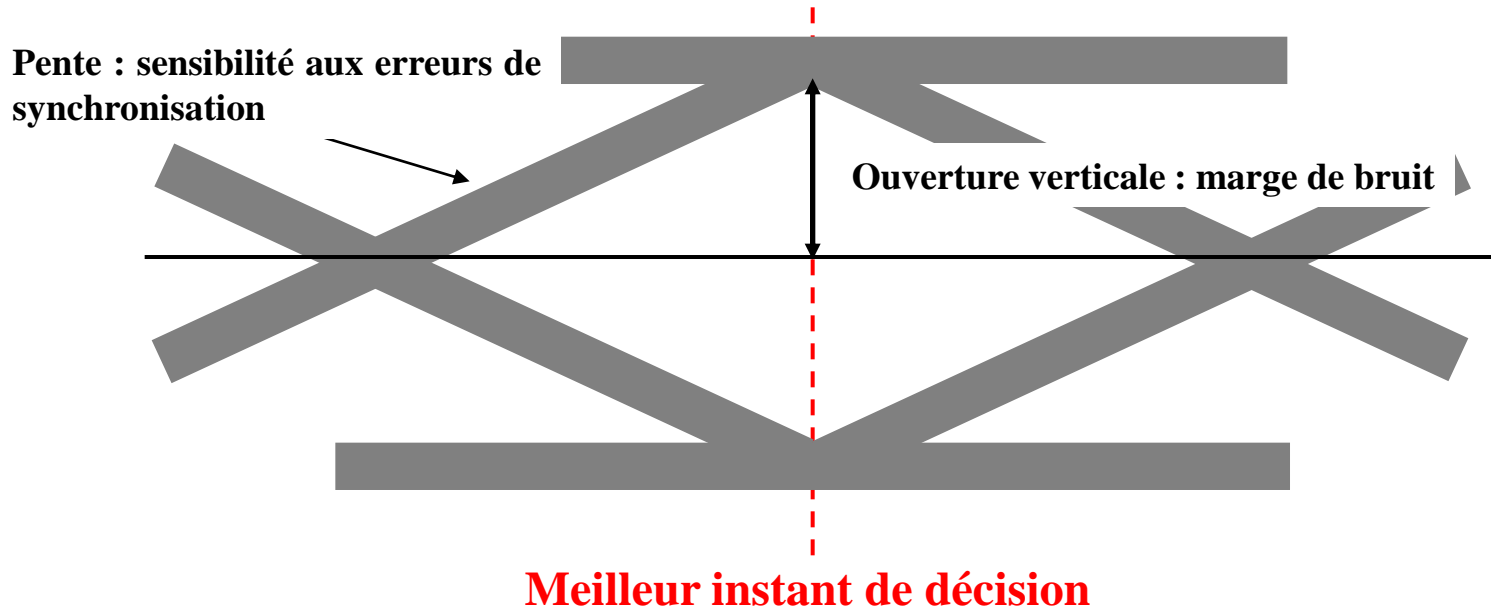
Dans un canal de bande **B** fixée, l'↗ du débit symbole  $\Rightarrow$  l'↗ de l'IES et donc la **fermeture du diagramme de l'oeil** :



En présence de bruit le diagramme de l'oeil aura également tendance à se fermer :



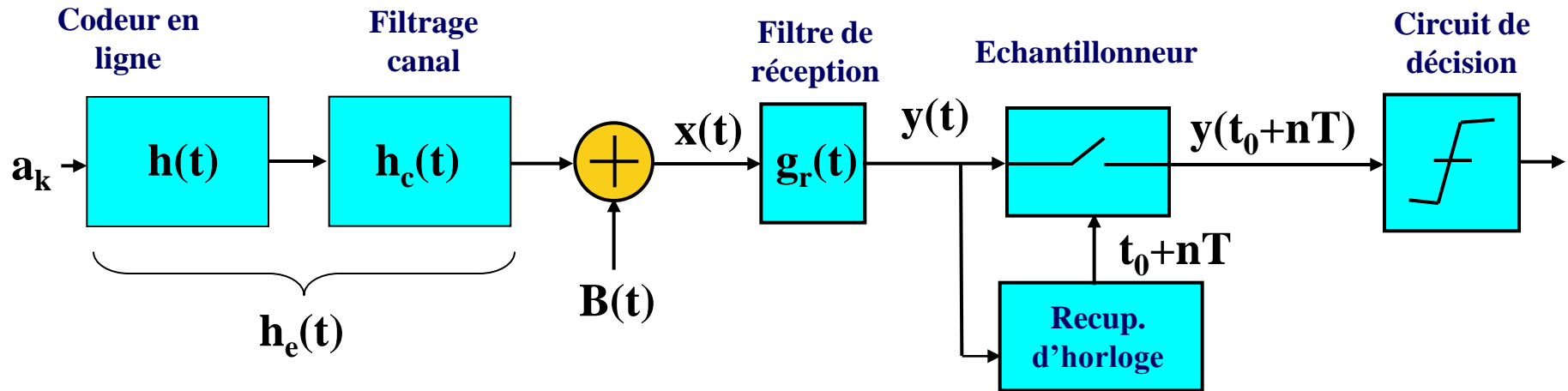
Même B canal



Le rapport entre l'épaisseur des traits et de l'ouverture verticale est une indication du rapport signal sur bruit et donc du TEB.

Mais le diagramme de l'oeil reste une mesure qualitative de la *qualité* de transmission.

## • Signal échantillonné $y(t_0+nT)$ en réception



$$x(t) = \sum_k a_k h(t - kT) * h_c(t) + B(t)$$

$$y(t) = \sum_k a_k h(t - kT) * h_c(t) * g_r(t) + B(t) * g_r(t)$$

$$y(t) = \sum_k a_k r(t - kT) + b(t) \quad \text{en posant} \quad \begin{cases} b(t) = B(t) * g_r(t) \\ r(t) = h(t) * h_c(t) * g_r(t) \end{cases}$$

On échantillonne à l'instant  $t_0 + nT$

$$y(t_0 + nT) = \sum_k a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT) \quad \text{On pose } \mathbf{m=n-k}$$

$$y(t_0 + nT) = a_n r(t_0) + \sum_{m \neq 0} a_{n-m} r(t_0 + mT) + b(t_0 + nT)$$

Information utile  
relative au  $n^{\text{ième}}$   
symbole que l'on  
veut reconnaître

IES des symboles  
 $m \neq n$  sur le  
symbole  $m$

bruit

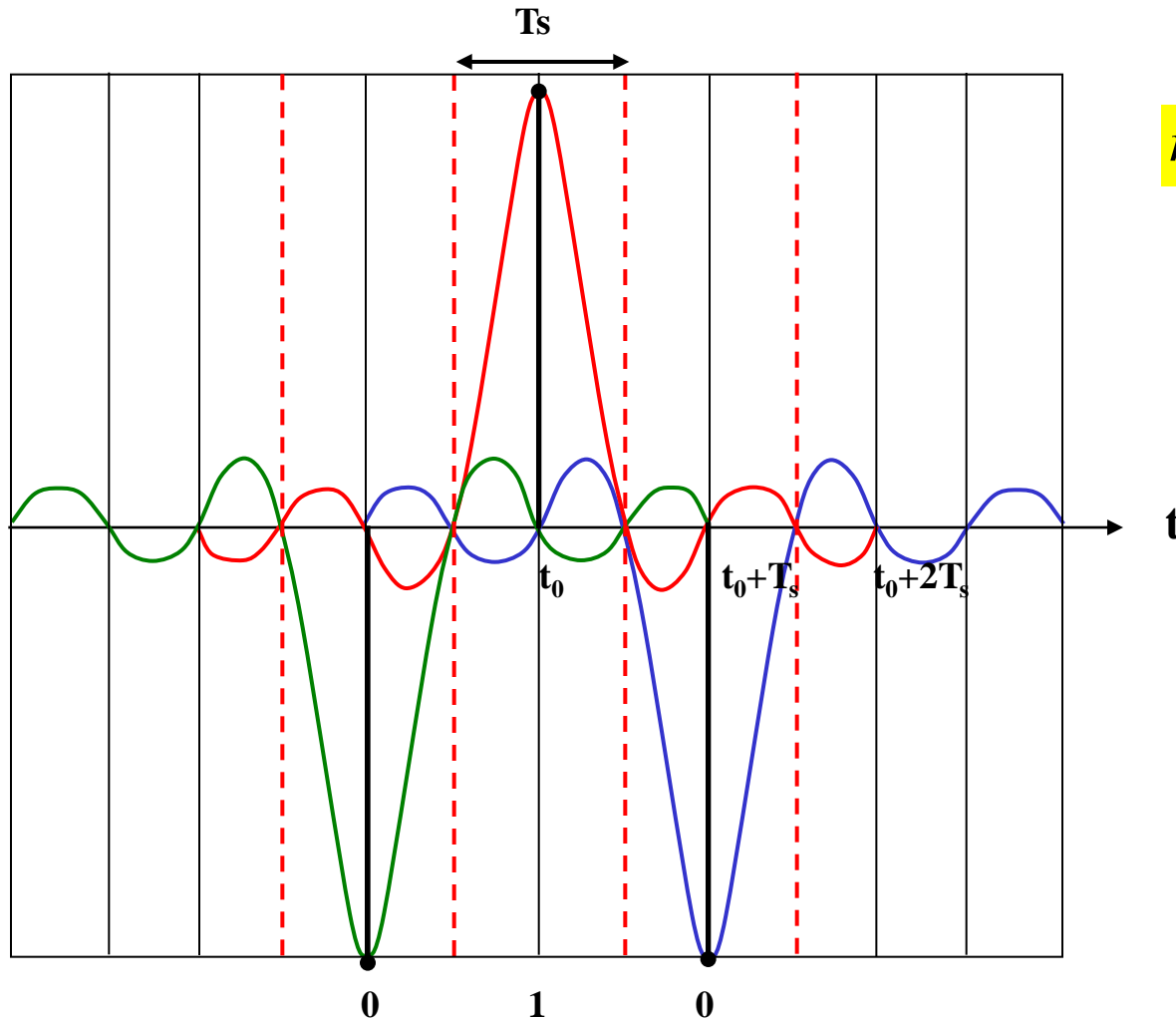
Parasitage de l'info  $n$  par  
l'étalement des symboles  
adjacents

On veut qu'à  $t_0$  il n'y ait pas d'IES

**Mathématiquement** cela revient à annuler les termes d'IES  $r(t_0 + mT) \forall m = n - k \neq 0$



- Critère de Nyquist sur la forme **temporelle** des impulsions reçues



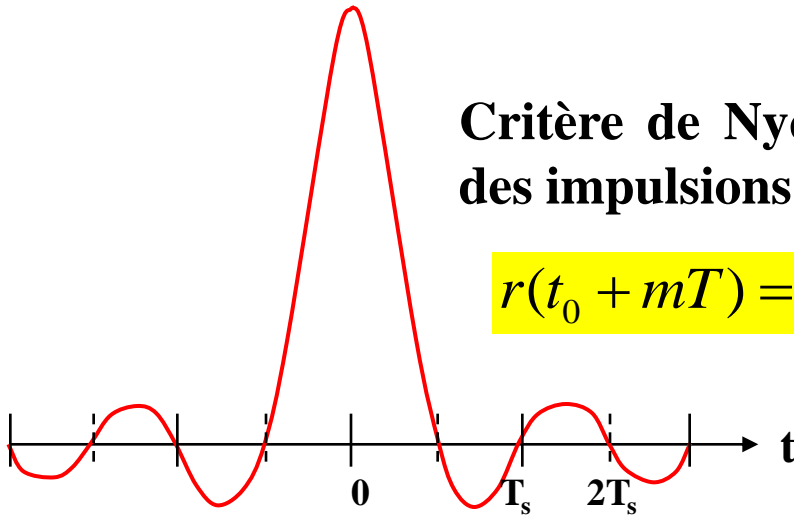
Critère de Nyquist

$$r(t_0 + mT) = 0 \quad \forall m \neq 0$$

**Aux instants de décision  
pas d'IES**

**Critère de Nyquist porte sur la forme d'onde temporelle des impulsions qui doivent s'annuler  $\forall kT$**

$$r(t_0 + mT) = 0 \quad \forall m \neq 0$$



## • Critère de Nyquist sur le spectre des impulsions

**Quelle condition doit vérifier le spectre des impulsions pour qu'il n'y ait pas d'IES aux instants de décision ?**

**Vous reprendrez bien un peu de calculs?**

Faisons abstraction du bruit et considérons **une** impulsion reçue  $r(t)$ ;  
calculons son spectre

Impulsion échantillonnée  $r_e(t)$

$$r_e(t) = r(t) \sum_n \delta(t - t_0 - nT)$$

$$r_e(t) = r(t) \left( \sum_n \delta(t - nT) \right) * \delta(t - t_0)$$

$$R_e(f) = R(f) * \left( \frac{1}{T} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \right) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$R_e(f) = R(f) * \left( \frac{1}{T} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) e^{-j2\pi f t_0} \right)$$

$$R_e(f) = \frac{1}{T} \sum_n R\left(f - \frac{n}{T}\right) e^{-j2\pi \frac{nt_0}{T}} \quad (1)$$

Or par ailleurs  $r_e(t) = r(t) \sum_n \delta(t - t_0 - nT)$

$$r_e(t) = \sum_n \underline{r(t_0 + nT)} \delta(t - t_0 - nT)$$

Indép de t

$$R_e(f) = \sum_n r(t_0 + nT) e^{-j2\pi f(t_0 + nT)} \quad (2)$$

$$(1)=(2) \Rightarrow \frac{1}{T} \sum_n R\left(f - \frac{n}{T}\right) e^{-j2\pi \frac{nt_0}{T}} = \sum_n r(t_0 + nT) e^{-j2\pi f(t_0 + nT)} \quad (3)$$

Or, rappelons la condition de Nyquist  $r(t_0 + mT) = 0 \quad \forall m \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \sum_n R\left(f - \frac{n}{T}\right) e^{-j2\pi \frac{nt_0}{T}} = r(t_0) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\Rightarrow \sum_n R\left(f - \frac{n}{T}\right) e^{-j2\pi \left(f - \frac{n}{T}\right) t_0} = T r(t_0)$$

$$\Rightarrow \sum_n \frac{R\left(f - \frac{n}{T}\right)}{r(t_0)} e^{-j2\pi \left(f - \frac{n}{T}\right) t_0} = T$$

**Critère de Nyquist :** si  $R(f)$  vérifie cette formule alors il n'y a pas d'IES à l'instant de décision

$$\Leftrightarrow \sum_n R^{(t_0)}\left(f - \frac{n}{T}\right) = T$$

$$\text{avec } R^{(t_0)}(f) = \underbrace{\frac{R\left(f - \frac{n}{T}\right)}{r(t_0)} e^{j2\pi f t_0}}_{\text{TF de l'impulsion normalisée par rapport à } r(t_0) \text{ et déphasée...}}$$

C'est une somme de motifs (spectres) traduits.

Or, si le spectre est de largeur  $B < 1/2T$ , il ne peut y avoir recouvrement des motifs et la somme ne peut être constante ( $=T$ ).

On ne peut pas transmettre sans IES un signal de rapidité de modulation  $R = \frac{1}{T}$  dans une bande  $< \frac{1}{2T}$



**Objectif** : pas d'IES aux instants  $t_0 - nT$  de prise de décision  
(aux autres instants peu importe)

**(1) Critère de Nyquist** : la forme d'onde temporelle des impulsions doit s'annuler  $\forall kT$  (T temps symbole)

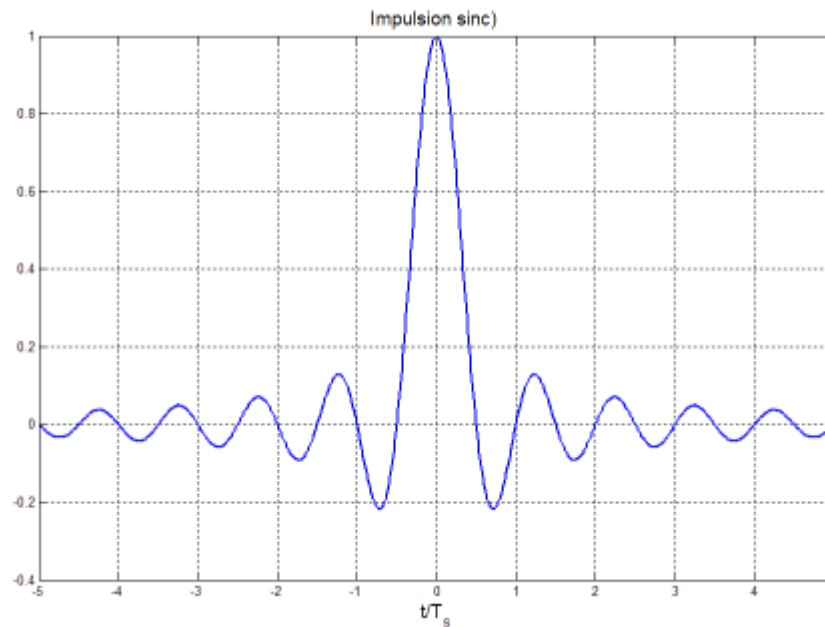
**(2)** On traduit le **critère de Nyquist** en fréquence  $\Rightarrow$  on obtient la condition équivalente sur le spectre des impulsions (reçues).

**(3)** On en déduit une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour que le critère de Nyquist soit respecté :  
Bande fréquence  $\Rightarrow B \geq f/2$  (f=fréquence symbole)



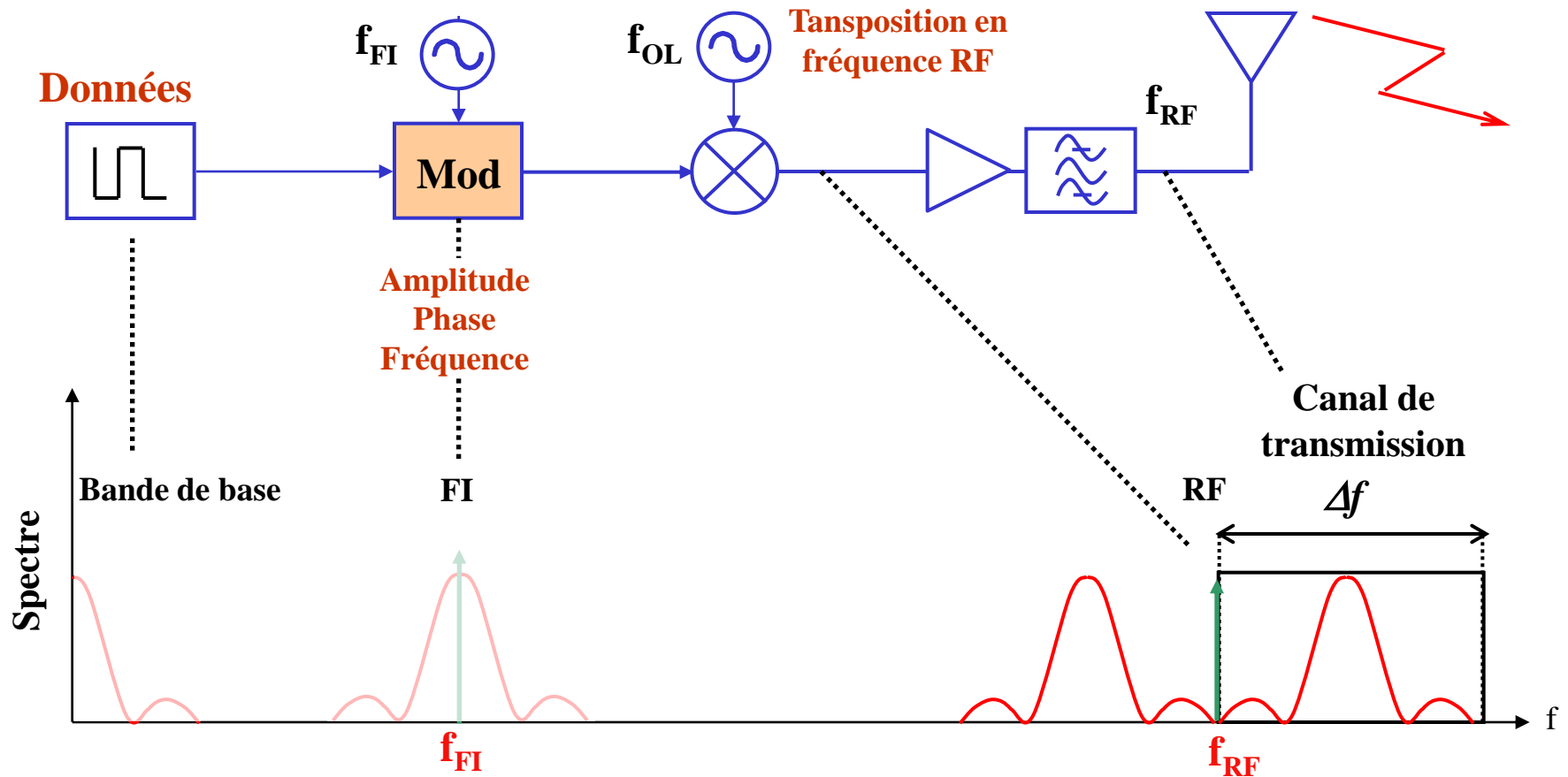
Pour n'avoir pas d'IES on peut prendre n'importe quelle forme d'impulsion qui satisfasse le critère de Nyquist (annulation tous les  $kT$ ) : sinus cardinal cosinus surélevé...

- Exemples d'impulsions satisfaisant au critère de Nyquist





## • Transmission numérique sur fréquence porteuse :



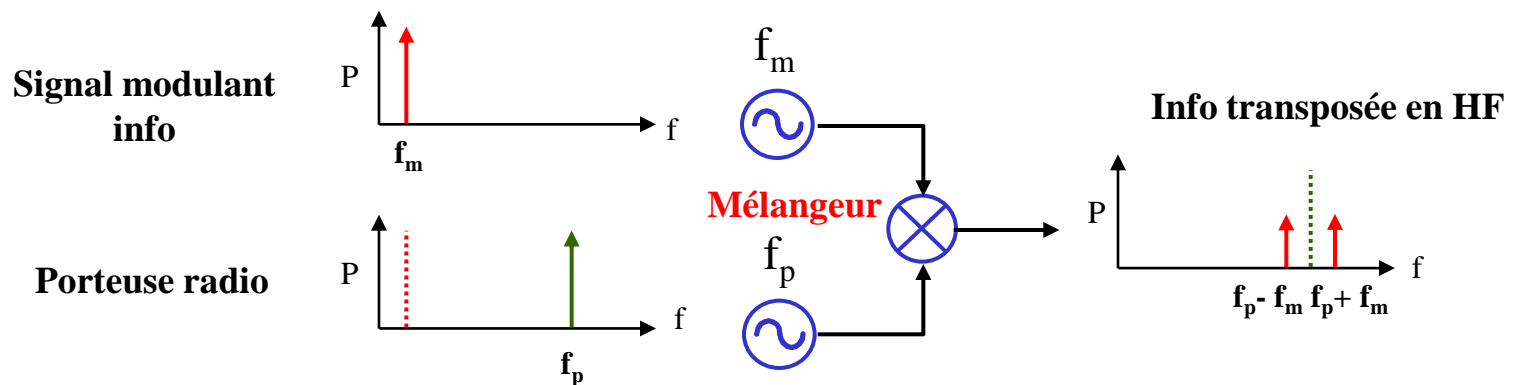
**Objectif : adapter le signal au canal de transmission**

Principe de base  $\longrightarrow$  la multiplication

$$\cos a * \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

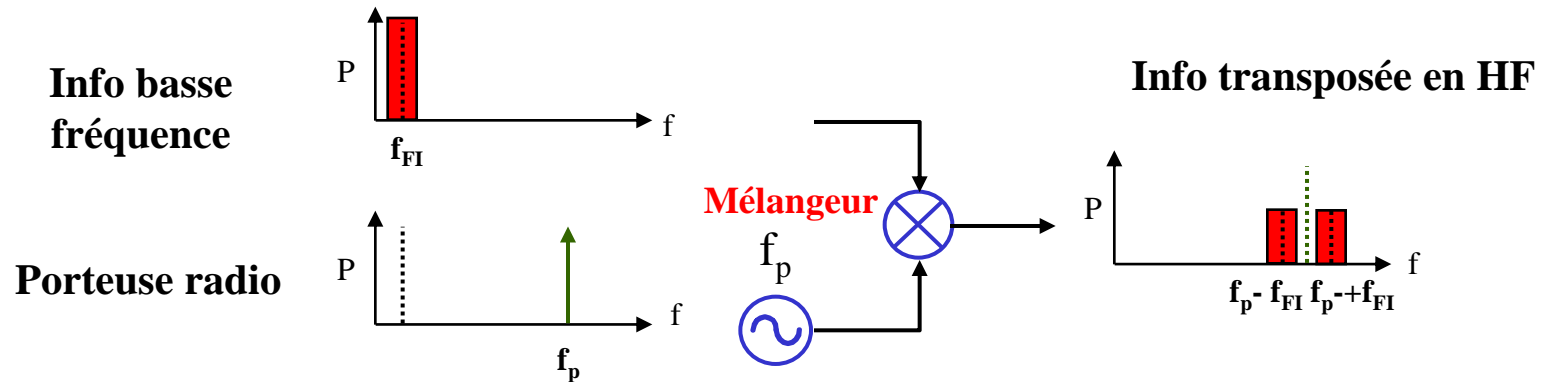
Le simple fait de **multiplier** un signal oscillant à une fréquence  $f_m$  par un signal oscillant à une fréquence  $f_p$  génère deux signaux l'un à la fréquence  $f_p - f_m$  et l'autre à  $f_p + f_m$ .

$$A \cos(2\pi f_p t) * B \cos(2\pi f_m t) = \frac{1}{2} AB \left\{ \cos[2\pi(f_p + f_m)t] + \cos[2\pi(f_p - f_m)t] \right\}$$



Ceci peut être vu comme une **transposition** du signal basse fréquence **en haute fréquence**.

De façon analogue, la multiplication d'un signal occupant une bande de fréquence  $B$  par une porteuse de fréquence  $f_p$ , transpose la bande en question de part et d'autre de  $f_p$ .

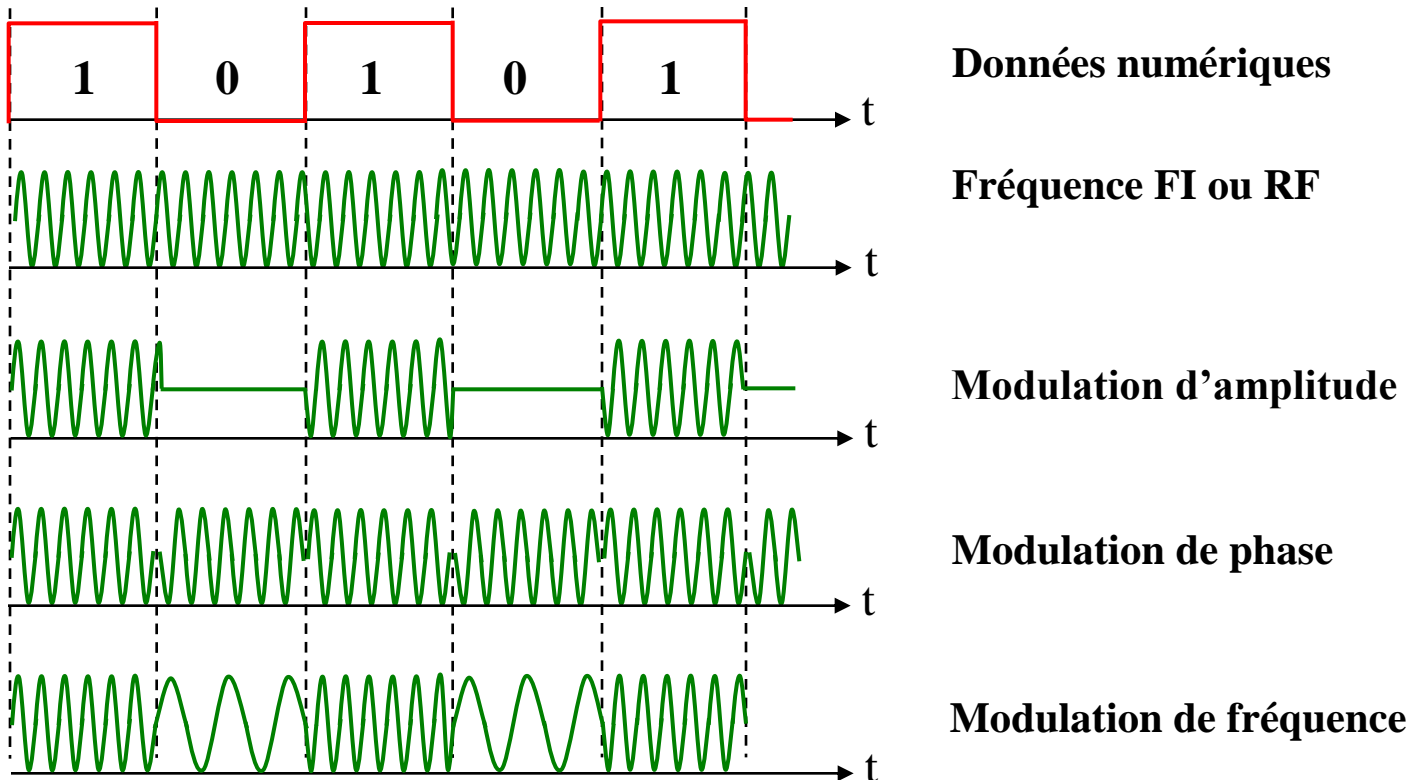


Classiquement, le spectre que l'on transpose à la fréquence  $f_p$  est celui d'une fréquence intermédiaire ayant subi une **modulation numérique**.

La **modulation numérique** d'une porteuse (ou FI) consiste à **faire varier l'amplitude, la fréquence ou la phase d'une onde sinusoïdale (porteuse)** en fonction des éléments binaires à transmettre.

Les éléments binaires peuvent être regroupés en n-uplets au nombre de  $M$  ( $M=2^n$ ) auquel cas **la grandeur modulée pourra présenter  $M$  états  $\neq$ .**

## • Illustration : modulations numériques à 2 états



Le choix du format de modulation est fait principalement sur deux critères :

➔ L'**efficacité spectrale** (bit/s)/Hz

➔ Le **TEB** pour un même S/N

Des **critères techniques** (facilité de mise en oeuvre...) peuvent aussi rentrer en ligne de compte.

Pour chaque format de modulation numérique tout comme pour les signaux en bande de base il est donc important de connaître :

➔ Le spectre correspondant

➔ Le TEB(S/N) correspondant

➔ Les circuits de modulation et de démodulation

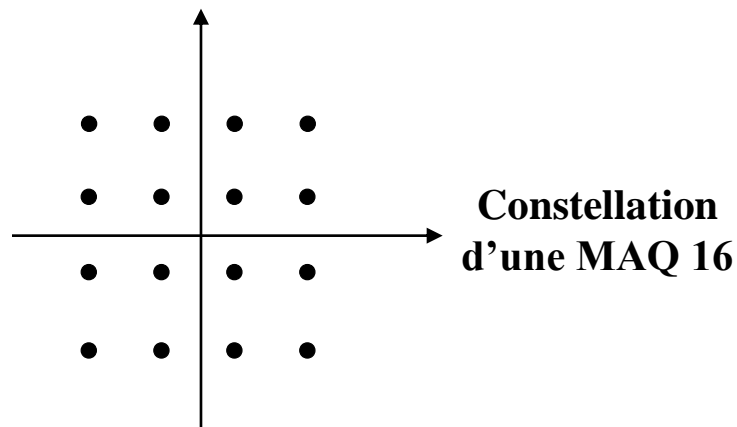
On peut représenter géométriquement les différents états de modulation dans le plan de Fresnel

Pour les **modulations numériques d'amplitude et de phase** on peut représenter géométriquement les différents états du signal modulé  $s(t)$  dans le **plan de Fresnel**.

$$s(t) = A_{k(i)} \cos(2\pi f_0 t + \phi_{k(i)}) \quad \text{avec} \quad i \in \{0, \dots, M-1\} \text{ où } M = 2^n$$

**Chaque état de modulation  $i$  est représenté par un vecteur de module  $A_i$  et d'angle  $\phi_i$ .**

Cette représentation des états de modulation est appelée **constellation**.

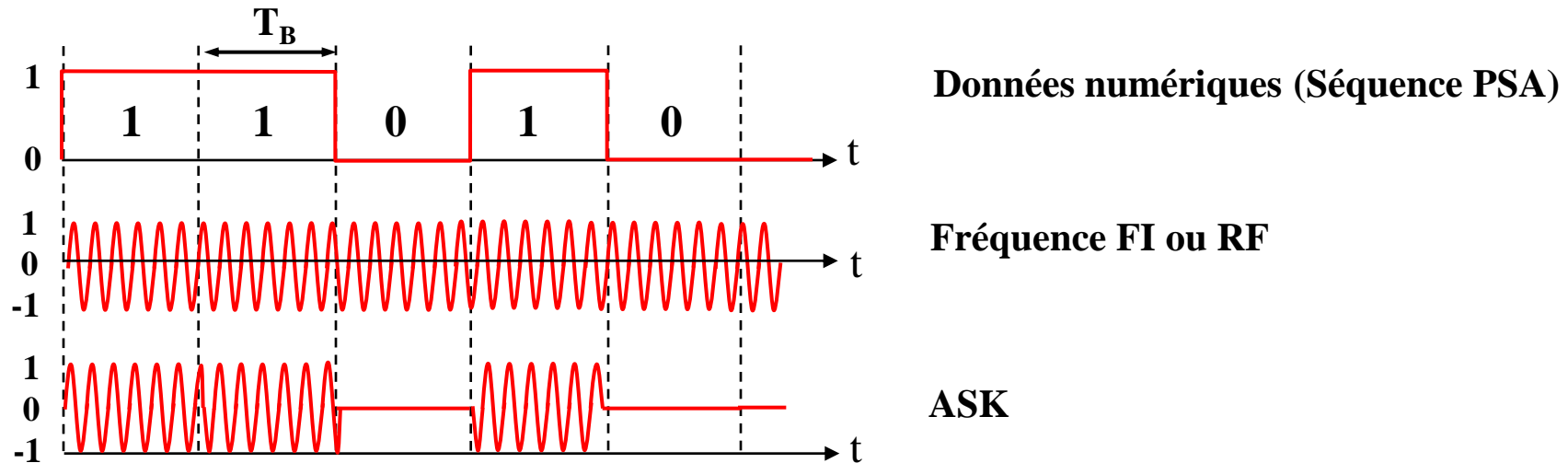




## • Modulation OOK ou ASK :

OOK : On Off Keying

ASK : Amplitude Shift Keying



Le signal modulé  $s(t)$  est le produit des données  $i(t)$  (“i” pour info) en bande de base par la porteuse  $p(t)$ .

$$\left. \begin{aligned} i(t) &= \sum_k a_k h(t - kT) \\ p(t) &= A \cos 2\pi f_0 t \end{aligned} \right\} \Rightarrow s(t) = p(t) \cdot i(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \cdot \sum_k a_k h(t - kT)$$

Spectre d'une modulation OOK :

- **DSP bilatérale** du signal en bande de base

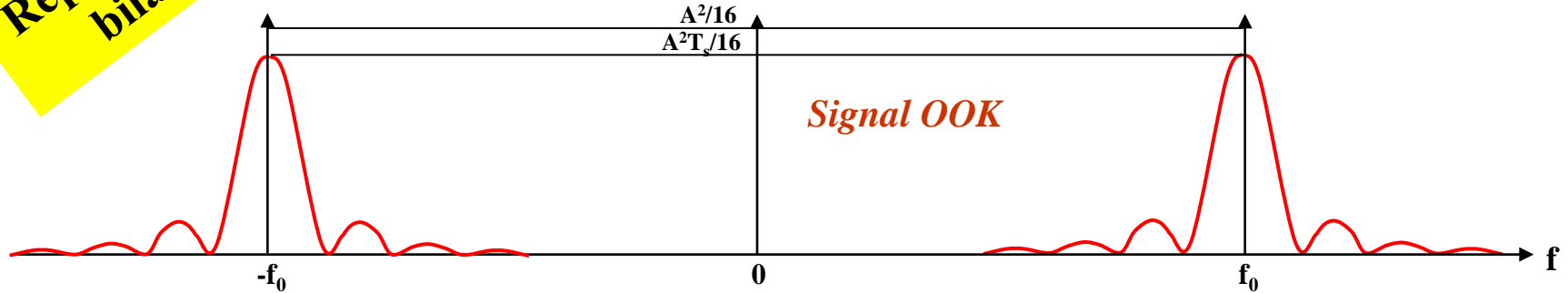
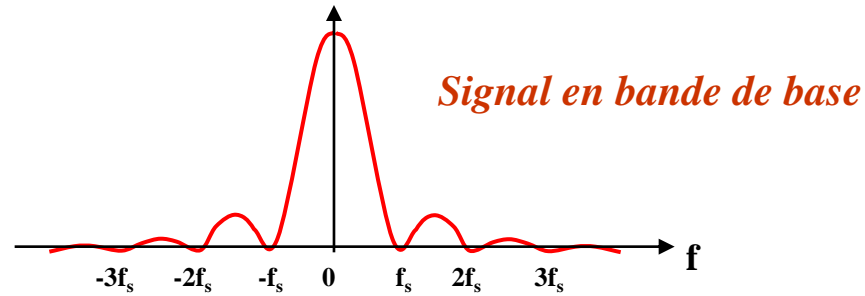
$$\gamma_i = \frac{T_s}{4} \sin^2(fT_s) + \frac{1}{4} \delta(f)$$

↑  
Composante continue

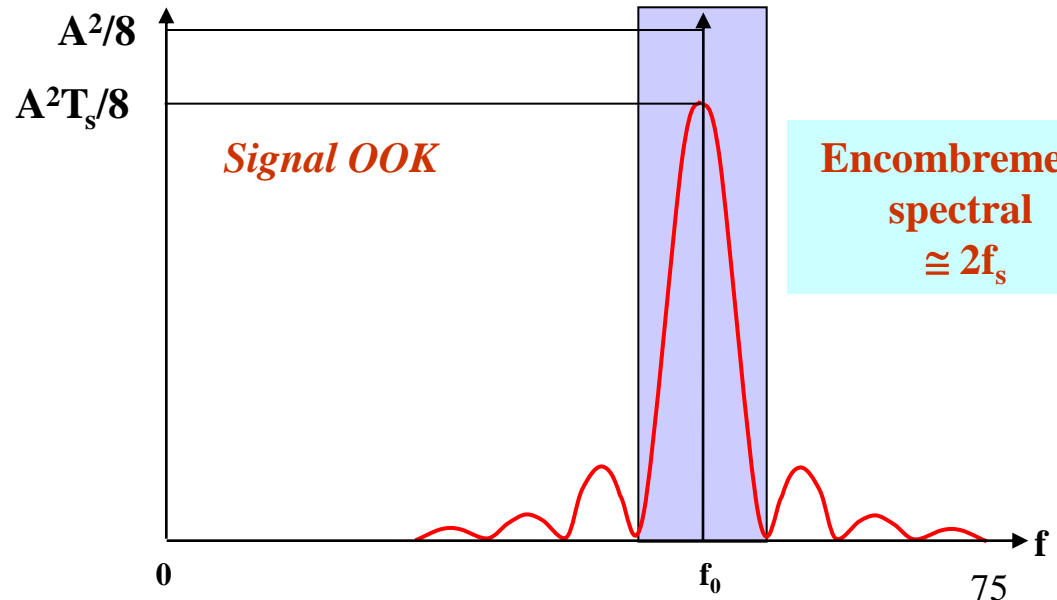
- **DSP bilatérale**  $\gamma_s$  du signal OOK *On admet le résultat qui n'est pas immédiat et nécessite de passer par les notions d'envelopes complexes...*

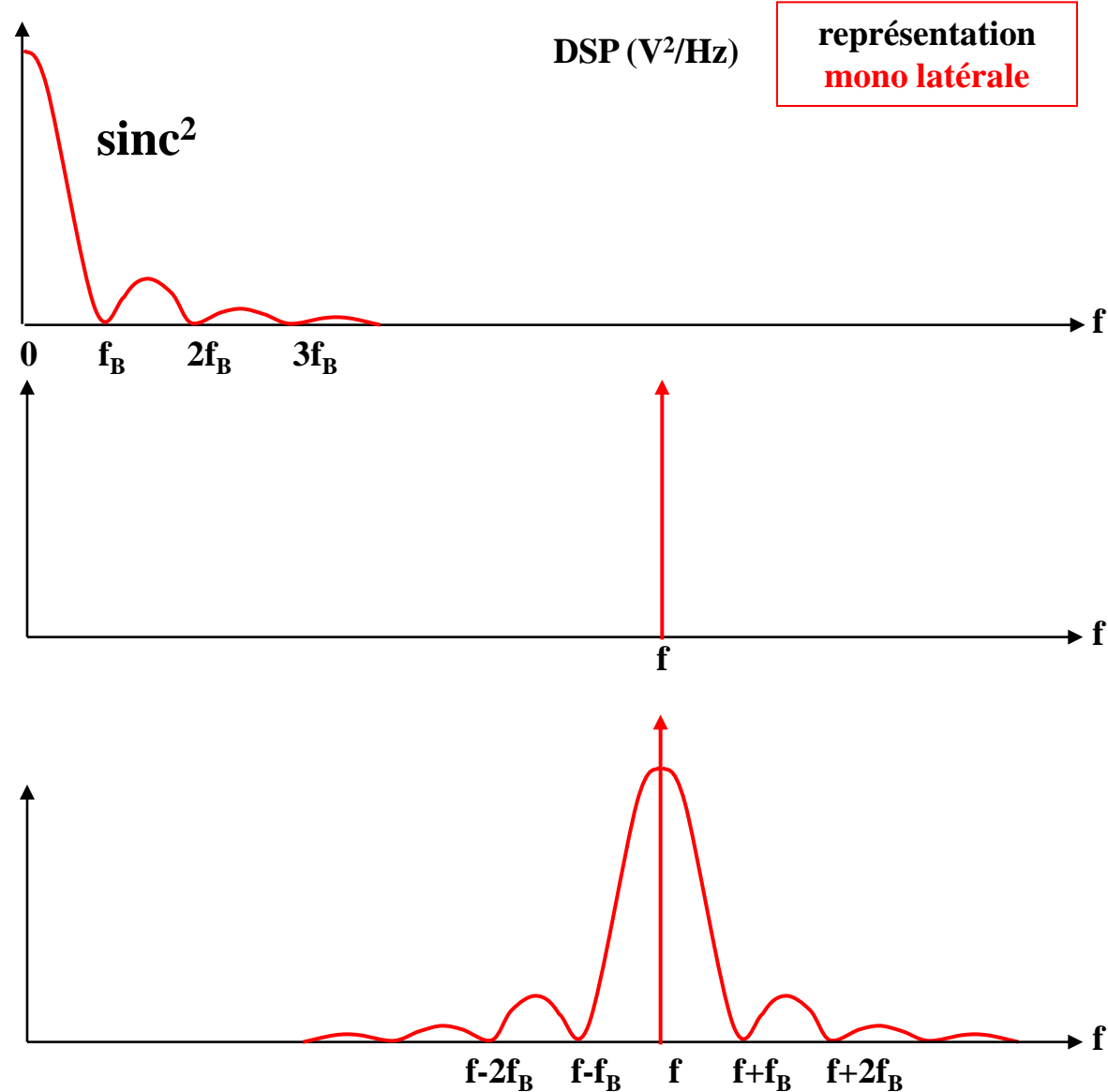
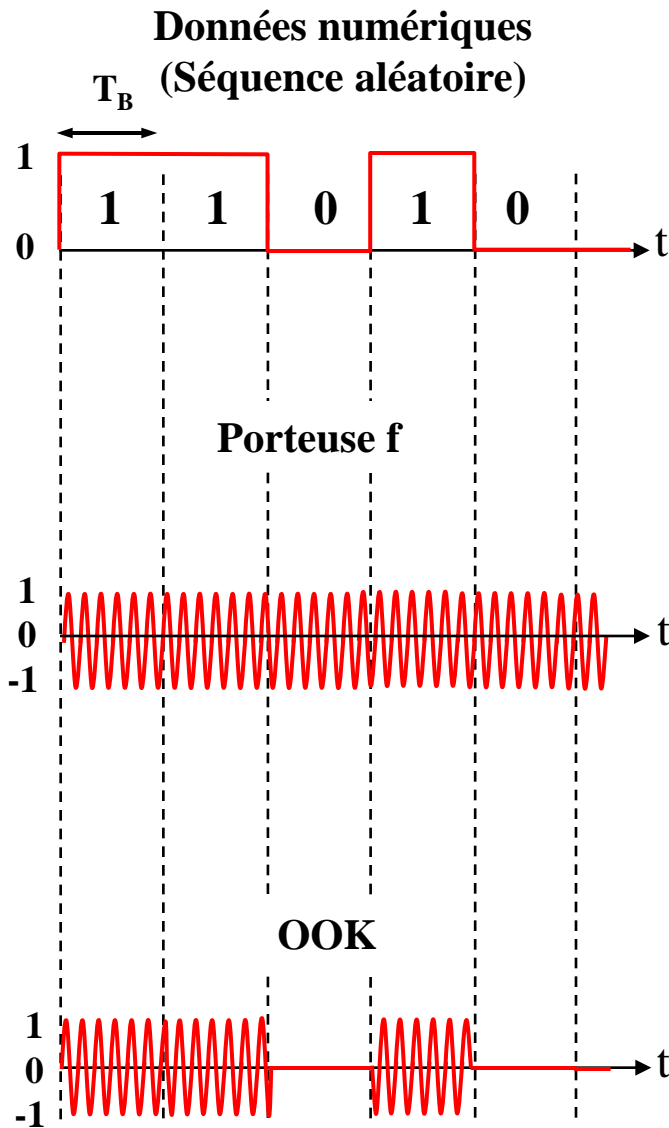
$$\begin{aligned} \gamma_s = & \frac{A^2}{16} \left[ \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \right] \\ & + \frac{A^2 T_s}{16} \left[ \sin^2 \left[ (f + f_0) T_s \right] + \sin^2 \left[ (f - f_0) T_s \right] \right] \end{aligned}$$

Représentations  
bilatérale

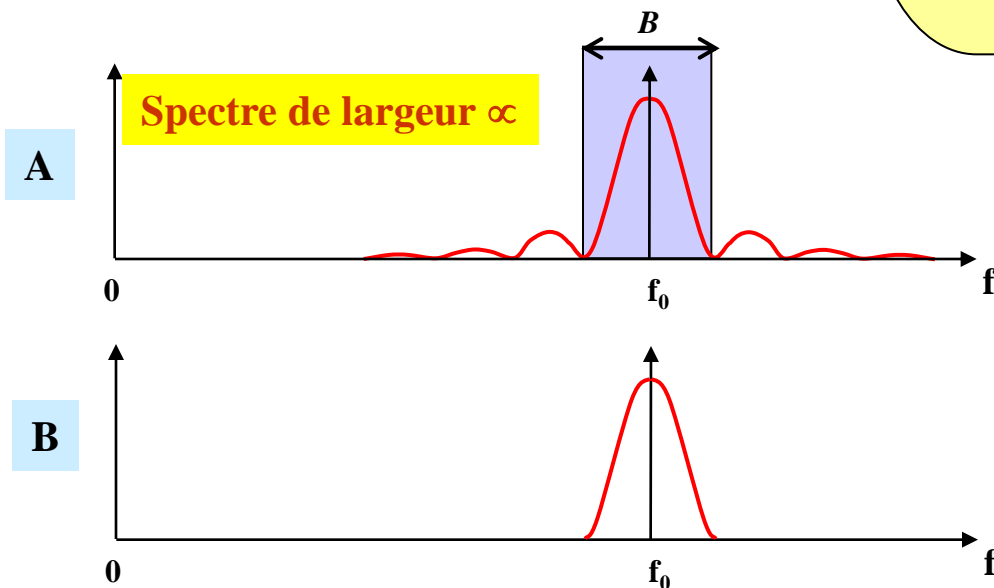
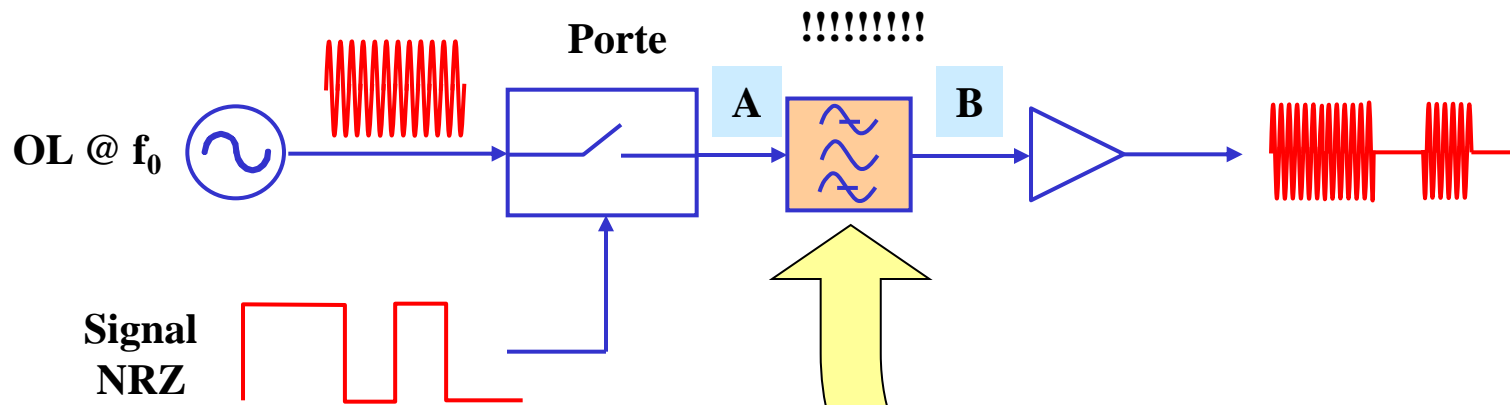


Représentation  
monolatérale





## Modulateurs ASK :



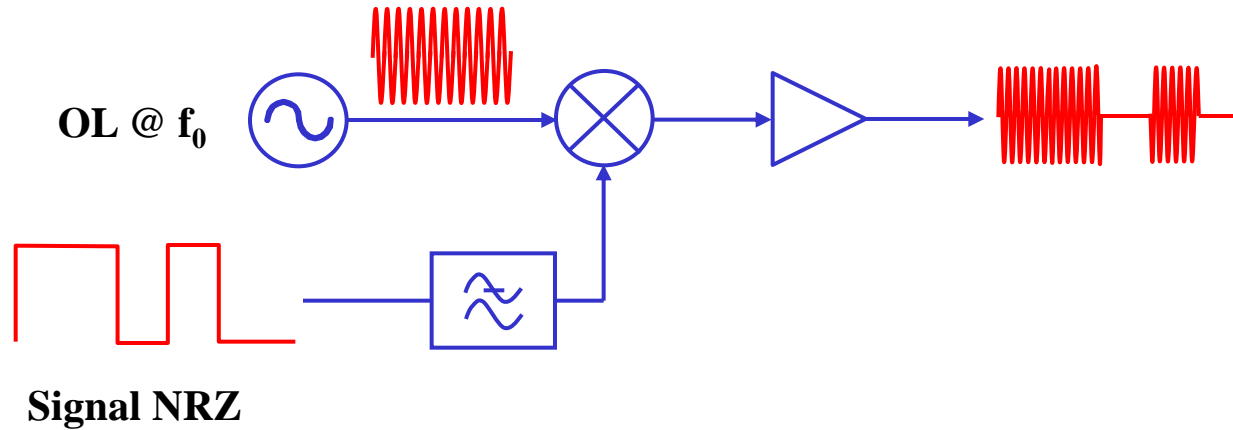
Le **canal** de transmission ayant une **bande B limitée**, un **filtrage est nécessaire** après la porte (le filtrage du signal NRZ n'empêcherait pas une bande  $\infty$  en A)

Le **facteur de qualité Q** du filtre passe bande peut s'avérer élevé (si le débit numérique est lent devant la fréquence porteuse) :

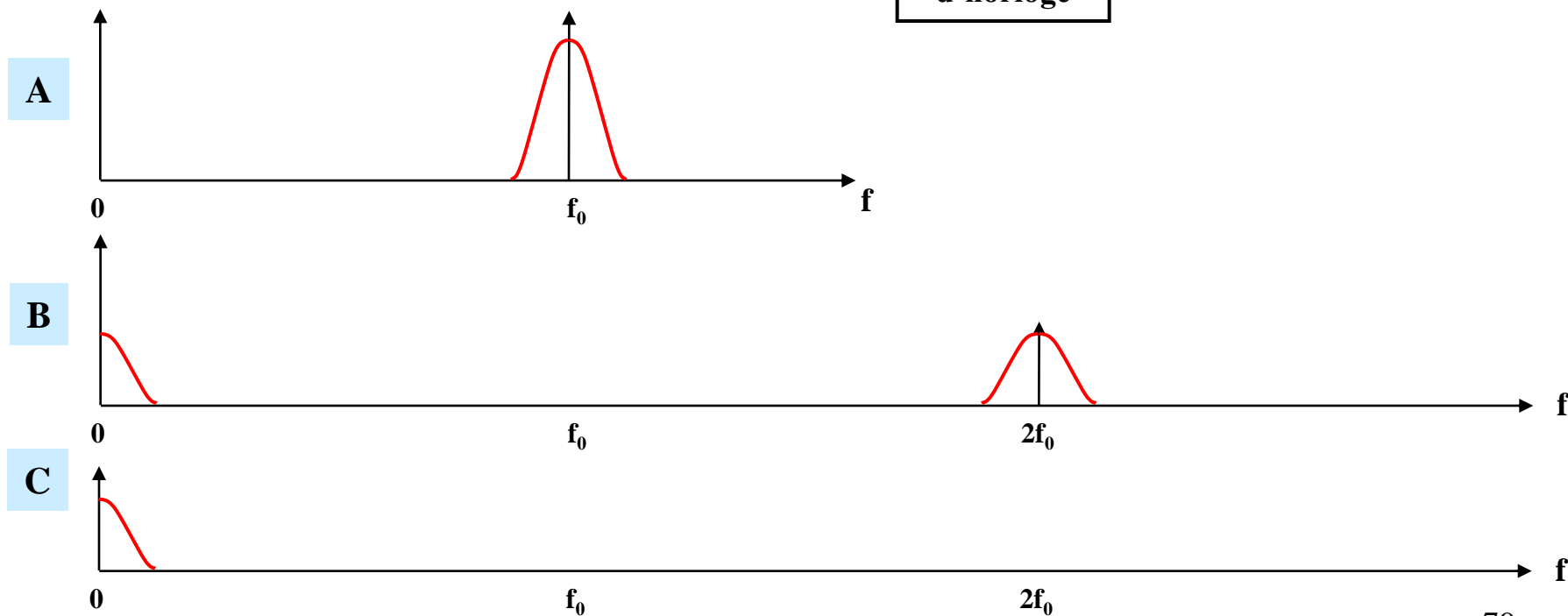
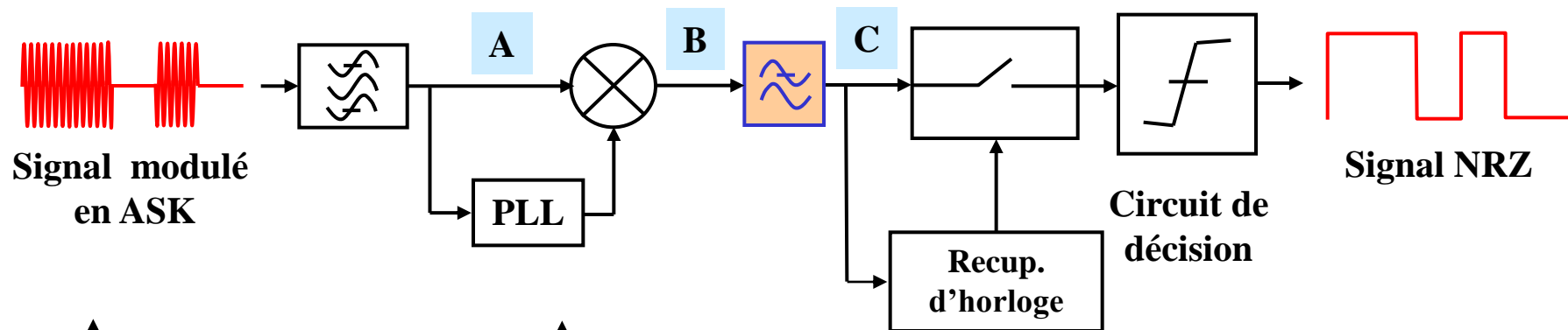
$$Q = \frac{f_0}{B} = \frac{f_0}{\alpha f_b}$$

## Modulateurs ASK :

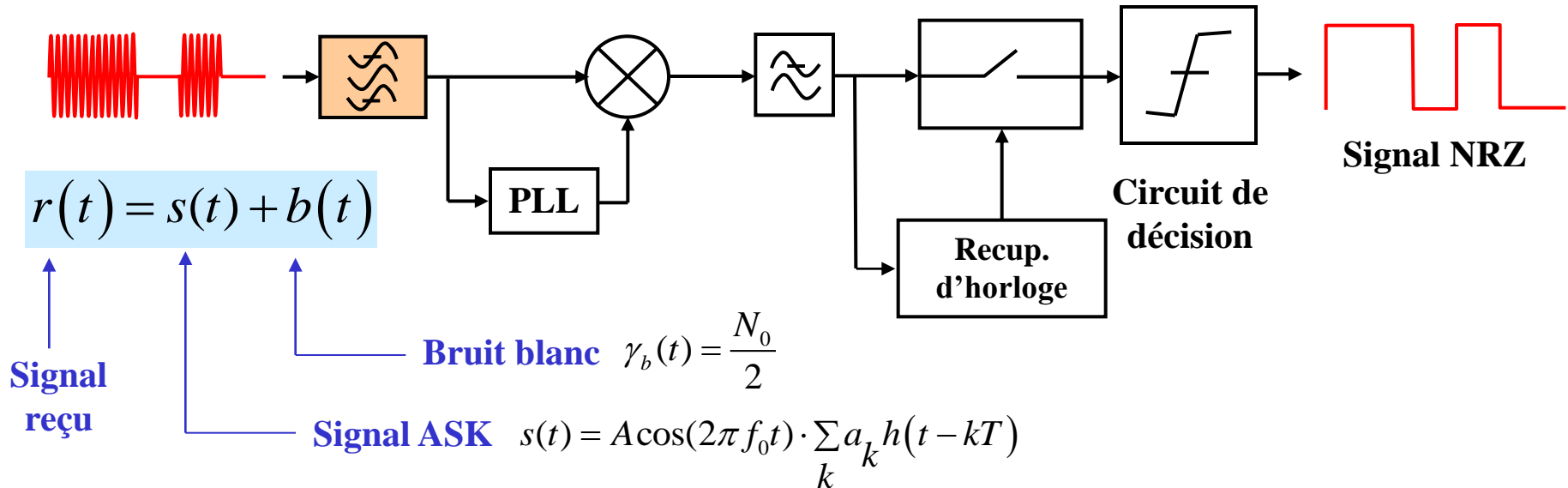
Pour s'affranchir de cette difficulté technologique le modulateur ASK peut être réalisé comme suit :



## Démodulateurs ASK : • **Démodulation cohérente**



## • BER



Si le **filtre passe bande** est **adapté** (aux impulsions du signal ASK) :

$$P_{eb} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_d}{4N_0}} \right)$$

*Vu à la télé*

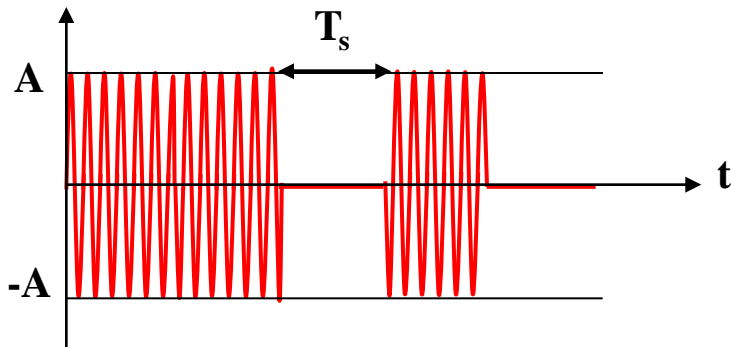
Même résultat  
qu'en bande de base

Équiprobabilité 0 & 1 ; Seuil optimal

Où  $E_d$  est l'é du *signal différence* entre les symboles  $E_d = \int |S_1(t) - S_0(t)|^2 dt$



$$P_{eb} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_d}{4N_0}} \right) \quad E_d = S_1(t) - S_0(t) \quad \varepsilon \text{ du signal différence entre les symboles}$$



$$E_d = \int_0^{T_s} [A \cos \omega_0 t - 0]^2 dt = \int_0^{T_s} A^2 \cos^2(\omega_0 t) dt$$

Or, l' $\varepsilon$  **moyenne** par bit est  $E_b = \frac{1}{2} E_d$  \*

$$\Rightarrow P_{eb} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$$

$$* \quad E_b = \frac{1}{2} \int_0^{T_s} S_1^2(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{T_s} S_0^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{T_s} S_1^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{T_s} A^2 \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} E_d$$

$$p_1 = p_0 = 1/2$$

Sachant que 
$$E_d = \int_0^{T_s} [A \cos \omega_0 t - 0]^2 dt = \frac{A^2 T_s}{2} \Rightarrow P_{eb} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{A^2 T_s}{8 N_0}} \right)$$

$$E_d = \int_0^{T_s} A^2 \cos^2(\omega_0 t) dt = A^2 \int_0^{T_s} \frac{\cos(2\omega_0 t) + 1}{2} dt = A^2 \int_0^{T_s} \frac{\cos(2\omega_0 t) + 1}{4\omega_0} d(2\omega_0 t)$$

$$E_d = \frac{A^2}{4\omega_0} [\sin(2\omega_0 t) + 2\omega_0 t]_{t=0}^{t=T_s} = \frac{A^2 T_s}{2}$$

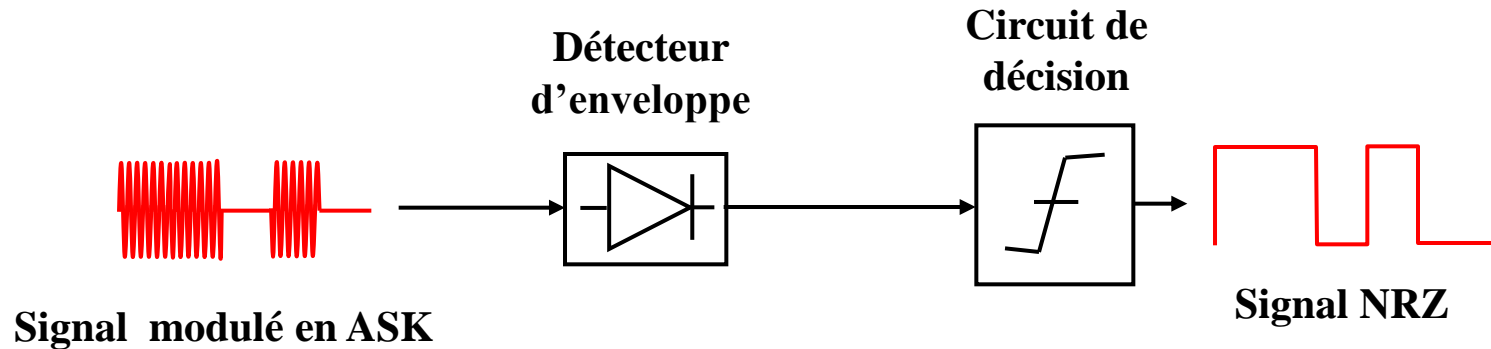
**Rque** : dans le cas particulier traité pour l'étude en bande de base on trouvait  $P_{eb} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$  car on avait alors  $a_1=+1$  et  $a_0=-1$ .

En modulation ASK on a  $a_1=1$  et  $a_0=0$ .

Ceci explique le facteur 2 au dénominateur...  $P_{eb} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{2 N_0}} \right)$

*En effet ; en moyenne dans ce cas l'énergie du signal est deux fois moindre...*

## Démodulateurs ASK : • Démodulation par détection d'enveloppe

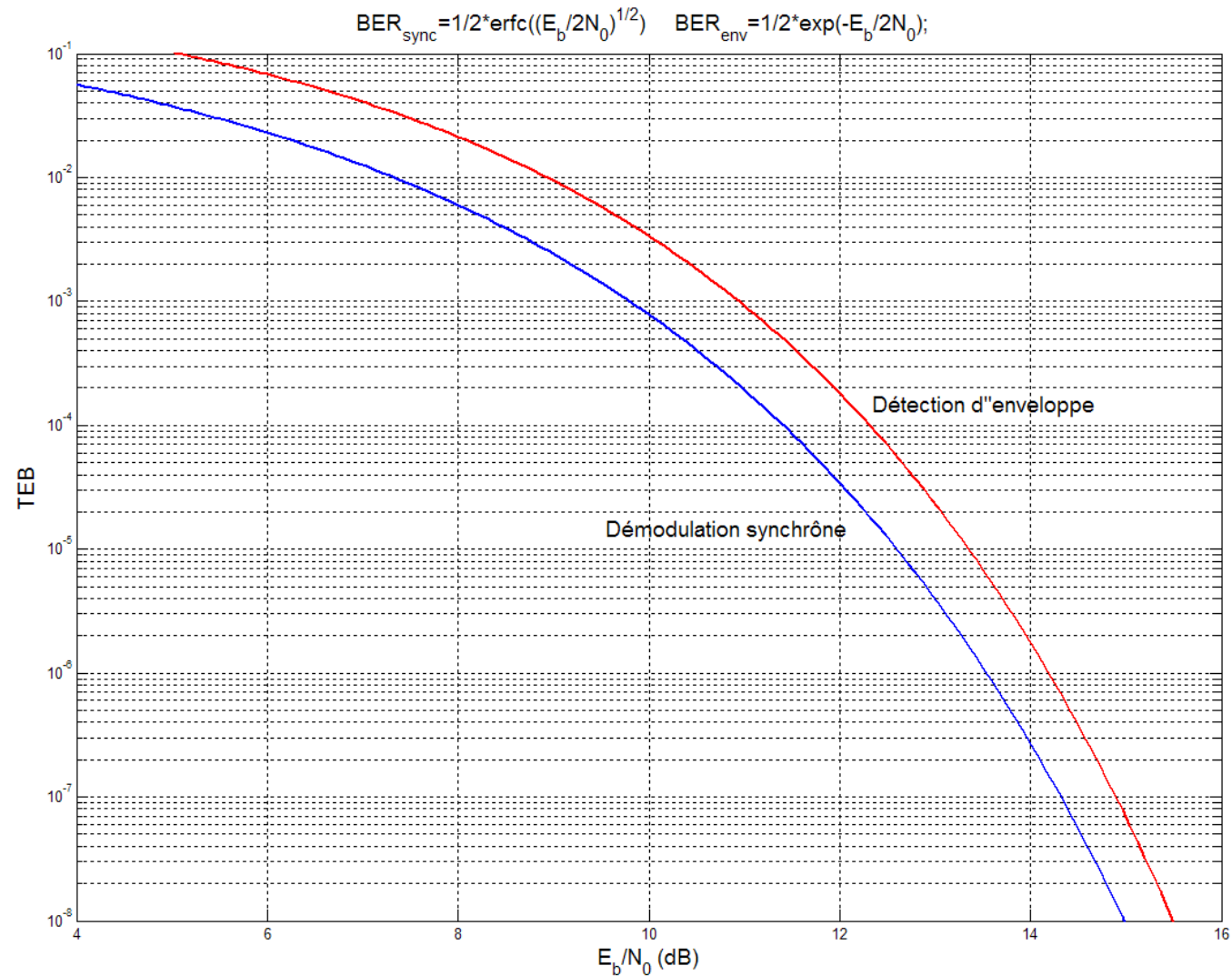


### • BER

“On” montre que

$$P_{eb} = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{2N_0}}$$

La démodulation par détection d'enveloppe requière un circuit plus simple que la démodulation cohérente. Cependant le BER est plus élevé.



## Avantages et inconvénients de l'ASK :

Avantage : Simplicité de circuits (comparée aux autres modulations numériques) et donc faible coût.

Inconvénients: Moins performante que les autres modulations numériques en termes d'efficacité spectrale (bit/s/Hz) et de TEB pour un même S/N.

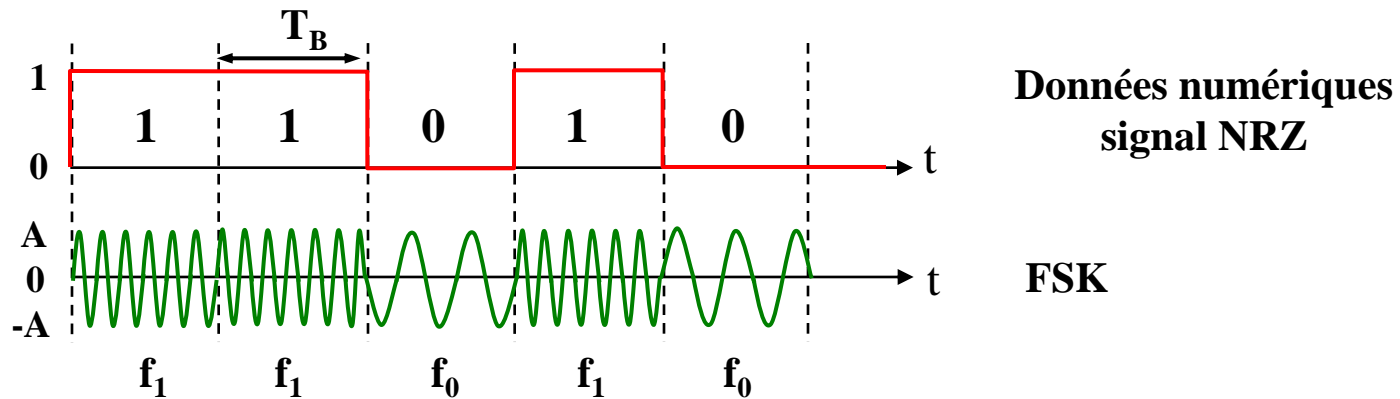
En raison de son **faible coût**, la modulation ASK est utilisée dans les **systèmes de transmission grand public courtes distances**. Deux bandes de fréquences porteuses à 224 MHz et 433 MHz sont normalisées pour ce type d'applications.

Rq: L'ASK est utilisée en **télécommunications par fibre optique** car les détecteurs optiques ne sont sensibles qu'aux variations d'intensité du signal (insensibles à la fréquence et à la phase). Dans ces systèmes les fréquences porteuses sont de l'ordre de 193 THz (fréquences optiques infrarouges) et les débits peuvent atteindre 40 Gbit/s...

## Modulation FSK FSK : Frequency Shift Keying

Aussi appelée modulation par déplacement de fréquence (MDF).

à un « 0 » on associe une fréquence  $f_0 = f_p - \Delta f$  et à un « 1 » on associe la fréquence  $f_1 = f_p + \Delta f$

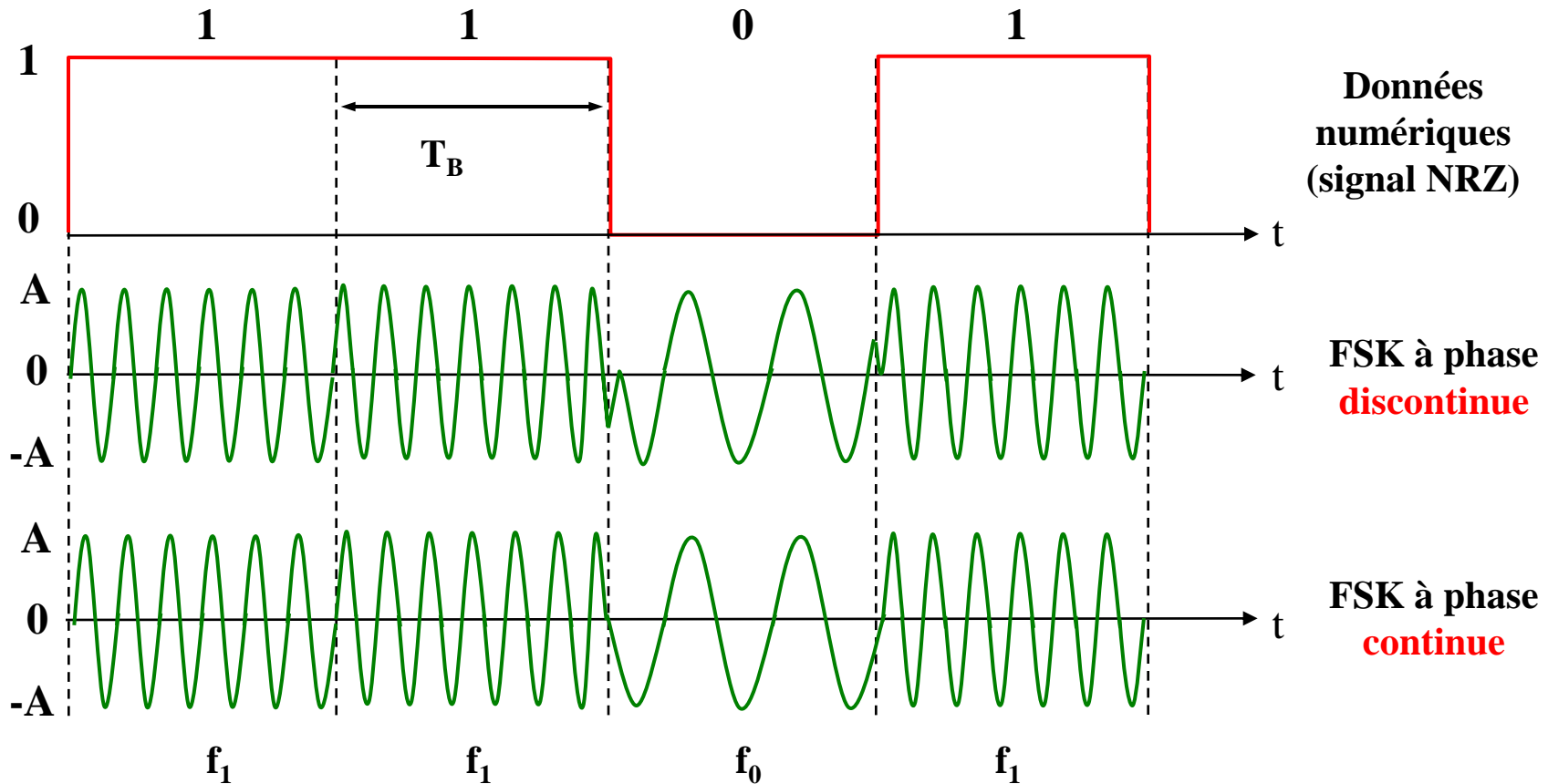


Une modulation FSK est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_p & \text{fréquence centrale du spectre FSK} \quad f_p = \frac{f_1 + f_0}{2} \\ \Delta f & \text{excursion en fréquence} \quad \Delta f = \frac{|f_1 - f_0|}{2} \\ f_B & \text{débit binaire} \quad f_B = \frac{1}{T_B} \end{array} \right.$$

On distingue deux types de FSK :

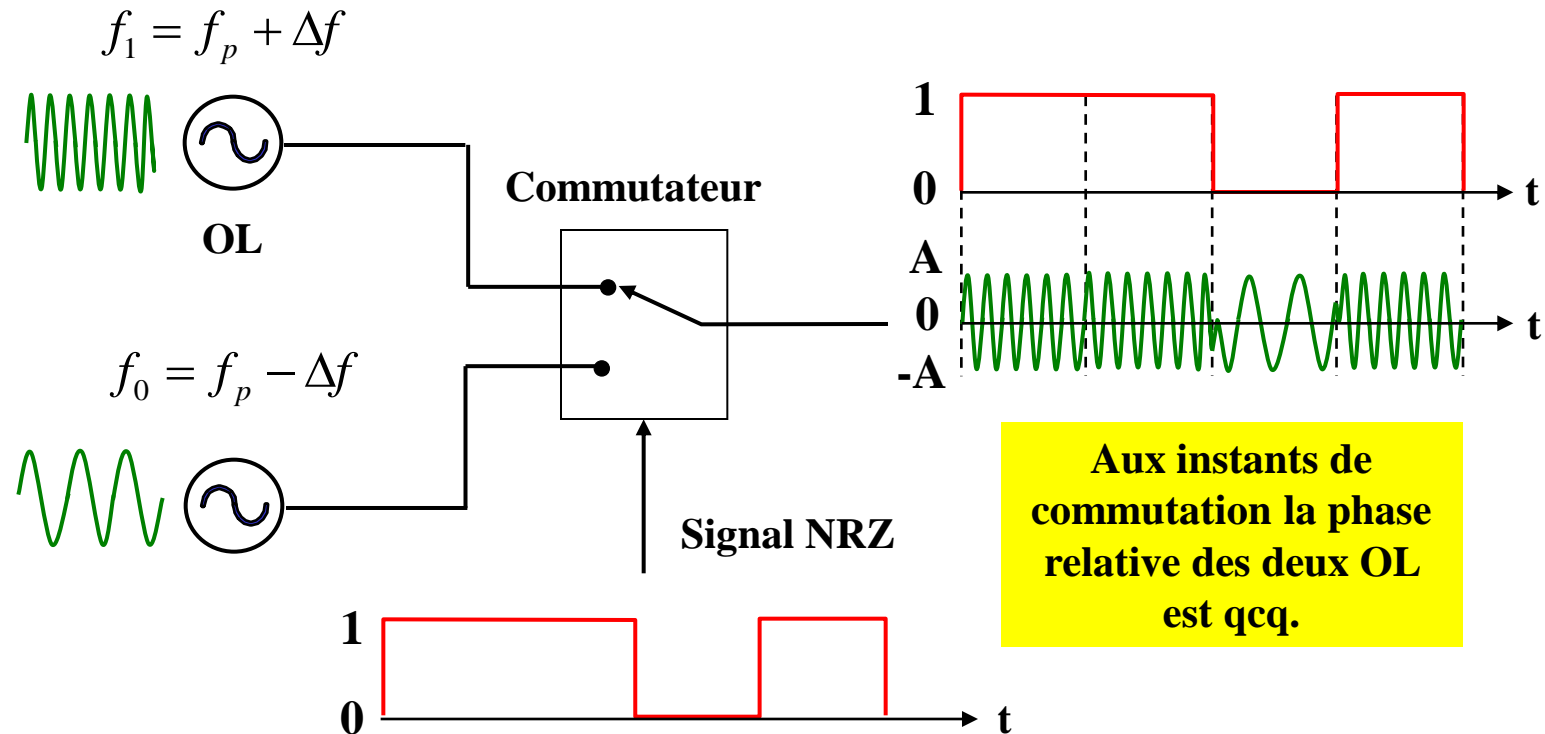
- FSK à phase discontinue
- FSK à phase continue



La FSK à phase discontinue présente un spectre plus large que celui d'une FSK à phase continue

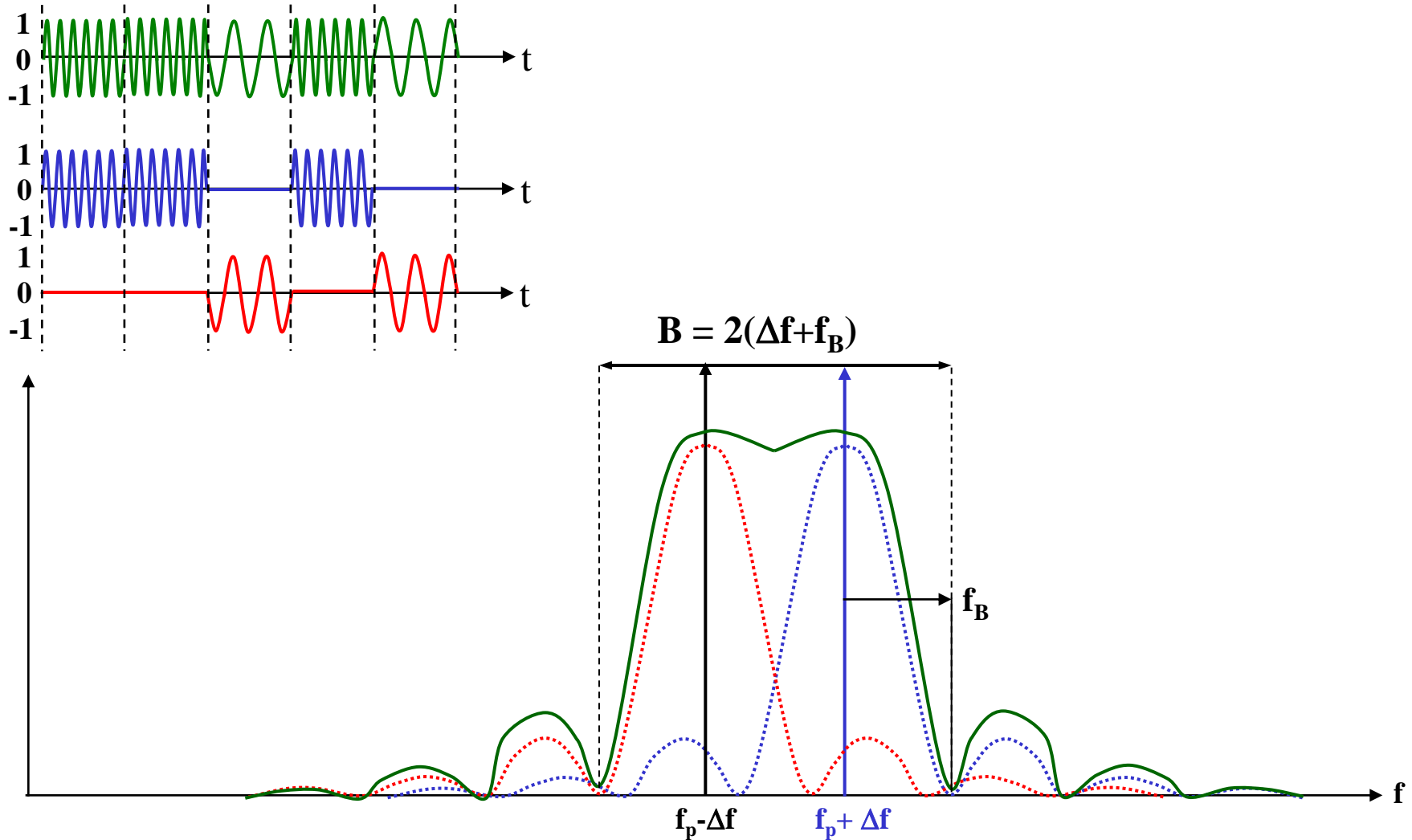
- FSK à phase discontinue

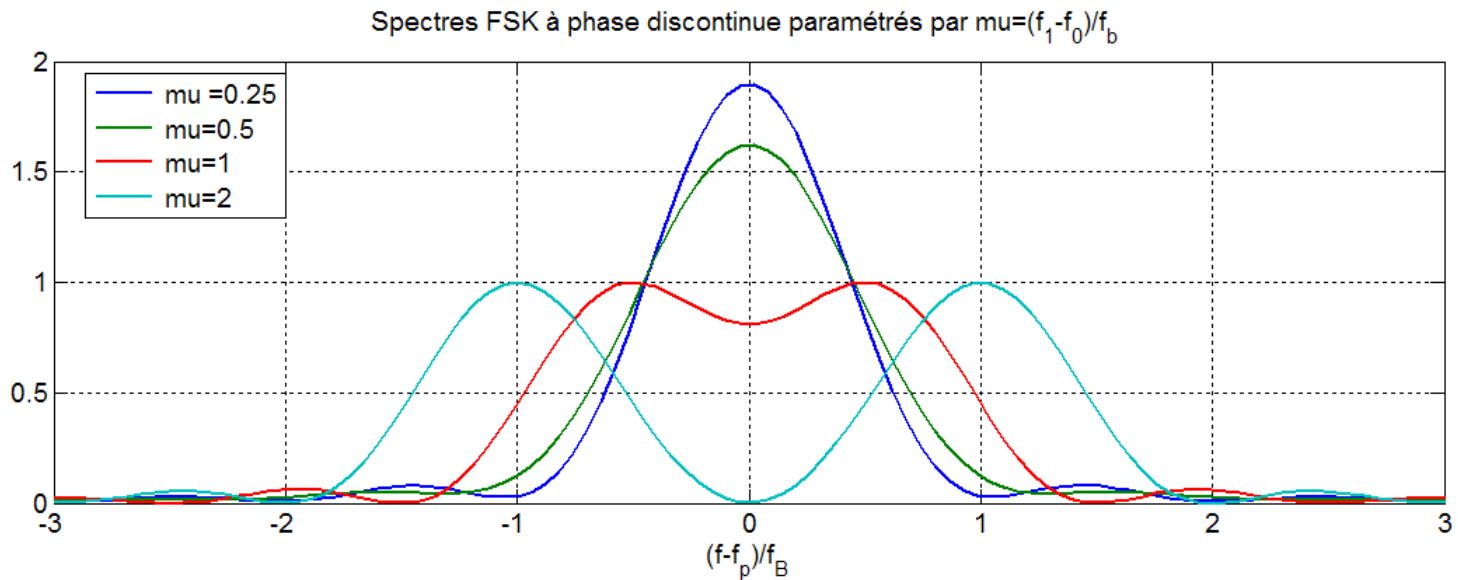
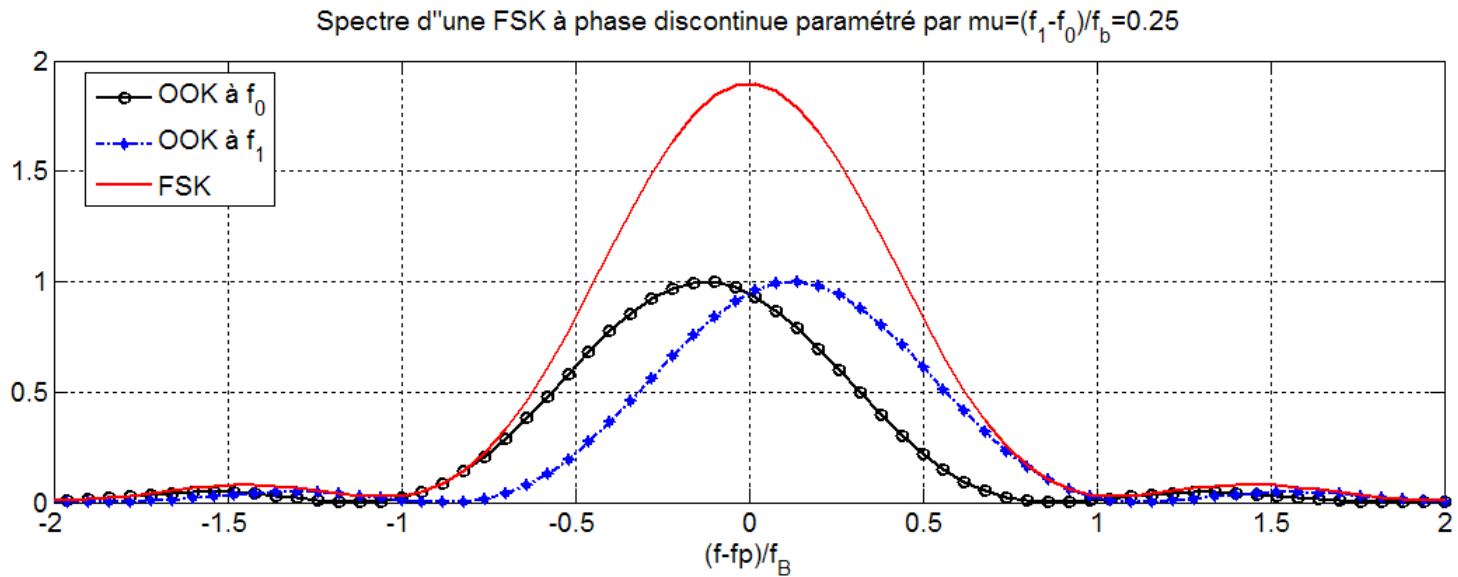
Modulateurs FSK (phase discontinue) :





- DSP d'un signal FSK à phase discontinue  $\Leftrightarrow$  superposition de deux ASK

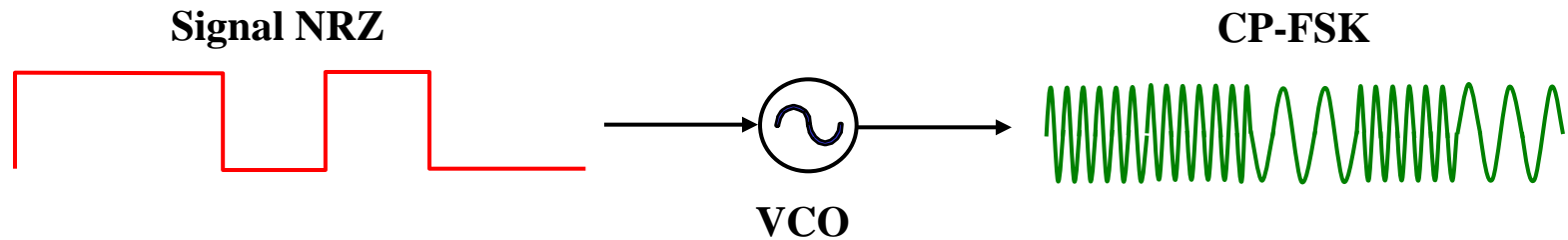




En pratique la FSK est peu utilisée, on lui préfère la CP-FSK  
(Continuous Phase Frequency Shift Keying)

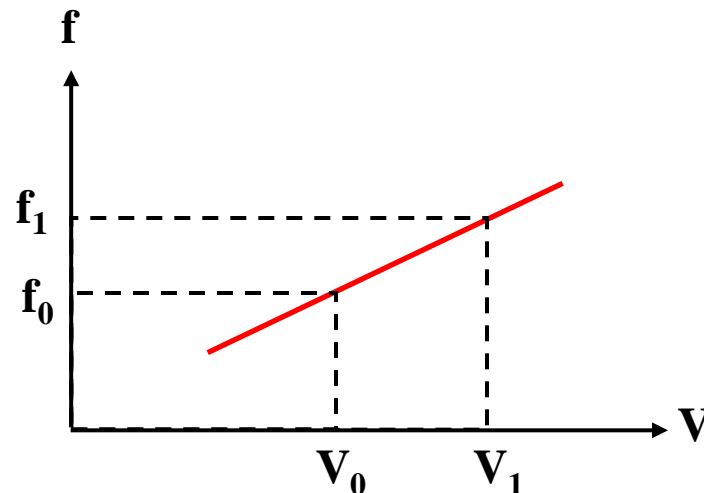
- FSK à phase continue ou CP-FSK

## Modulateurs FSK (phase continue) :

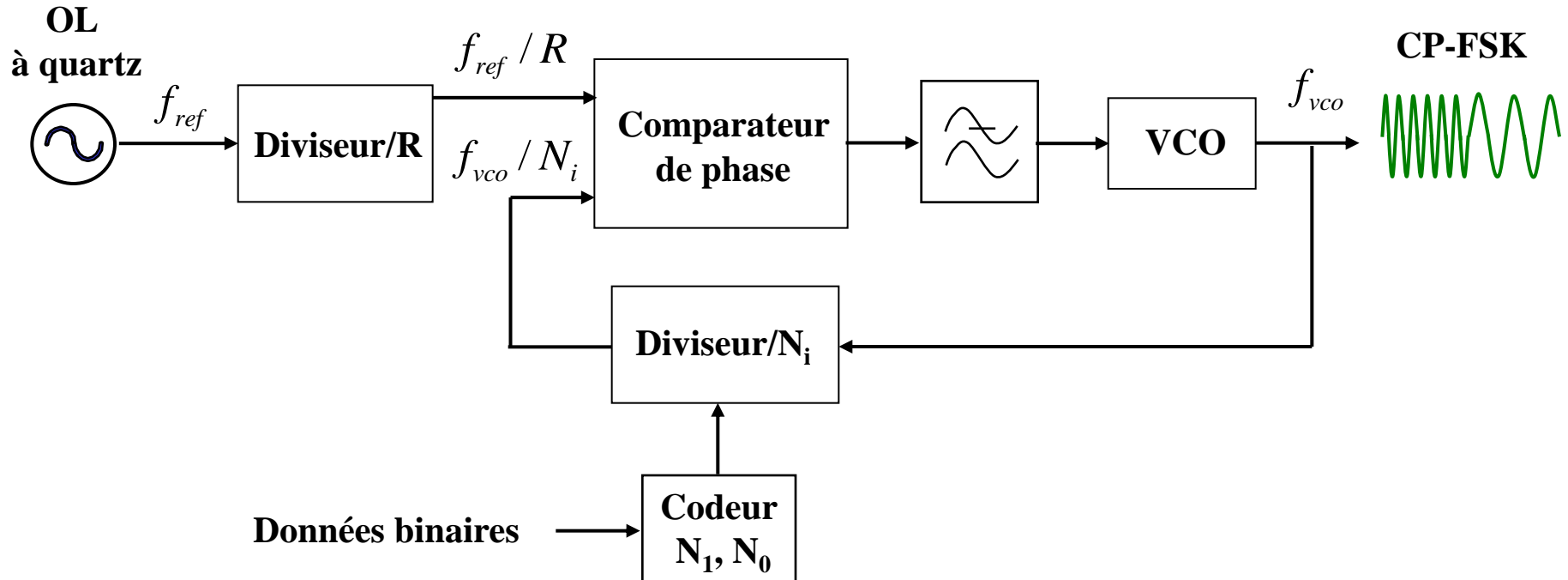


$f_1$  et  $f_0$  sont issues d'un même VCO piloté par le signal NRZ des données.

Ceci garantit la continuité de phase aux sauts en fréquence.



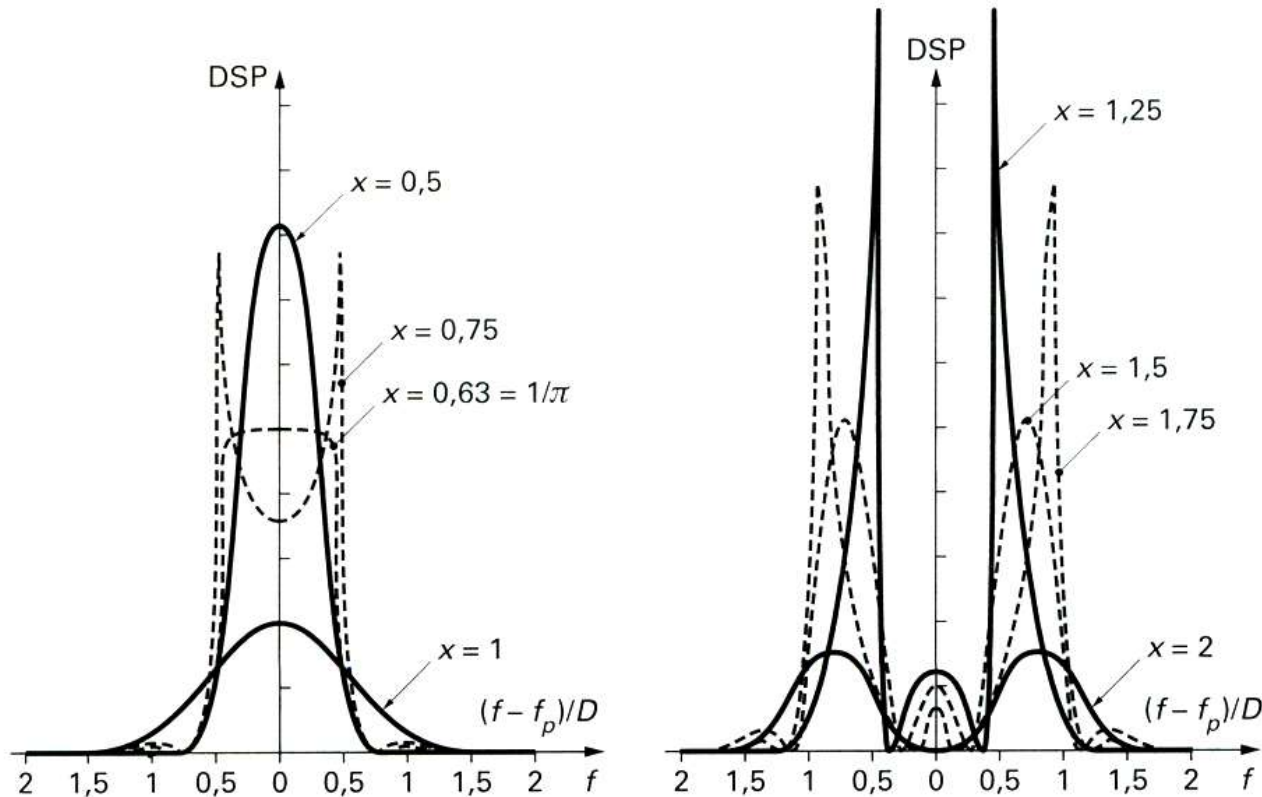
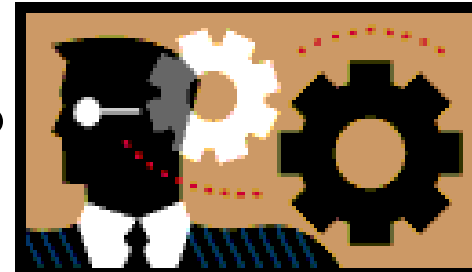
## Modulateur FSK à PLL (phase continue) :



PLL verrouillée  $\Rightarrow \frac{f_{ref}}{R} = \frac{f_{vco}}{N_i} \Rightarrow f_{vco} = \frac{N_i}{R} f_{ref}$

- DSP d'un signal CP-FSK

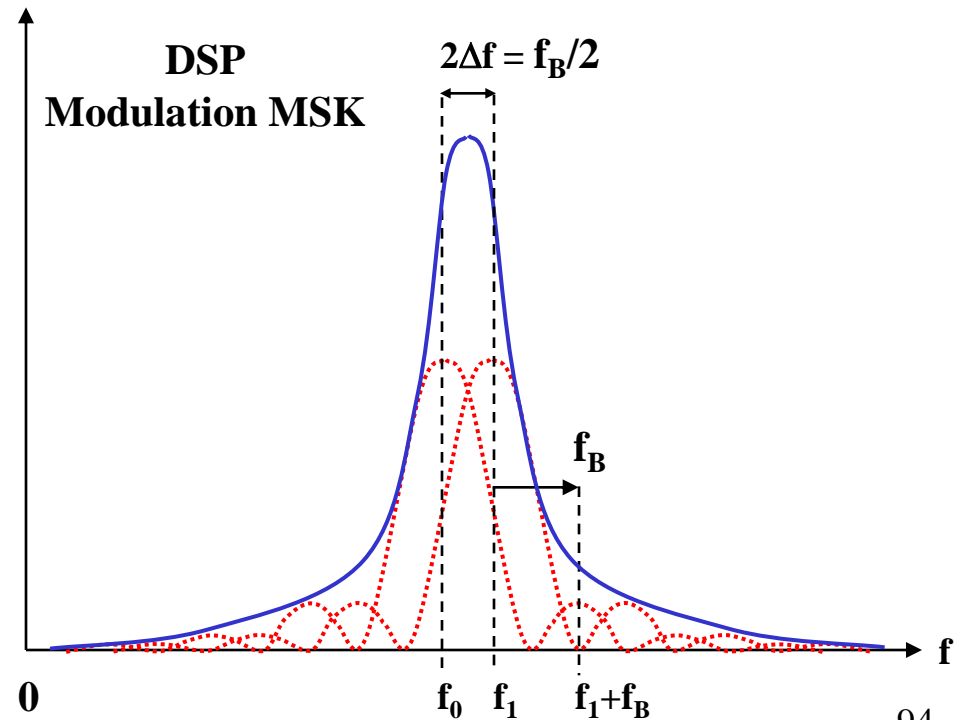
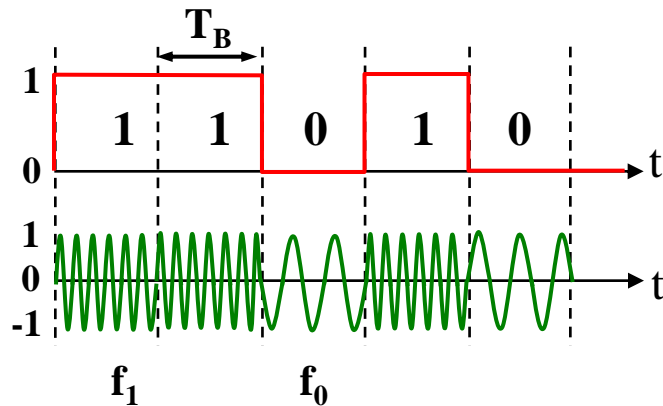
Le calcul est, comment dire ? 



- MSK (Minimum Shift Keying)

La modulation **MSK** est le cas particulier de **FSK** où l'intervalle entre  $f_1$  et  $f_0$  est minimum (en deçà la détection n'est plus possible).

$$(f_1 - f_0)/f_B = 0,5 \quad \text{où } f_B = 1/T_B$$



Une MSK peut être vue comme une modulation de phase.

Codage d'un 0  $A \cos(2\pi f_0 t) = A \cos[2\pi(f - \Delta f)t]$   
 $= A \cos[2\pi(f - f_B/4)t] = A \cos[2\pi f t - \Phi_0]$  où  $\Phi_0 = (\pi f_B/2)t$  avec  $t \in [0, T_B]$

Codage d'un 1  $A \cos(2\pi f_1 t) = A \cos[2\pi(f + \Delta f)t]$   
 $= A \cos[2\pi(f + f_B/4)t] = A \cos[2\pi f t - \Phi_1]$  où  $\Phi_1 = -(\pi f_B/2)t$  avec  $t \in [0, T_B]$

### • Modulateur MSK

La MSK pouvant être vue comme une modulation de phase, comme toute modulation de ce type, elle peut être réalisée au moyen d'un **modulateur IQ**.

$$s(t) = \cos(\omega_0 t - \Phi_k) \quad \text{Signal modulé en phase}$$

Or  $s(t) = \cos(\Phi_k) \cos(\omega_0 t) + \sin(\Phi_k) \sin(\omega_0 t)$

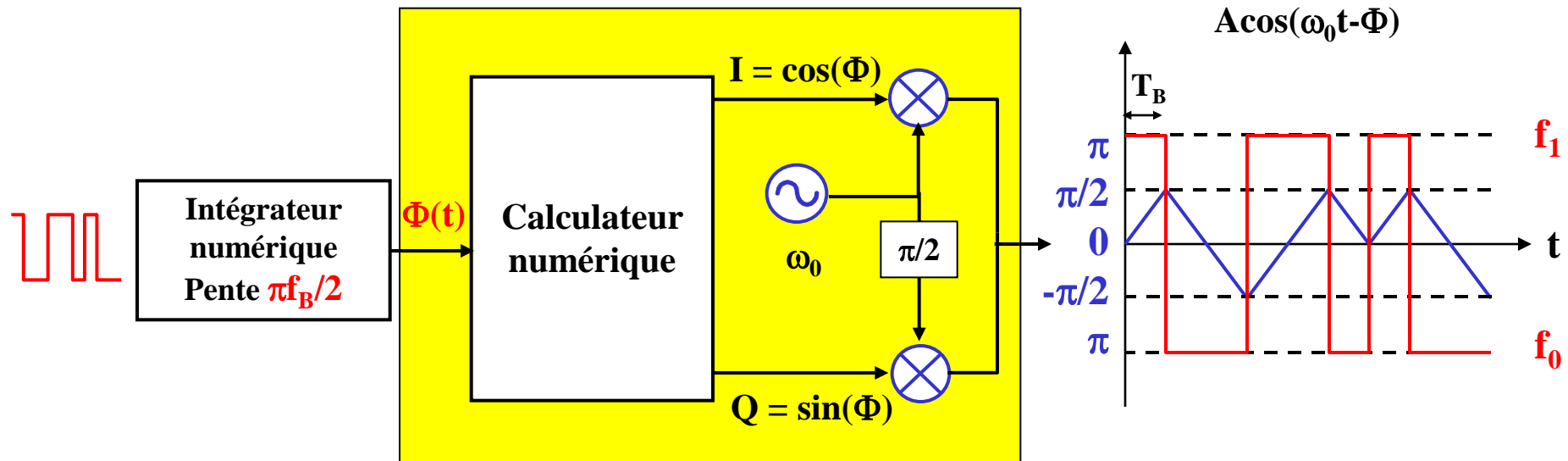
$$s(t) = \underline{I} \cos(\omega_0 t) + \underline{Q} \sin(\omega_0 t)$$

In phase      In Quadrature

Codage d'un 0  $A\cos(2\pi f_0 t) = A\cos[2\pi(f - \Delta f)t]$   
 $= A\cos[2\pi(f - f_B/4)t] = A\cos[2\pi f t - \Phi_0]$  où  $\Phi_0 = (\pi f_B/2)t$  avec  $t \in [0 T_B]$

Codage d'un 1  $A\cos(2\pi f_1 t) = A\cos[2\pi(f + \Delta f)t]$   
 $= A\cos[2\pi(f + f_B/4)t] = A\cos[2\pi f t - \Phi_1]$  où  $\Phi_1 = -(\pi f_B/2)t$  avec  $t \in [0 T_B]$

## Modulateur IQ





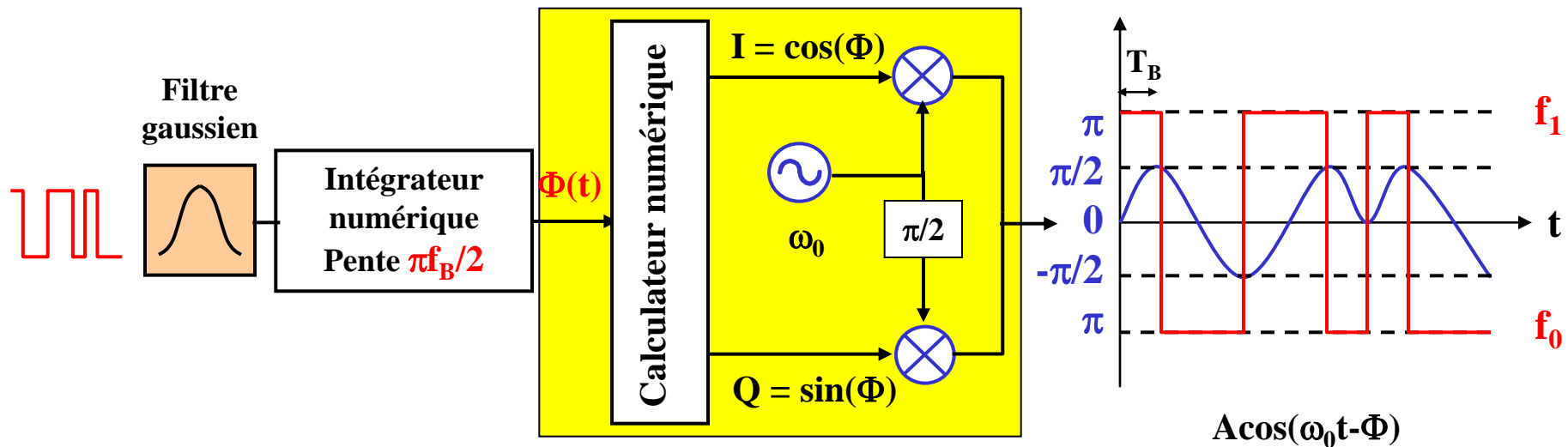
## • GMSK (Gaussian Minimum Shift Keying)

Pour le **GSM** (téléphone mobile 2G) le format de modulation numérique utilisé est le GMSK (Gaussian Minimum Shift Keying)

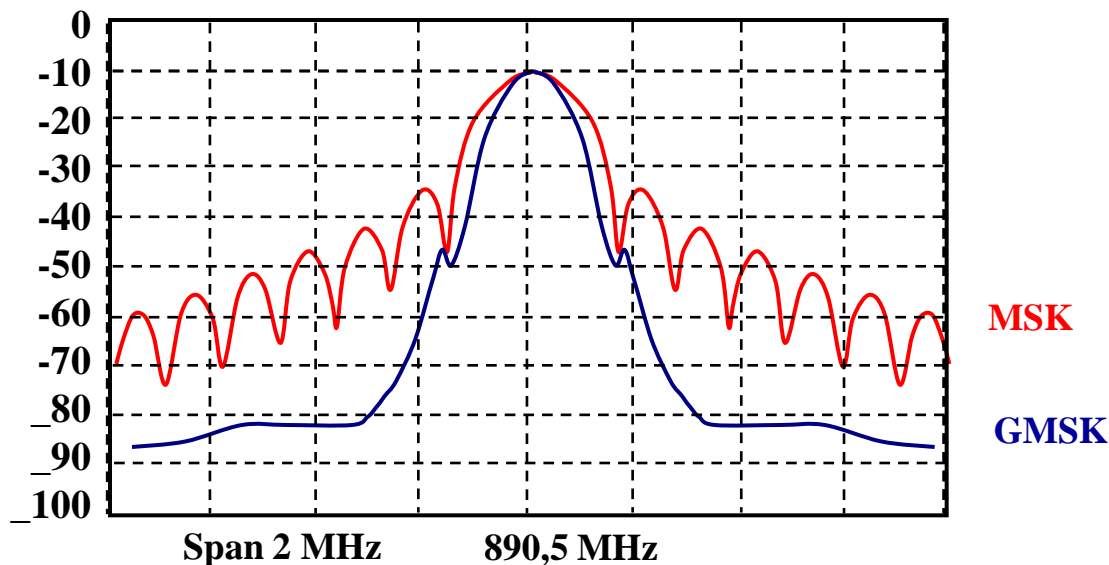
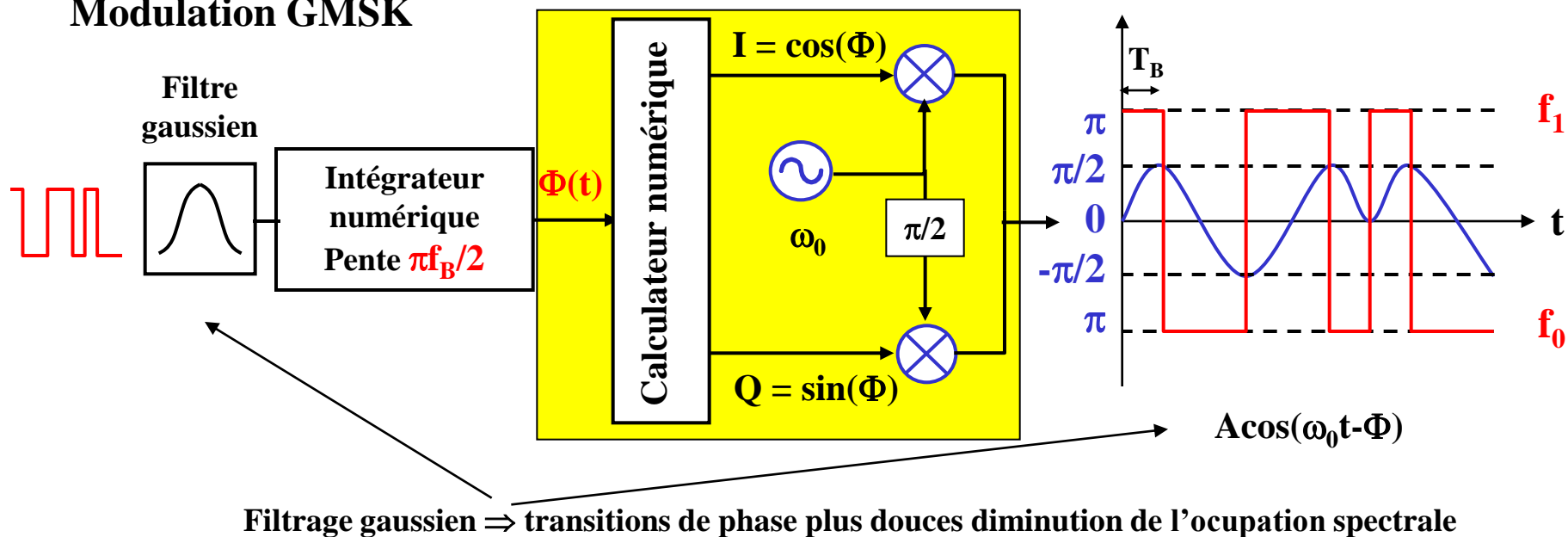
Il s'agit d'une MSK précédée d'un filtrage gaussien des données destiné à diminuer la bande passante du signal modulé en atténuant les lobes secondaires du spectre

Du point de vue de la phase du signal modulé, le filtrage gaussien des données permet d'adoucir les transitions ...

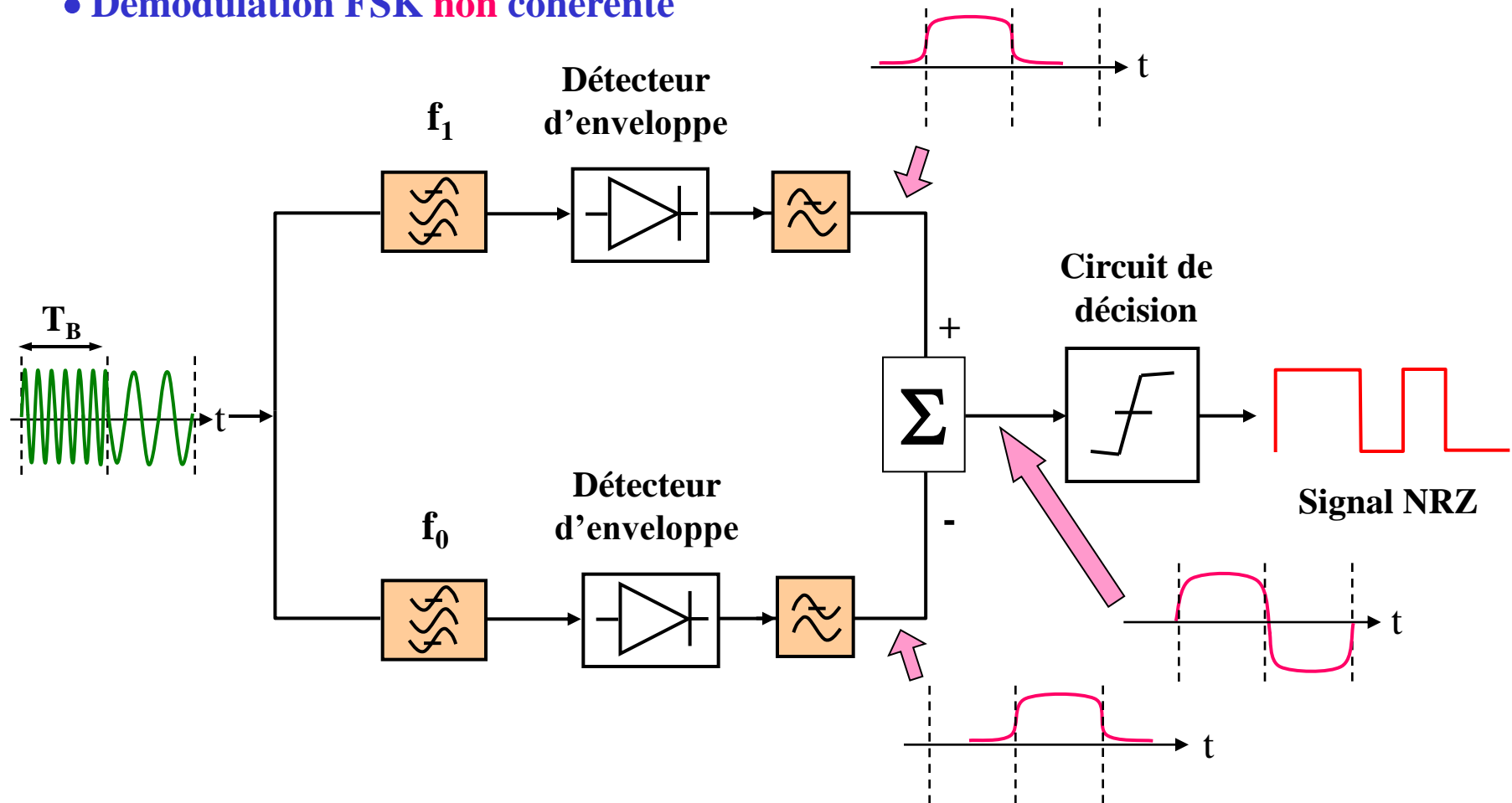
Et nous n'avons rien contre un peu de douceur ♥♥♥ n'est-ce pas ?



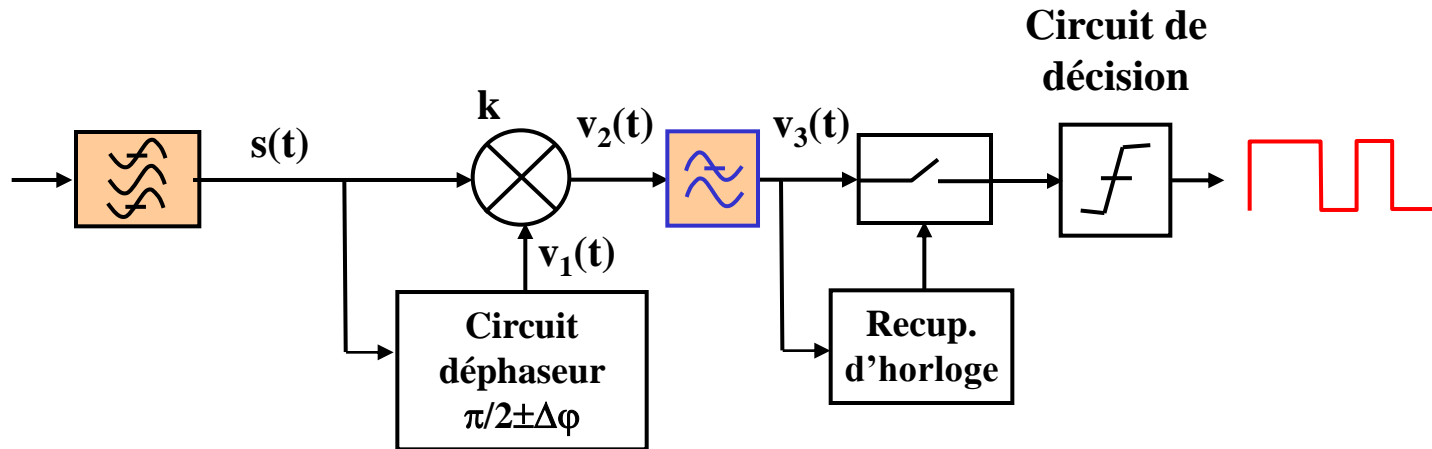
## Modulation GMSK



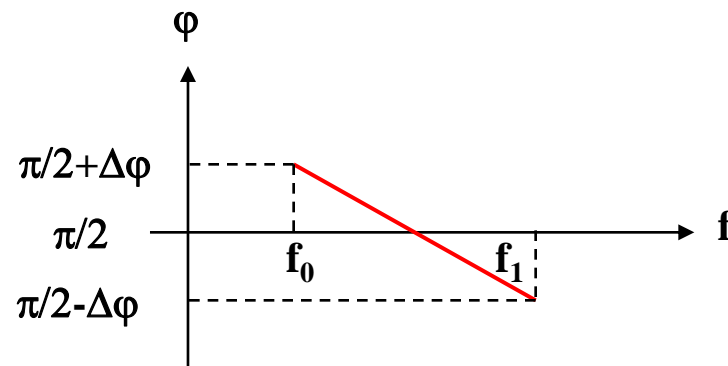
## • Démodulation FSK non cohérente



## • Démodulateur FSK en quadrature



Caractéristique du déphaseur



## Réception d'un 1

$$s(t) = A \cos(2\pi f_1 t) \quad \text{Durant } T_s$$

$$v(t) = A \cos\left(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{2} - \Delta\varphi\right)$$

$$v_2(t) = s(t) * v(t) = k \frac{A^2}{2} \left[ \cos\left(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{2} - \Delta\varphi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Delta\varphi\right) \right]$$

$$v_3(t) = -k \frac{A^2}{2} \sin(\Delta\varphi) \quad \text{Durant } T_s$$

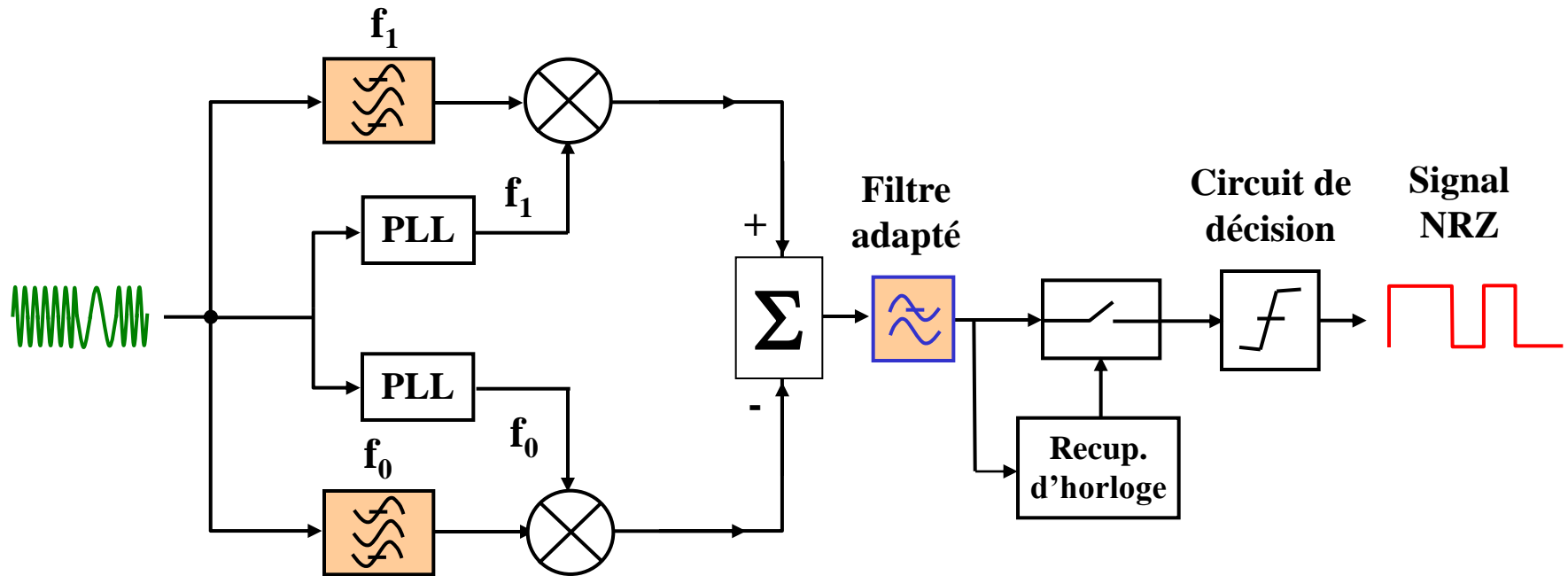
## Réception d'un 0

$$v_3(t) = +k \frac{A^2}{2} \sin(\Delta\varphi)$$

Durant  $T_s$

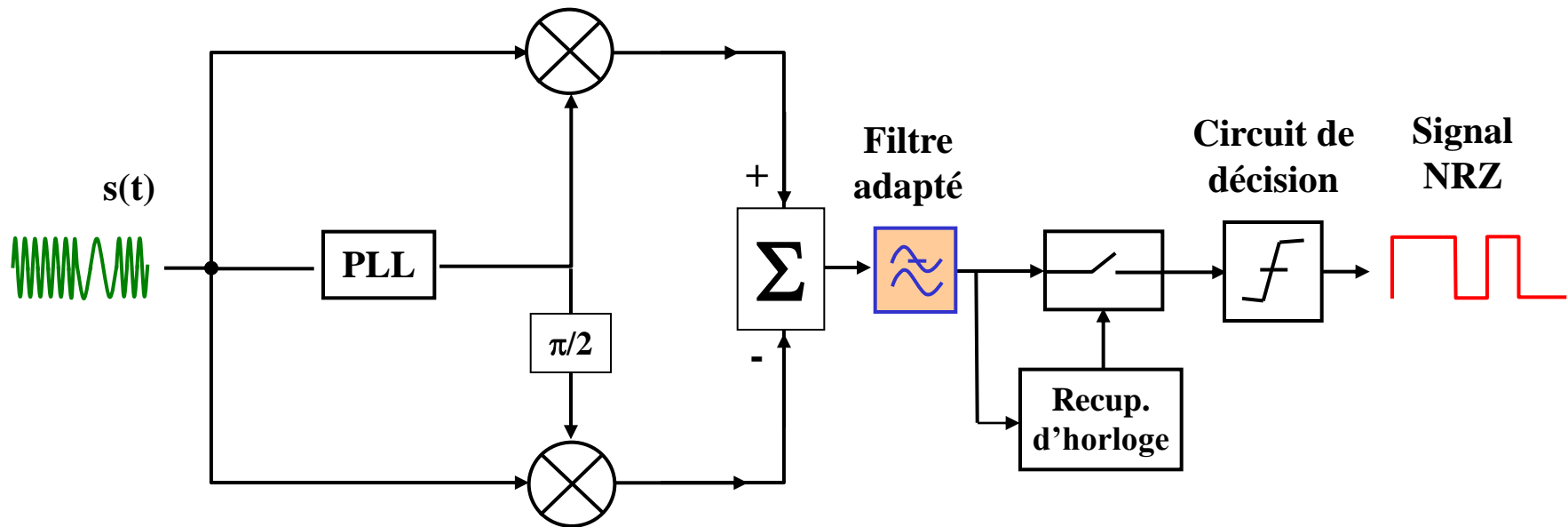
On a deux niveaux...

## • Démodulation FSK cohérente



**Il faut que les OL soient en phase avec les porteuses  $f_1$  et  $f_0$  émises.**

- Démodulation FSK cohérente avec signaux orthogonaux



$$f_p = \frac{f_1 + f_0}{2} \quad \Delta f = \frac{|f_1 - f_0|}{2}$$

Ce démodulateur cohérent est conçu pour fonctionner avec des signaux d'émission  $s_1(t)$  et  $s_0(t)$  orthogonaux

Signaux  $s_1(t)$  et  $s_0(t)$  orthogonaux :  $\int_0^{T_s} s_1(t)s_0(t)dt = 0$

Ceci impose une condition reliant  $f_1$  et  $f_0$  :  $\Rightarrow \int_0^{T_s} A^2 \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_1 t) dt = 0$

$$\Rightarrow \int_0^{T_s} \frac{A^2}{2} [\cos(2\pi(f_1 + f_0)t) + \cos(2\pi(f_1 - f_0)t)] dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{A^2}{4\pi(f_1 + f_0)} \sin(2\pi(f_1 + f_0)T_s) + \frac{A^2}{4\pi(f_1 - f_0)} \sin(2\pi(f_1 - f_0)T_s) = 0$$

~~$$\Rightarrow \frac{A^2}{4\pi(f_1 + f_0)} \sin(4\pi f_p T_s) + \frac{A^2}{4\pi(f_1 - f_0)} \sin(4\pi \Delta f T_s) = 0$$~~

$$f_p \gg \Delta f$$

$$\Rightarrow \frac{A^2}{4\pi(f_1 - f_0)} \sin(4\pi \Delta f T_s) \approx 0$$

Condition  
d'orthogonalité



$$\Rightarrow 4\pi\Delta f T_s = n\pi$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{2\Delta f}{f_s} = n \times 0.5$$

$$\Rightarrow MSK : \mu_{\min} = 0.5$$

**Rque :** L'orthogonalité des signaux permet d'optimiser la décision et le TEB

- **BER**

$$P_{eb} = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{2N_0}}$$

Démodulation FSK non cohérente

$$P_{eb} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$$

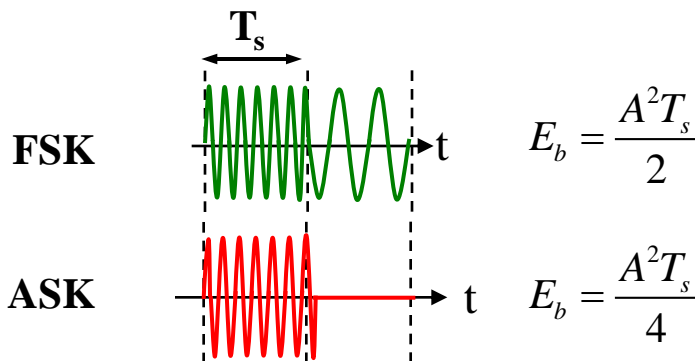
Démodulation FSK cohérente

$$P_{eb} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

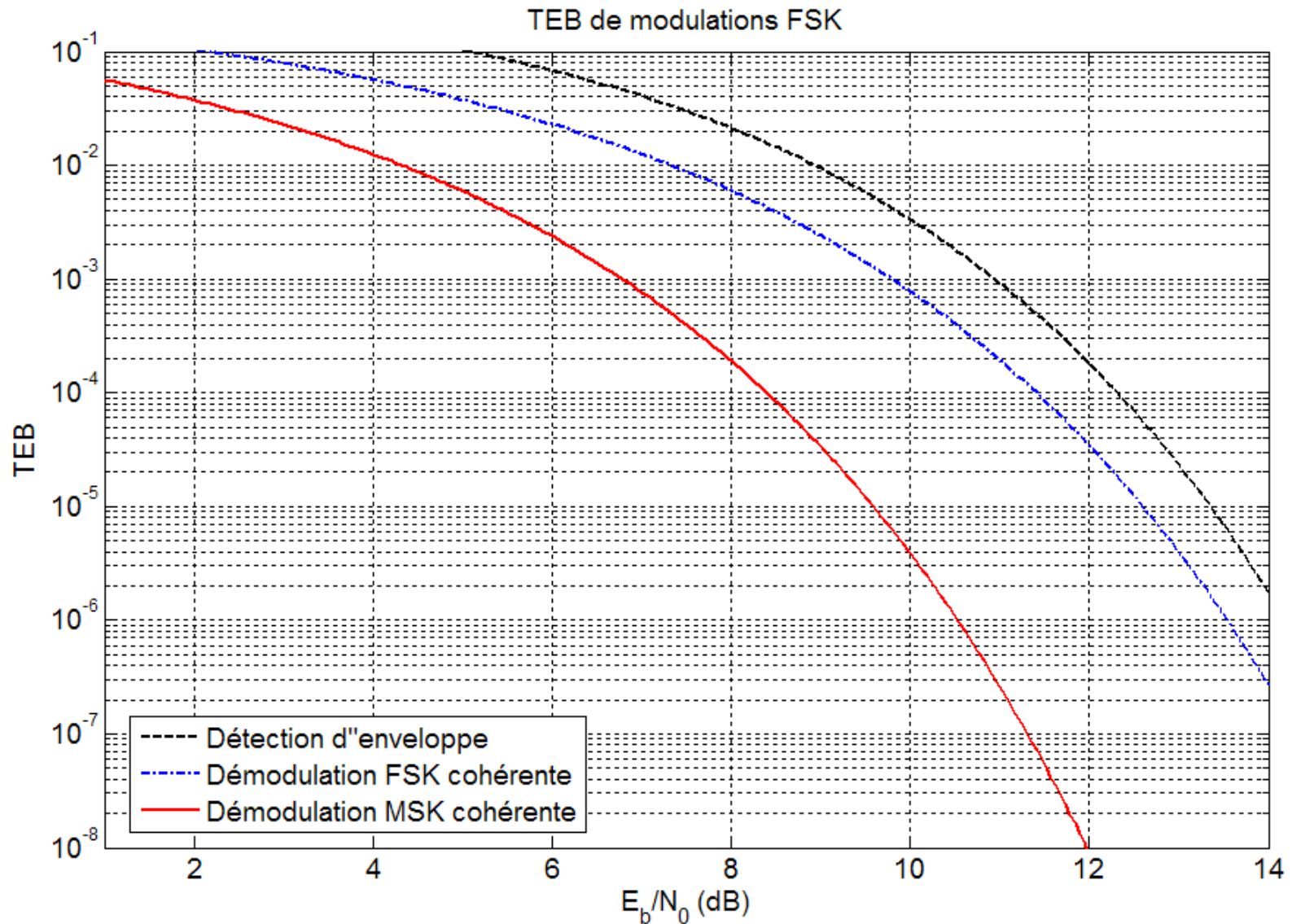
Démodulation **MSK** cohérente avec **signaux orthogonaux**

Où  $E_b$  est l'énergie **moyenne** par bit  $E_b = \frac{A^2 T_s}{2}$   $A$  = amplitude des sinusoides  $f_1$  et  $f_0$

Rque : Pour l'ASK on avait une  $E_b$  deux fois moindre puisqu'un zéro le porte pas d'é.



Pour comparer deux modulations num.  
on suppose une même  $E_b$  (moy)...



## Modulation PSK :

**PSK : Phase Shift Keying** (modulation par saut de phase)

Pour représenter un bit ou un ensemble de bits on code la phase  $\Phi_k$  de la porteuse.  
Avec  $k \in [1, M]$  où  $M = 2^n$  est le nombre d'états de phase possibles.

Une modulation **M-PSK** permet de coder **n bits** :

**2-PSK** ( $2 = 2^1$ ) on code 1 bit

**4-PSK** ( $4 = 2^2$ ) on code 2 bits

**8-PSK** ( $8 = 2^3$ ) on code 3 bits

**2-PSK**  $\Leftrightarrow$  **BPSK** : Binary Phase Shift Keying

**4-PSK**  $\Leftrightarrow$  **QPSK** : Quadrature Phase Shift Keying

Une **PSK** peut être vue comme la superposition de deux **ASK** sur deux porteuses en quadrature.

$$A \cos(\omega t - \Phi_k) = A \cos(\Phi_k) \cos(\omega_0 t) + A \sin(\Phi_k) \cos(\omega_0 t + \pi/2)$$

$$= a_k A \cos(\omega_0 t) + b_k A \cos(\omega_0 t + \pi/2) \quad \text{avec : } a_k = \cos(\Phi_k) \\ b_k = \sin(\Phi_k)$$

- Modulation **MDP-2** (modulation par déplacement de phase à 2 états) ou **2-PSK**

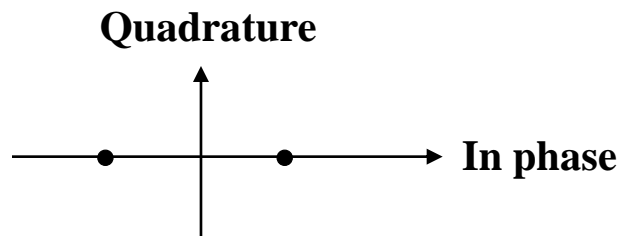
$$s(t) = \sum_k \left[ A \cos(\omega_p t + \Phi_k) h(t - kT) \right]$$

En choisissant  $0 \rightarrow \Phi_k = 0$  ;  $1 \rightarrow \Phi_k = \pi$

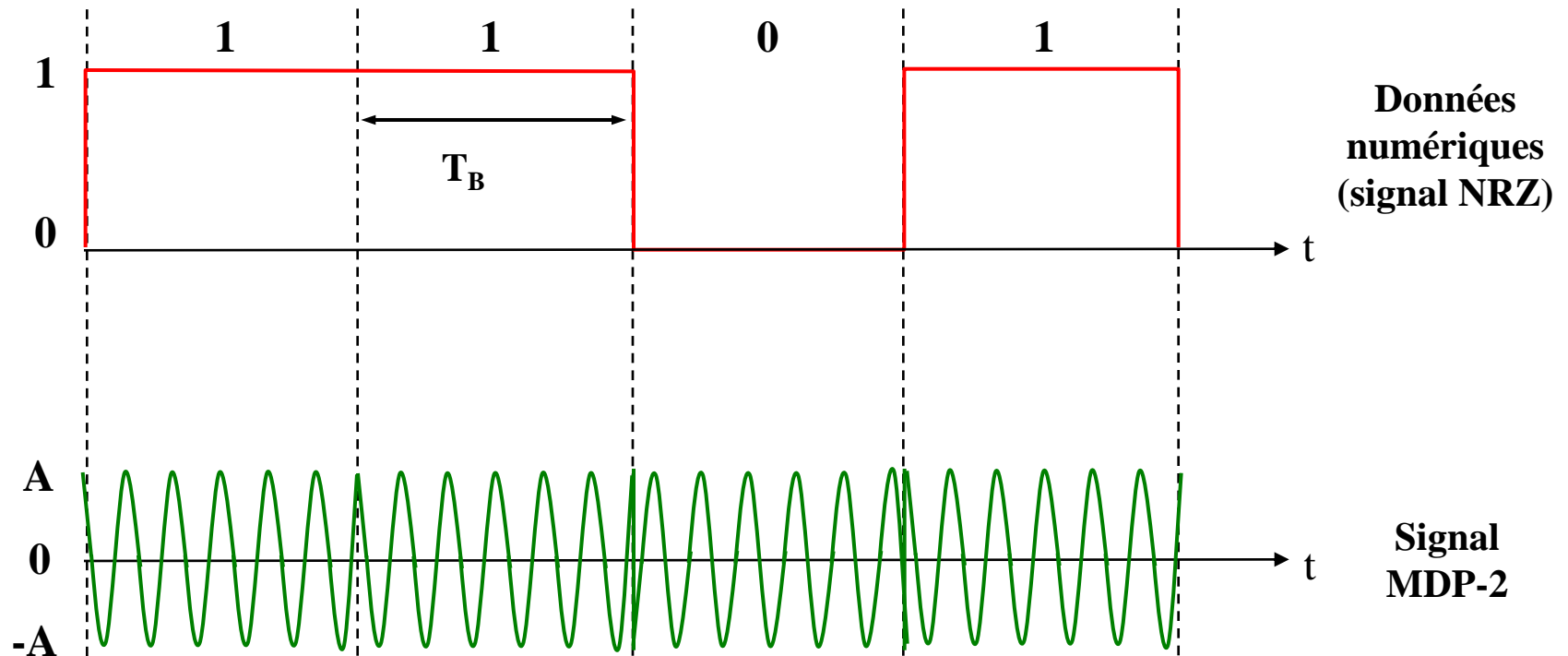
$$\Rightarrow s(t) = \left[ \sum_k \underline{a_k} h(t - kT) \right] A \cos \omega_p t \quad \text{avec} \quad \underline{a_k} \in \{-1; 1\}$$

**MDP-2 : on  $\times$  la porteuse par  $\pm 1$**

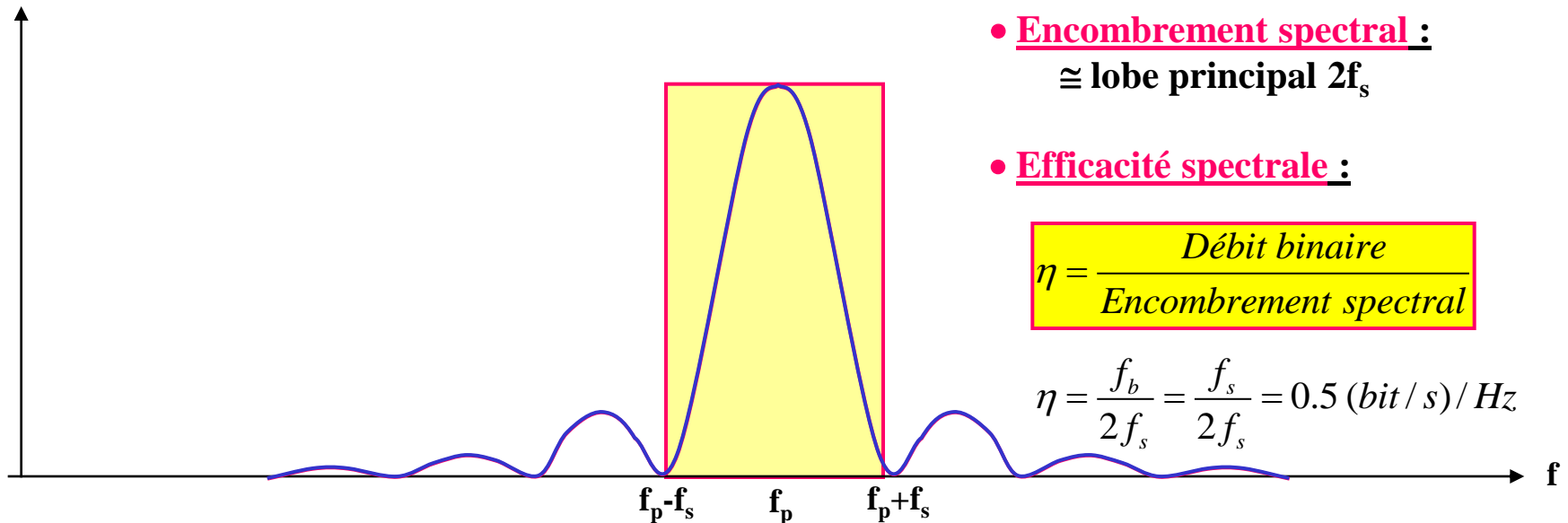
**MDP-2 : constellation**



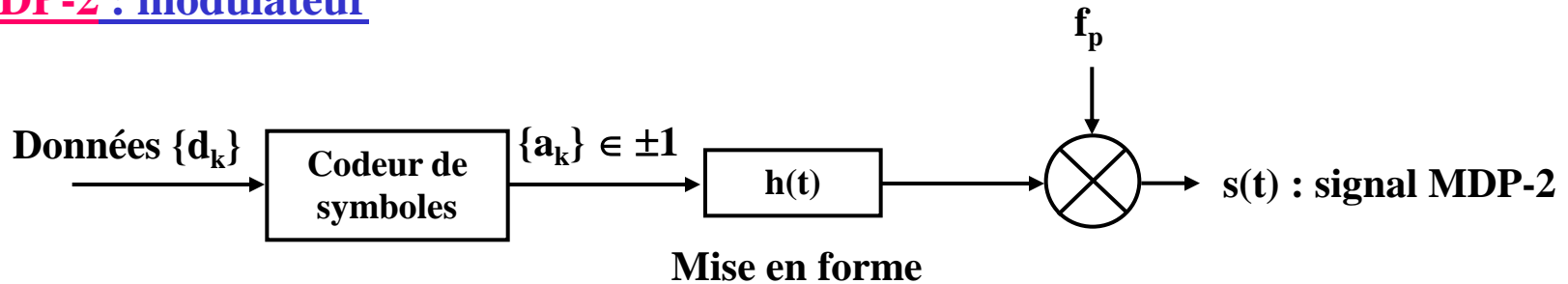
## MDP-2 : signal temporel



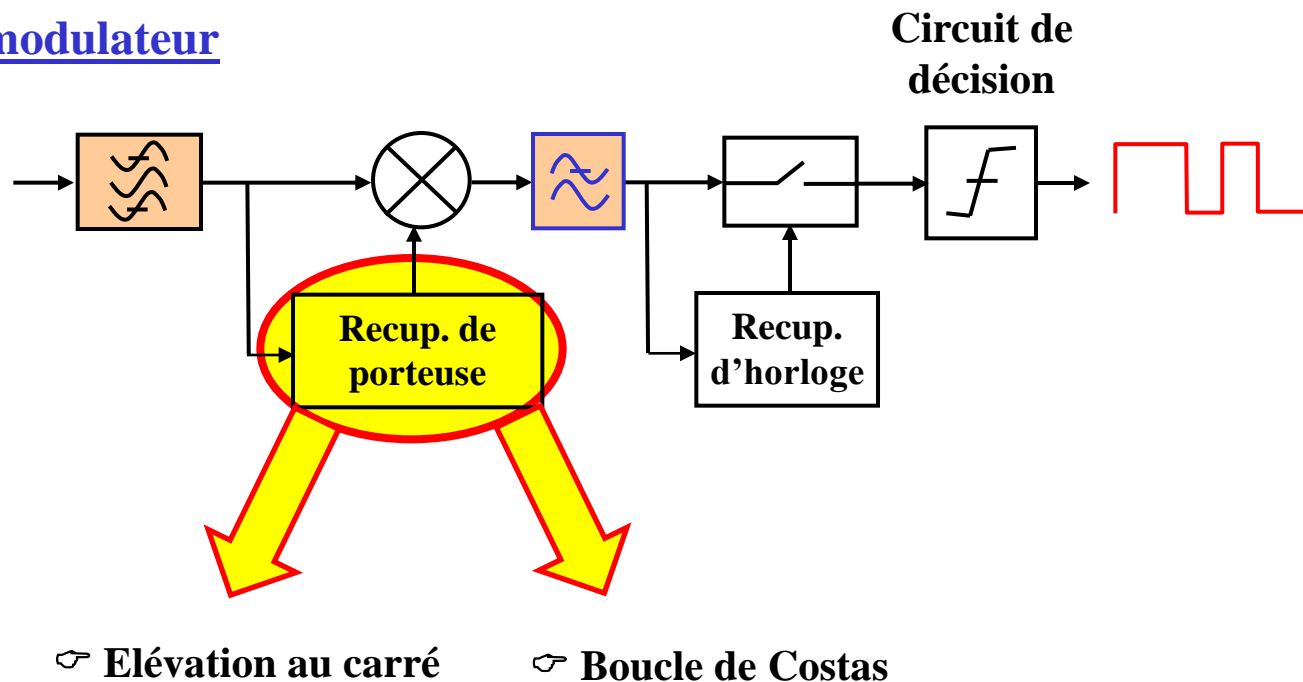
## MDP-2 : spectre



## MDP-2 : modulateur

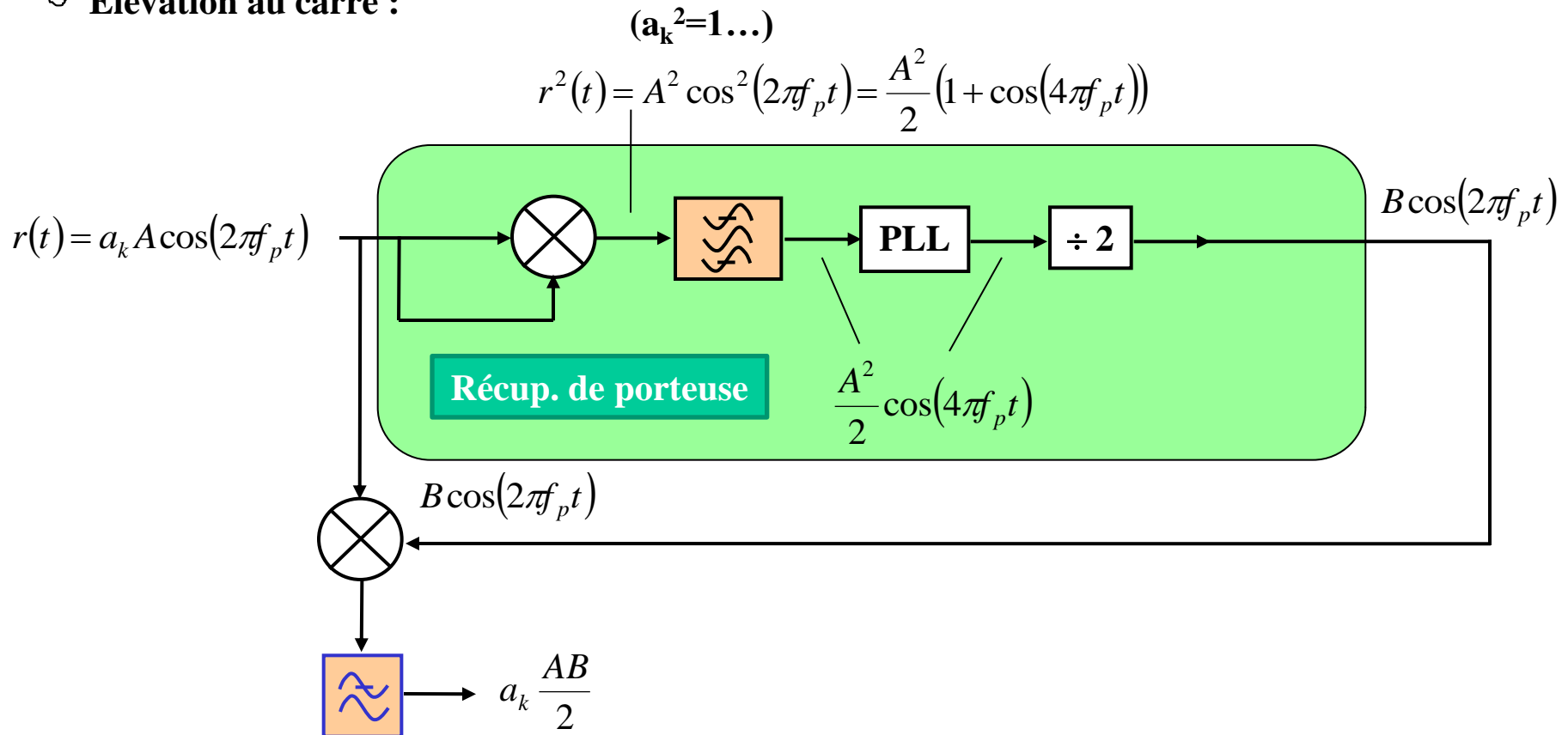


## MDP-2 : démodulateur





☞ Elévation au carré :



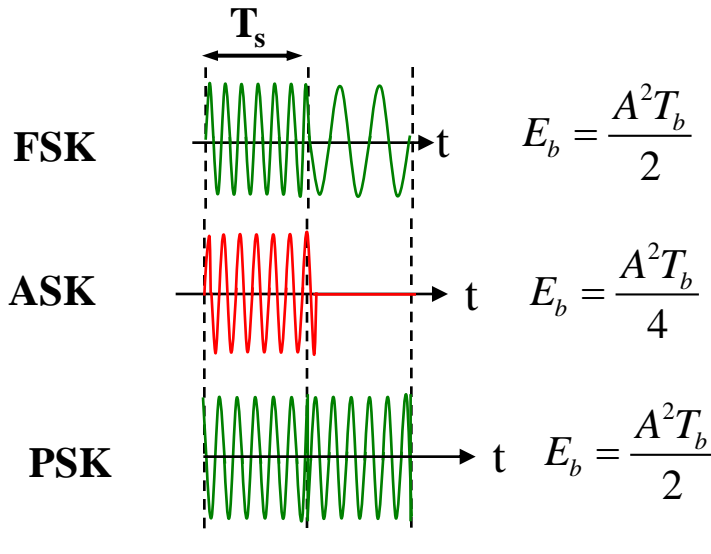
☞ Boucle de Costas : Autre technique permettant de récupérer la porteuse...

## MDP-2 : BER

$$P_{eb} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

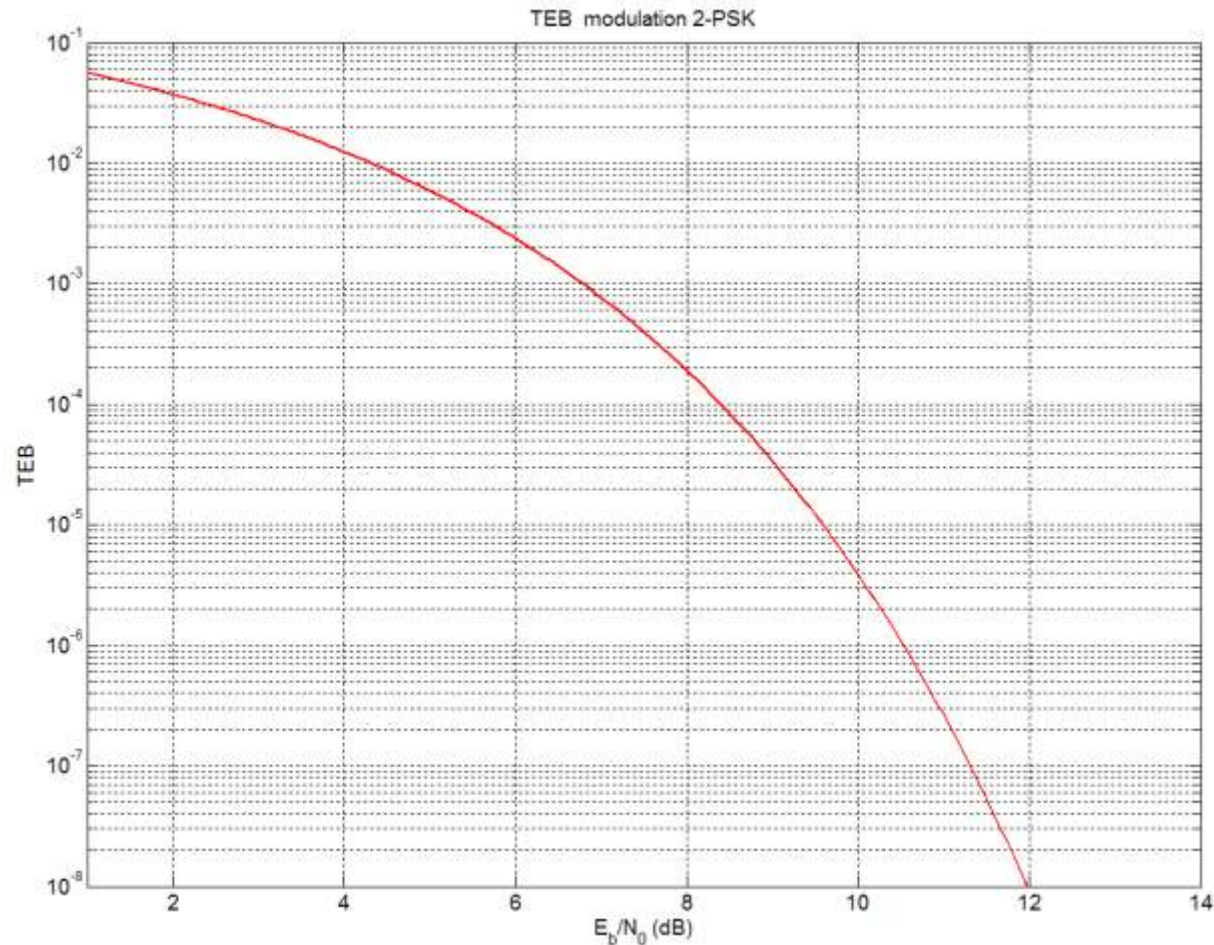
Où  $E_b$  est l'énergie moyenne par bit  $E_b = \frac{A^2 T_b}{2}$   $A$  = amplitude des sinusoïdes  $f_p$

Rq : Pour l'ASK on avait une  $E_b$  deux fois moindre puisqu'un zéro le porte pas d'é.



Pour comparer deux modulations num.  
on suppose une même  $E_b$  (moy)...

## MDP-2 : BER



- **Modulation MDP-4 (modulation par déplacement de phase à 4 états) ou QPSK**

$$s(t) = \sum_k \left[ A \cos(\omega_p t + \Phi_k) h(t - kT_s) \right] \quad \Phi_k \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$$

Soit, en décomposant le signal selon les voies I et Q :

$$s(t) = \left[ \sum_k h(t - kT_s) \cos \Phi_k \right] A \cos(\omega_p t) - \left[ \sum_k h(t - kT_s) \sin \Phi_k \right] A \sin(\omega_p t)$$

En posant  $a_k = \cos \Phi_k$  et  $b_k = \sin \Phi_k$

$$s(t) = \left[ \sum_k h(t - kT_s) a_k \right] A \cos(\omega_p t) - \left[ \sum_k h(t - kT_s) b_k \right] A \sin(\omega_p t)$$

La QPSK est la modulation de deux porteuses en quadrature par deux signaux en bande de base  $i(t)$  et  $q(t)$ .

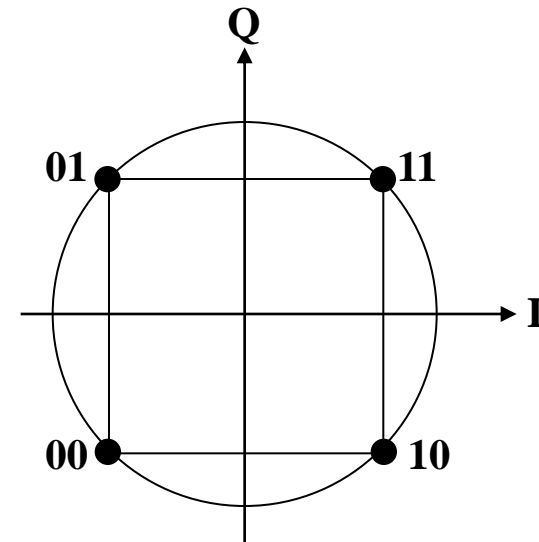
$$i(t) = \sum_k h(t - kT_s) a_k$$

$$q(t) = \sum_k h(t - kT_s) b_k$$

	$a_k$	$b_k$	$\Phi$
11	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
01	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$3\pi/4$
00	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$5\pi/4$
10	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$7\pi/4$

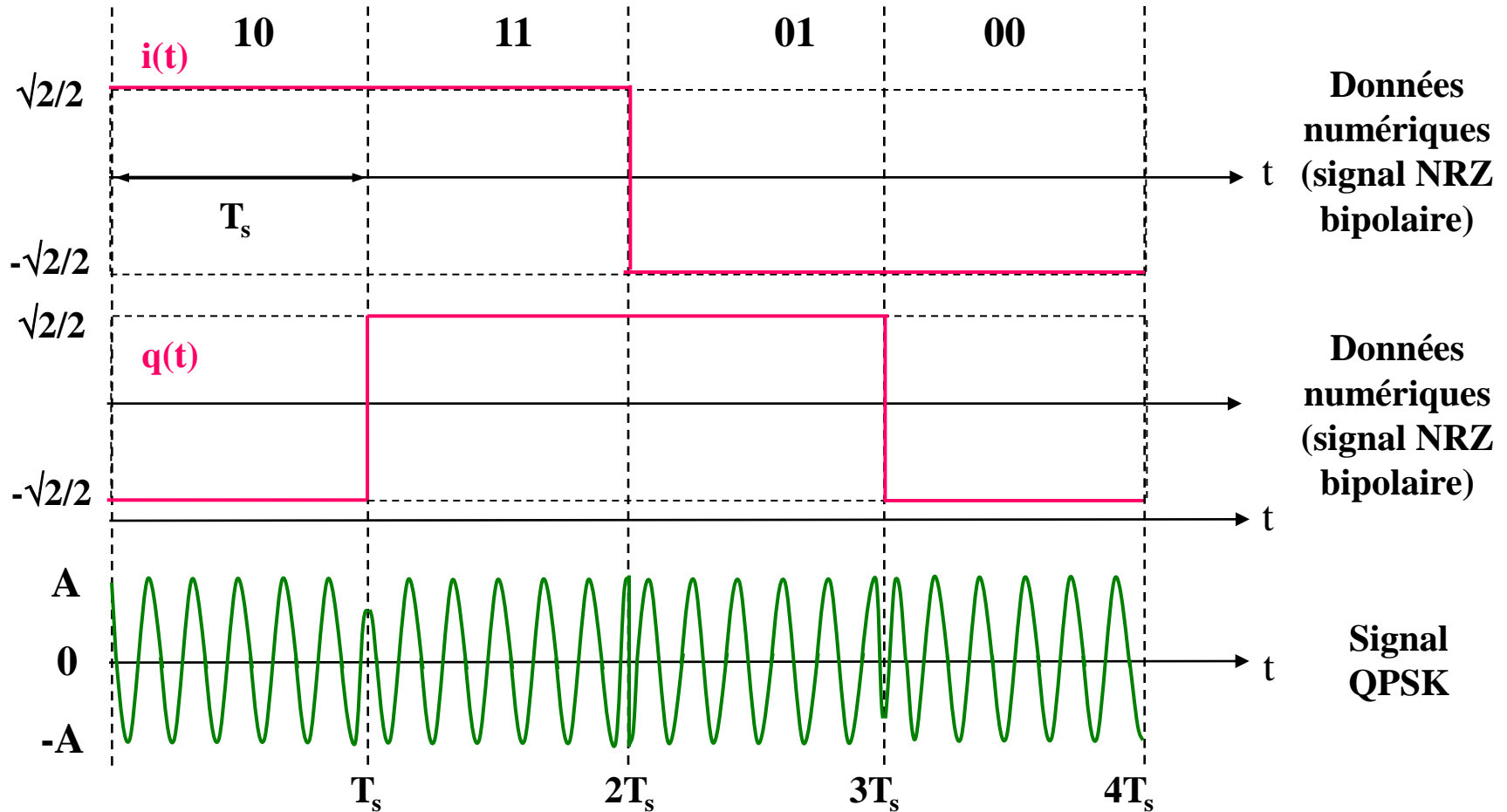
D'après le tableau qui précède  $i(t)$  et  $q(t)$  sont deux signaux NRZ bipolaires...

## QPSK : constellation



D'après la constellation, les sauts de phase d'un symbole à l'autre peuvent être de  $\pm \pi/2$  et  $\pm \pi$ .

## QPSK : signal temporel

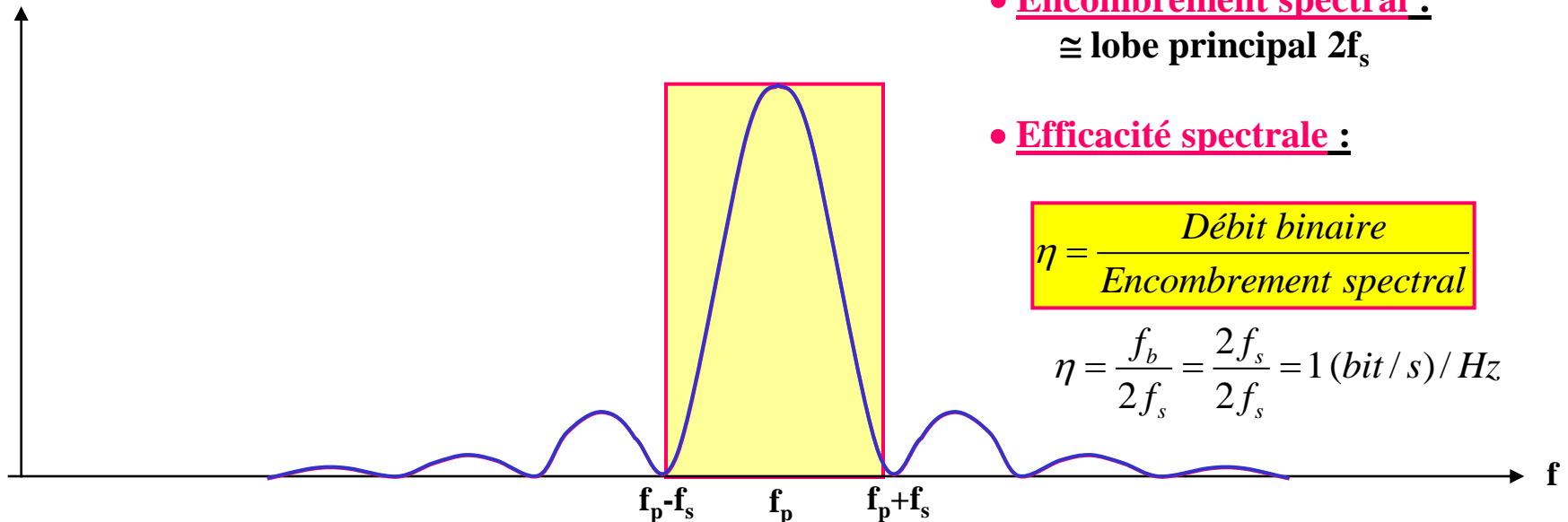


Les sauts de phase d'un symbole à l'autre peuvent être de  $\pm\pi/2$  et  $\pi$

## QPSK : spectre

On peut considérer la QPSK comme la  
superposition de 2 ASK de deux porteuses en  
quadrature par deux signaux en bande de base  
de débit  $1/T_s$

Les données sur les voies I et Q étant décorrélées  
le spectre  
de la PSK est la superposition des deux spectres  
ASK à la même fréquence ...



- Encombrement spectral :  
 $\cong$  lobe principal  $2f_s$

- Efficacité spectrale :

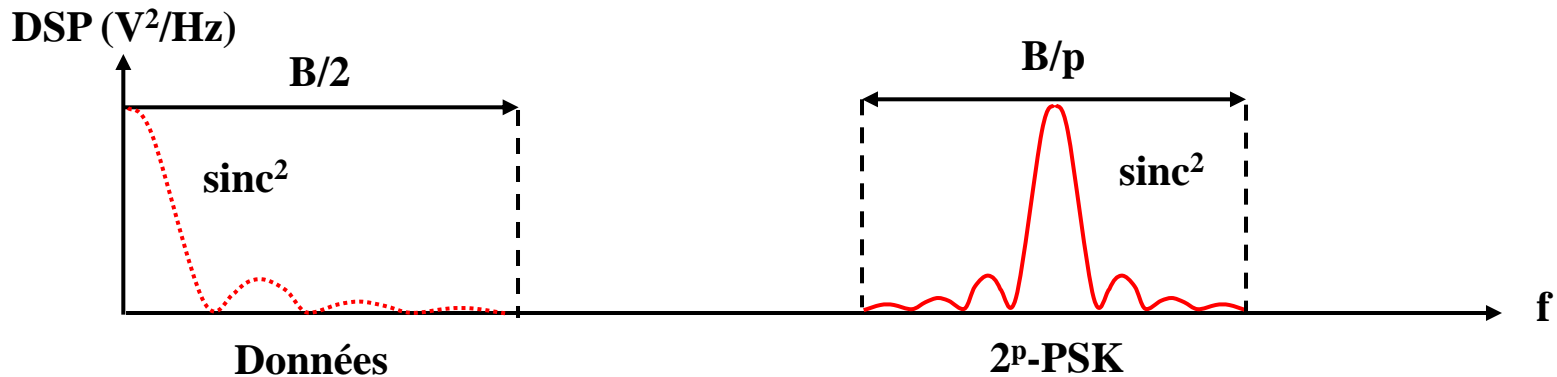
$$\eta = \frac{\text{Débit binaire}}{\text{Encombrement spectral}}$$

$$\eta = \frac{f_b}{2f_s} = \frac{2f_s}{2f_s} = 1 \text{ (bit/s)/Hz}$$

## Remarque : Spectre d'une M-PSK

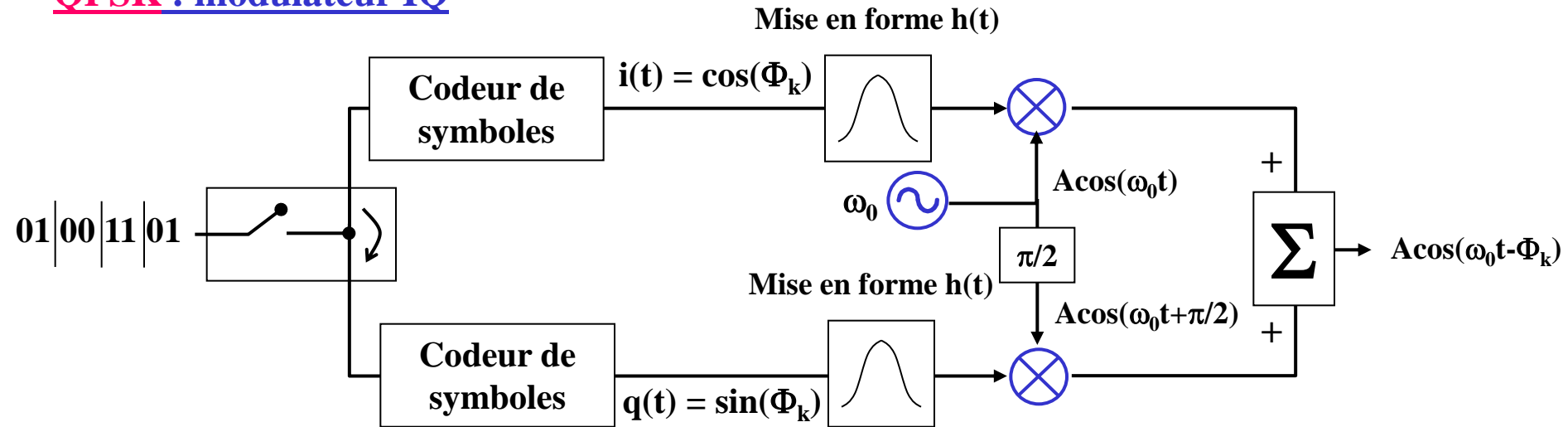
D'une manière générale le spectre d'une M-PSK ne dépend pas du nombre  $n$  de bits transmis par un symbole.

Si on se place à  $T_s$  fixé, l'efficacité spectrale (bit/s)/Hz d'une modulation M-PSK est  $n$  fois ( $m = 2^n$ ) celle d'une modulation 2-PSK.

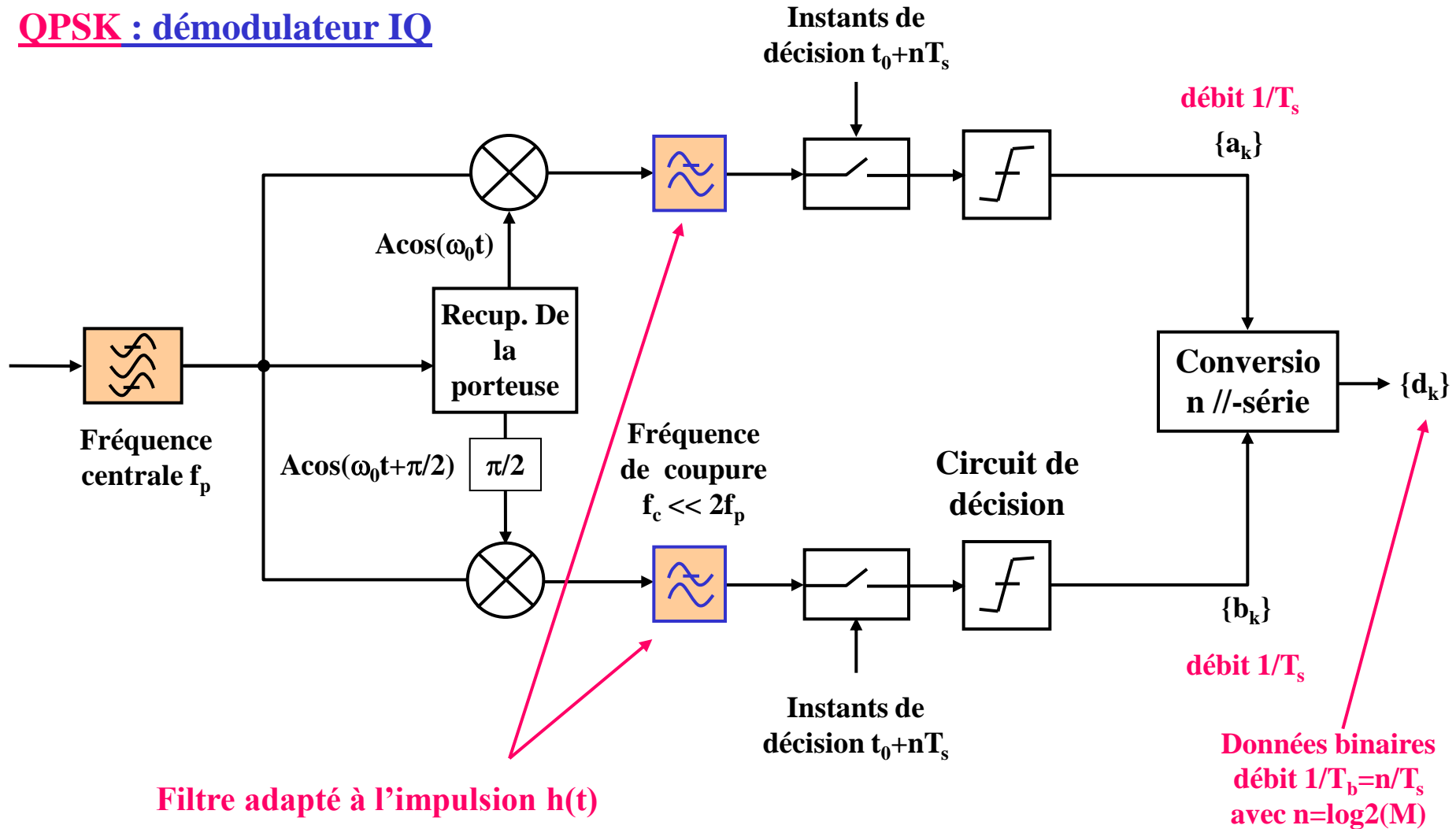




## QPSK : modulateur IQ



## QPSK : démodulateur IQ

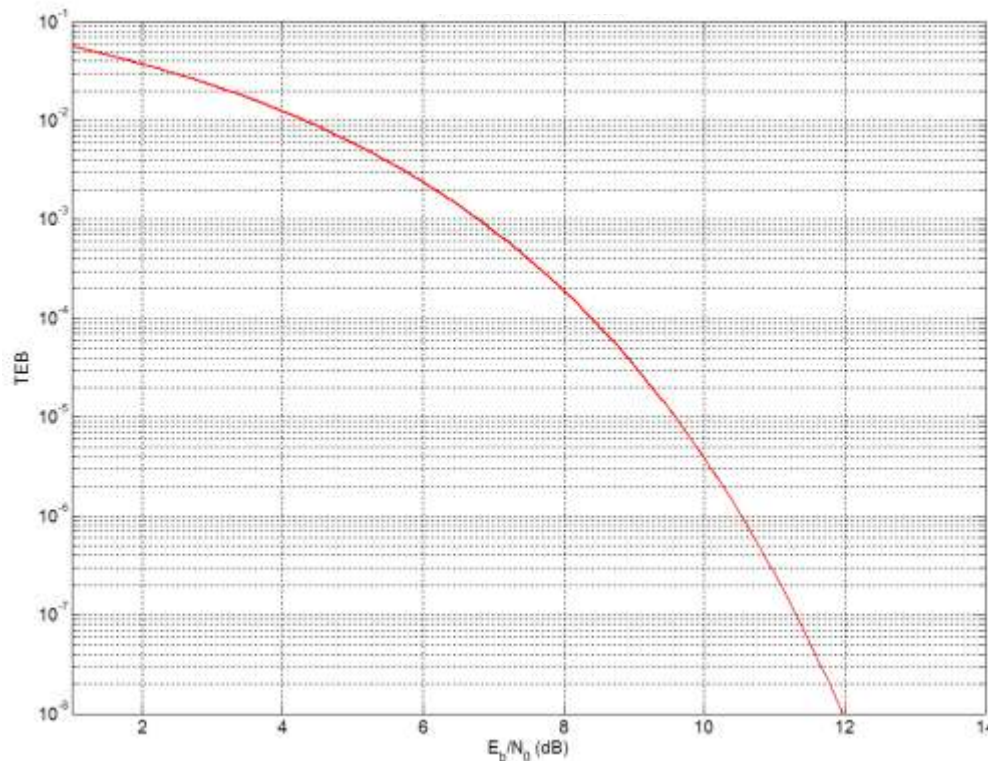


## QPSK : BER

$$P_{eb} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

comme MDP2...

Où  $E_b$  est l'énergie moyenne par bit  $E_b = \frac{A^2 T_b}{2}$   $A$  = amplitude des sinusoïdes  $f_p$

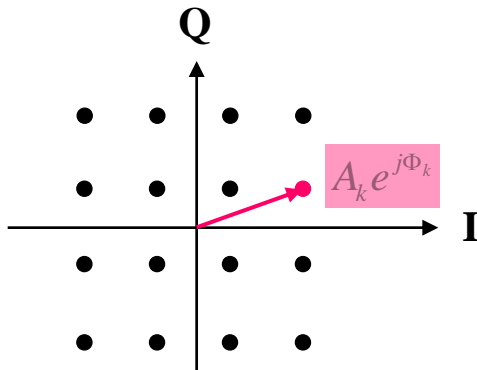


**Modulation MAQ-M :** *Modulation d'amplitude en quadrature à M états.*

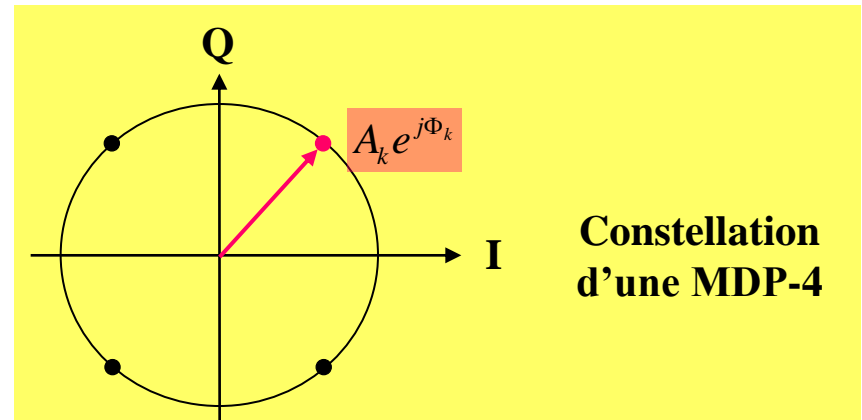
**Signal modulé**

$$s(t) = A \sum_k [a_k \cos 2\pi f_0 t + b_k \sin 2\pi f_0 t] h(t)$$

**Point de la constellation**  $A_k e^{j\Phi_k}$  avec  $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$  et  $\Phi_k = \text{atan}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$



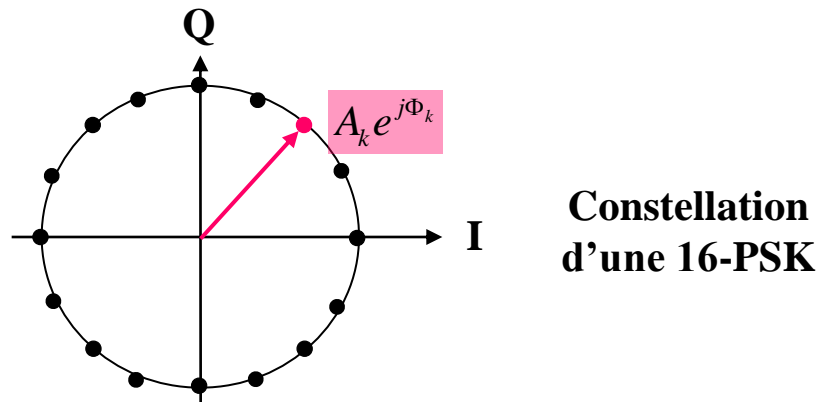
Constellation d'une MAQ 16



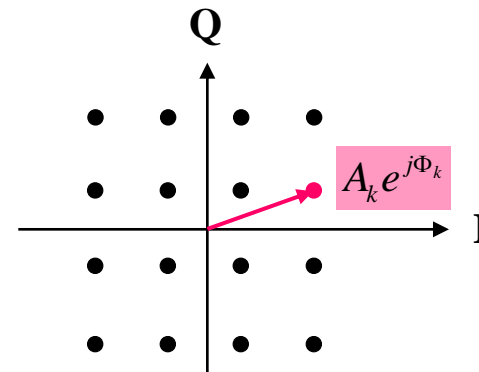
Constellation d'une MDP-4

**Remarque :** les modulations PSK vues précédemment, peuvent être considérées, et réalisées, comme la modulation de deux porteuses I (en phase) et Q (en quadrature) par des symboles  $a_k$  et  $b_k$  respectivement. Pour une PSK le module  $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = C^{te}$ .

**Remarque :** En augmentant la valence d'une PSK on rapproche les points de la constellation et on augmente le risque d'erreur (sauf à d'augmenter le rayon  $A = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$  cad l'énergie moyenne par bit  $E_b$ ).



Une **MAQ** aux points uniformément répartis dans le plan de Fresnel est **préférable**.



Constellation d'une MAQ 16

$$s(t) = \left[ \sum_k h(t - kT_s) a_k \right] A \cos(\omega_p t) - \left[ \sum_k h(t - kT_s) b_k \right] A \sin(\omega_p t)$$

$$i(t) = \sum_k h(t - kT_s) a_k$$

$$q(t) = \sum_k h(t - kT_s) b_k$$

**Signaux en bande de base de DSP (cf. cours plus haut...)**

$$\gamma_i(f) = \gamma_q(f) = \frac{\sigma^2}{T_s} |H(f)|^2$$

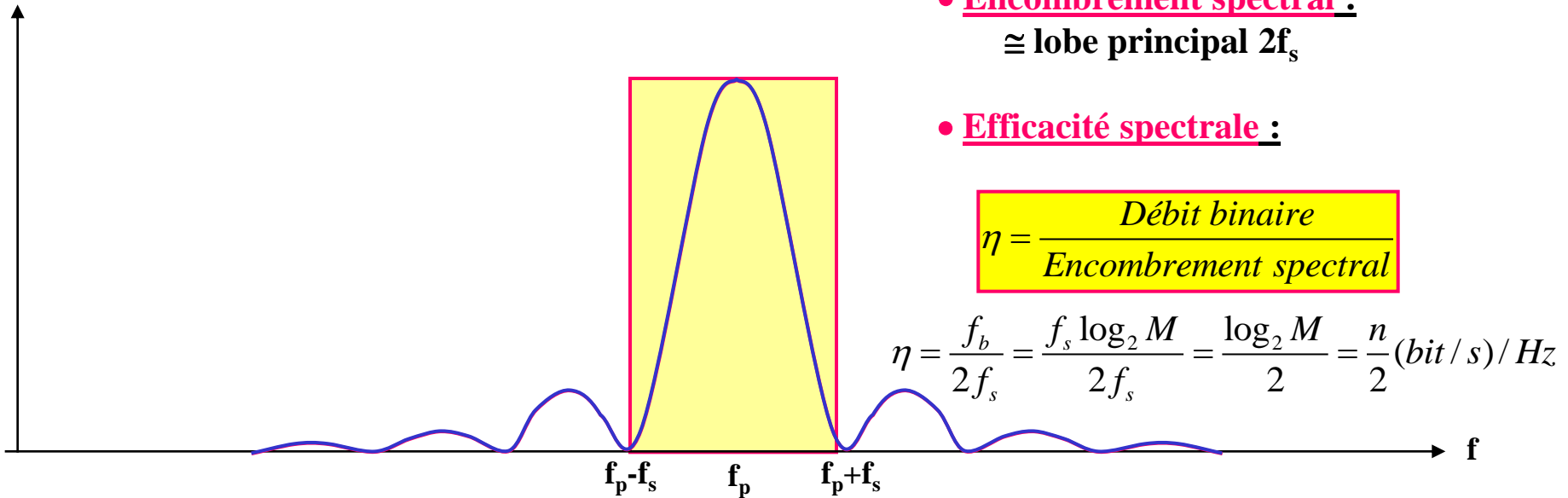
Avec  $\rightarrow H(f)$  TF de la forme d'onde  $h(t)$

$$\rightarrow \sigma = E[a_k] = E[b_k]$$

Les **données sur les voies I et Q étant décorréliées**, le spectre d'une MAQ est obtenu par la superposition des transposées autour de  $f_p$  des spectres des voies I et Q ...

$$\gamma_s(f) = \gamma_i(f) = \gamma_q(f) = \frac{A^2 T_s^2 \sigma^2}{2T_s} \left[ |H(f - f_p)|^2 + |H(f + f_p)|^2 \right]$$

MAQ : spectre En supposant des impulsions de type NRZ...



- Modulation et démodulation MAQ

Même structure que pour la PSK...

- BER MAQ-M

“On” montre que

$$P_{eb} = \frac{2}{\log_2 M} \left( \frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M}} \right) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{3 \log_2 M}{2(M-1)}} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Plus la valence  $\uparrow$  plus le BER  $\uparrow$  ; il faut donc  $\uparrow$  le niveau de signal pour garantir un certain BER.



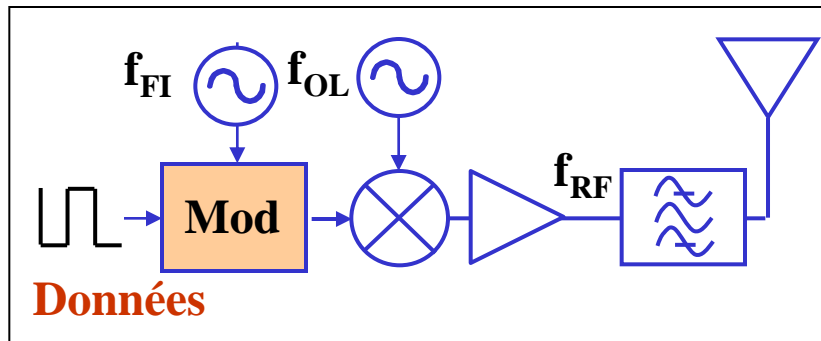
## **Conclusion**

ASK et PSK sont des modulations linéaires qui peuvent être réalisées au moyen de modulateurs IQ...

La FSK est une modulation non linéaire qui présente le désavantage d'une large occupation spectrale (2 porteuses).

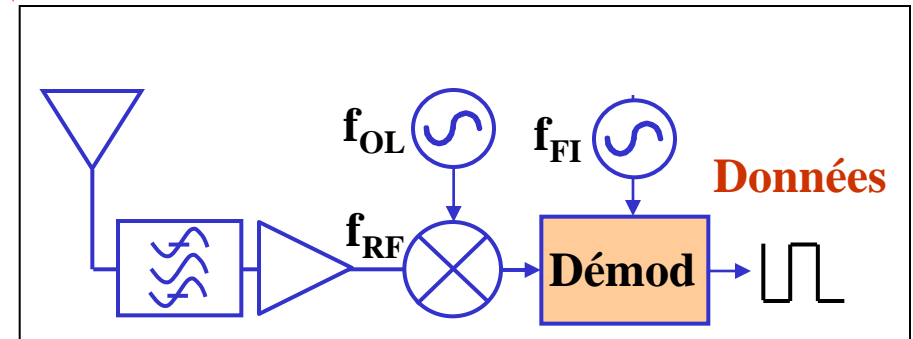
Désormais ce sont le MAQ qui sont utilisées par exemple l'ADSL : MAQ-1024 ( $=2^{10}$ , codage sur 10 bits) avec un débit de 16-20 Mbit/s ; le VDSL MAQ-32768 ( $=2^{15}$ , codage sur 15 bits) avec un débit de 56 Mbit/s ...

Emetteur



L'architecture d'un récepteur RF est symétrique de celle de l'émetteur.

Récepteur



Exemple bilan d'une liaison satellite

Rapport signal sur bruit en réception

$$\frac{S}{N} = \frac{P_e G_e A_{el} G_r}{kTB}$$

➤ Signal reçu  $S = P_e G_e A_{el} G_r$

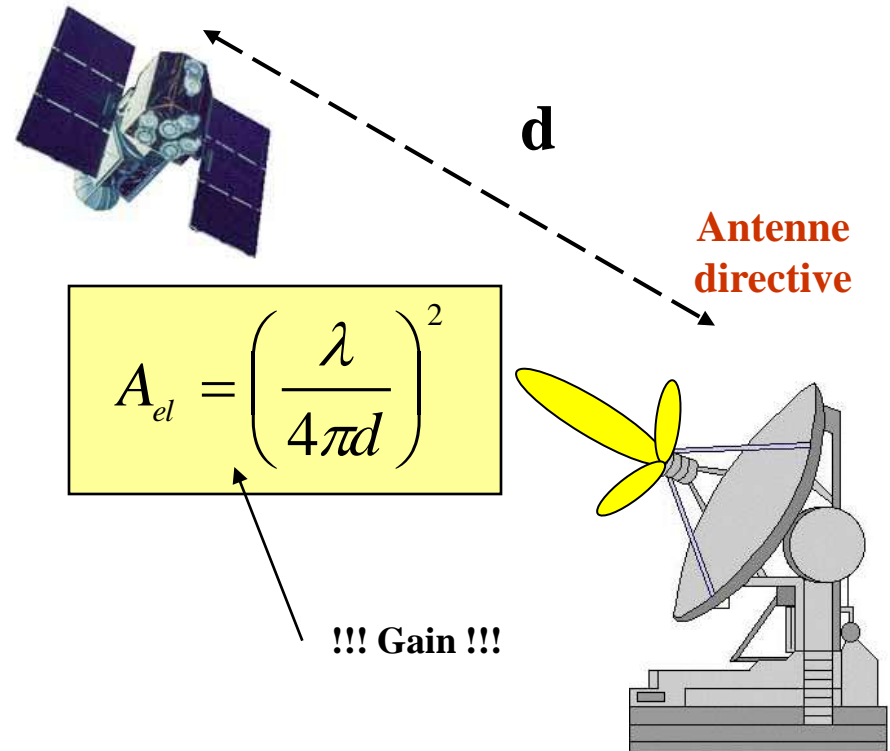
**Pe** : puissance émise

**Ge** : gain de l'antenne d'émission

**Ael** : atténuation en espace libre

**Gr** : gain de l'antenne de réception

On pourrait aussi multiplier le signal reçu par l'atténuation atmosphérique à la fréquence utilisée



Exemple bilan d'une liaison satellite

Rapport signal sur bruit en réception

$$\frac{S}{N} = \frac{P_e G_e A_{el} G_r}{kTB}$$

➤ Bruit reçu  $N = kTB$

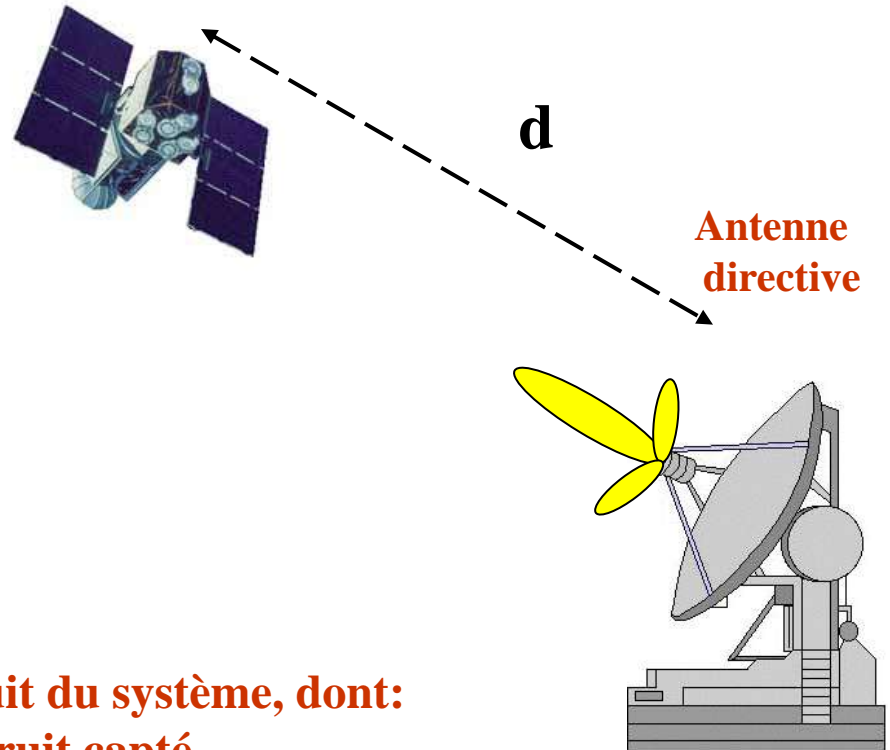
$$T = T_a + T_r$$

**B** : bande passante du système

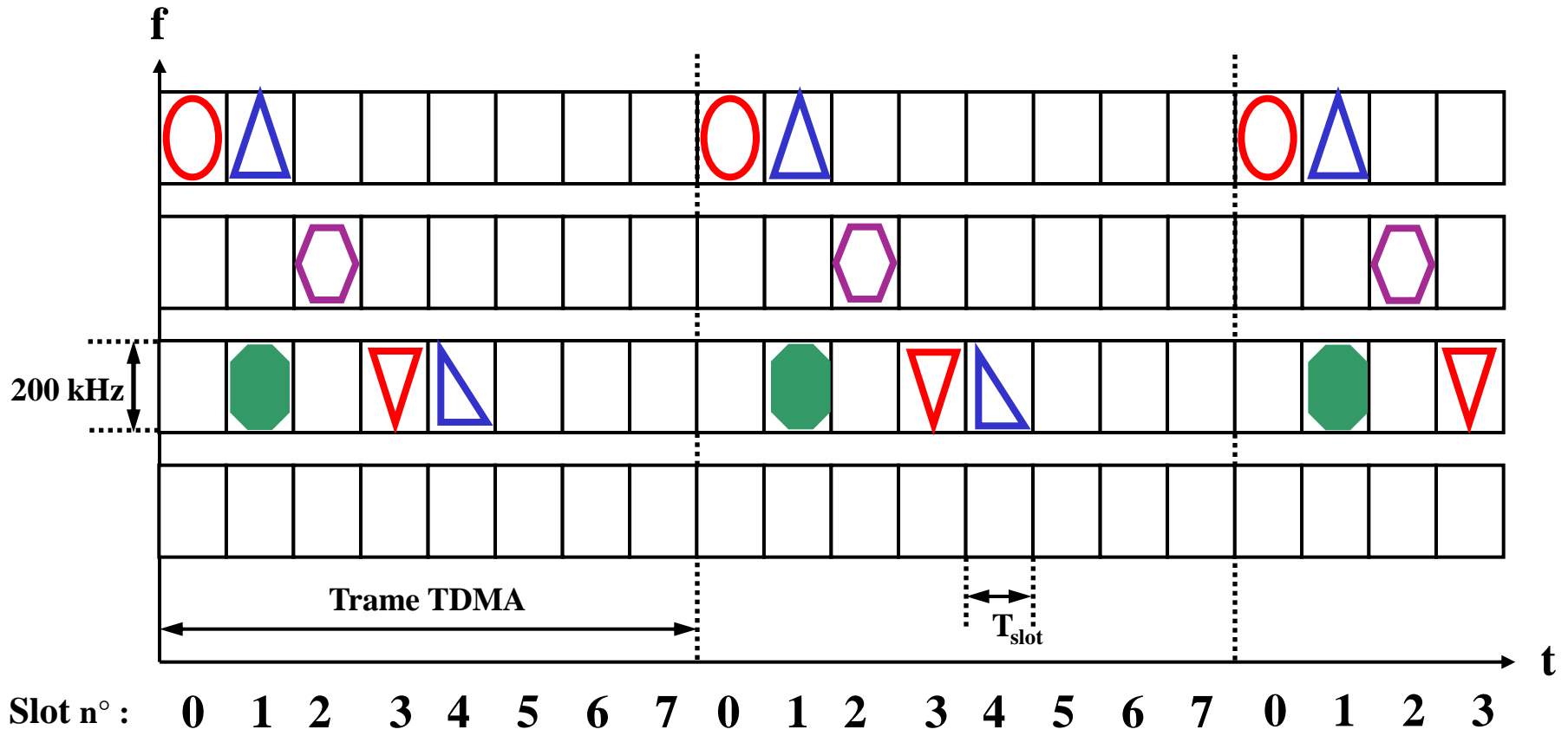
**T** : température équivalente de bruit du système, dont:

**T<sub>a</sub>** : Température équivalente du bruit capté  
par l'antenne (galactique, environnement)

**T<sub>r</sub>** : Température équivalente de bruit produit  
par le récepteur



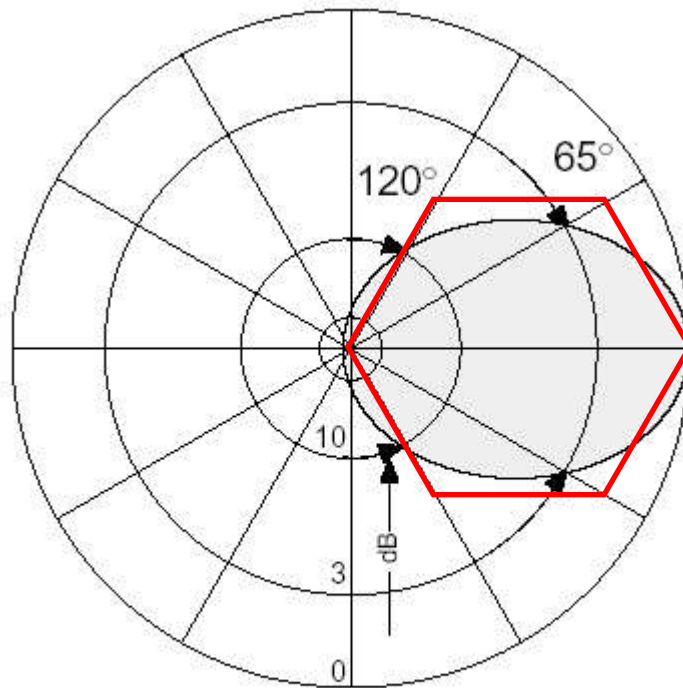
$$T_{\text{slot}} = 0,5769 \text{ ms} \quad T_{\text{TDMA}} = 4,562 \text{ ms} = 8 T_{\text{slot}}$$



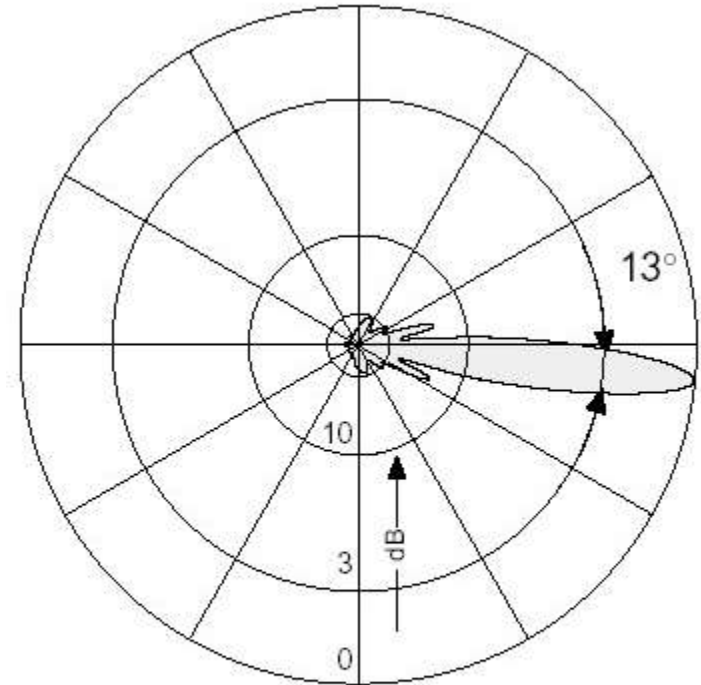
**VPol Panel 806–960 65° 15.5dBi 6°T**

Type No.	<b>732 691</b>
Frequency range	806 – 960 MHz
Polarization	Vertical
Gain	15.5 dBi
Half-power beam width	H-plane: 65° E-plane: 13°
Electrical downtilt	6°, fixed
Front-to-back ratio	> 25 dB
Impedance	50 $\Omega$
VSWR	< 1.3
Intermodulation IM3 (2 x 43 dBm carrier)	< –150 dBc
Max. power	500 W (at 50 °C ambient temperature)

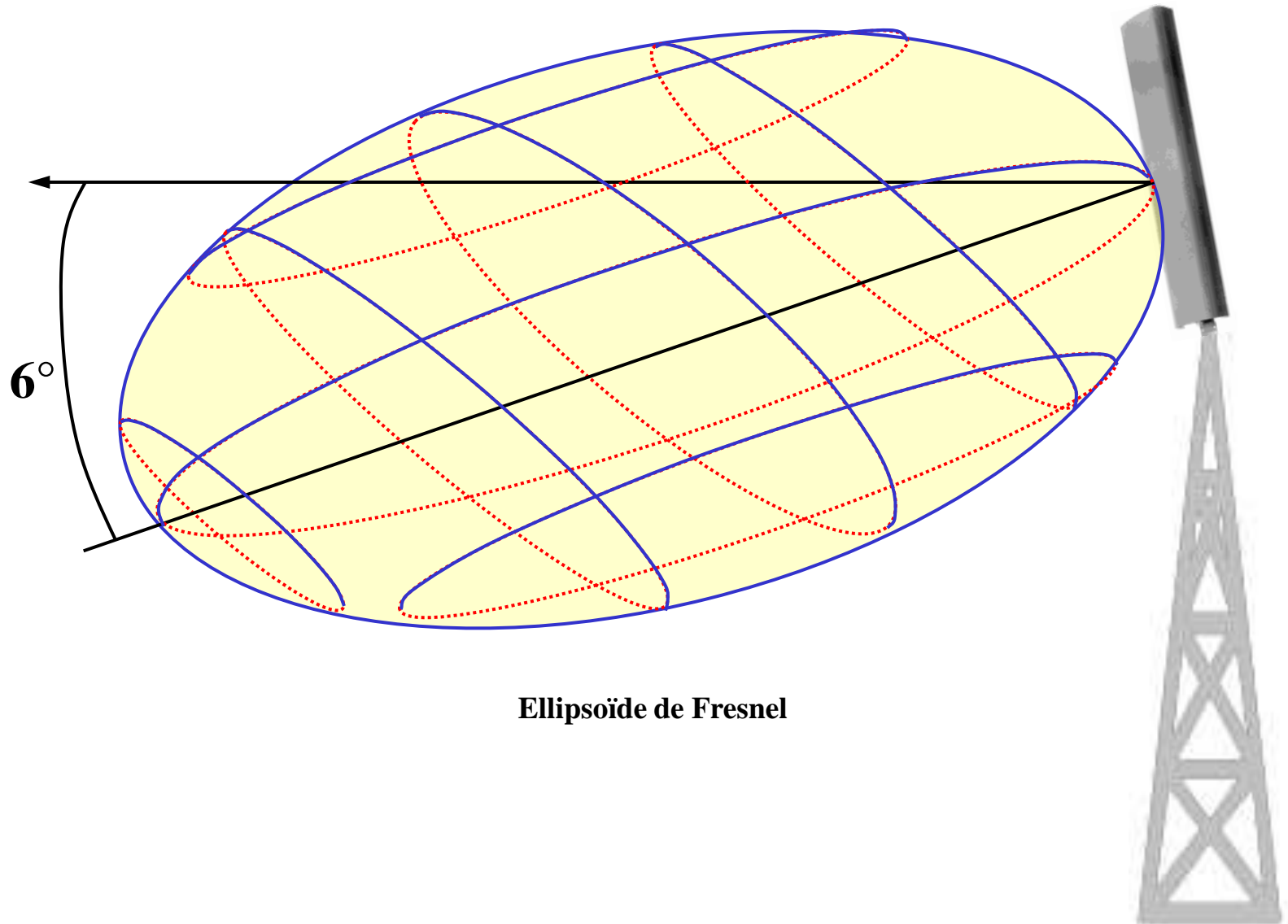




Horizontal Pattern

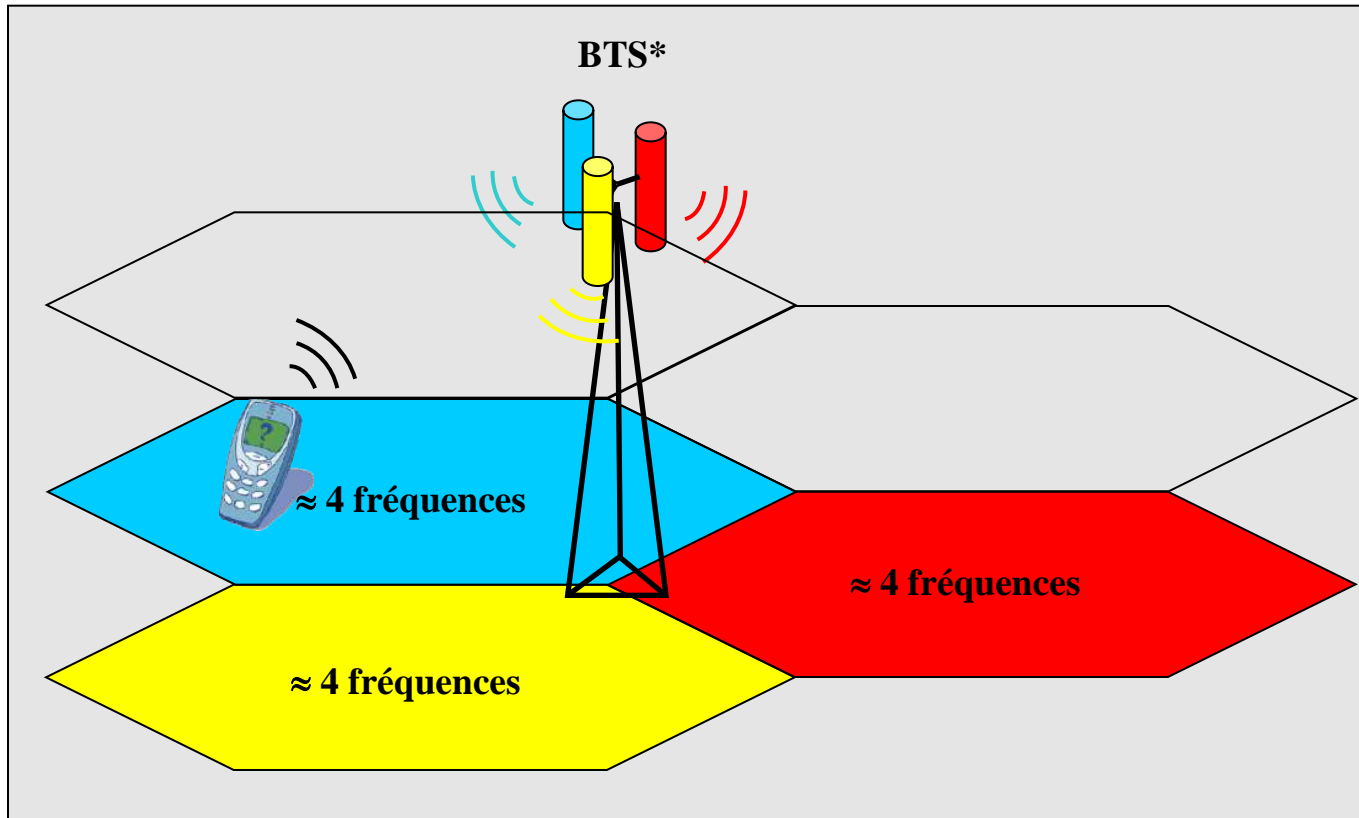


Vertical Pattern  
6° electrical downtilt

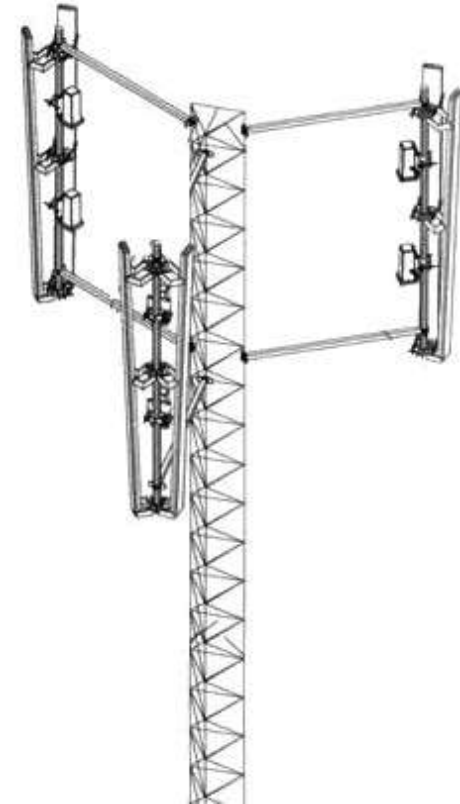


Ellipsoïde de Fresnel





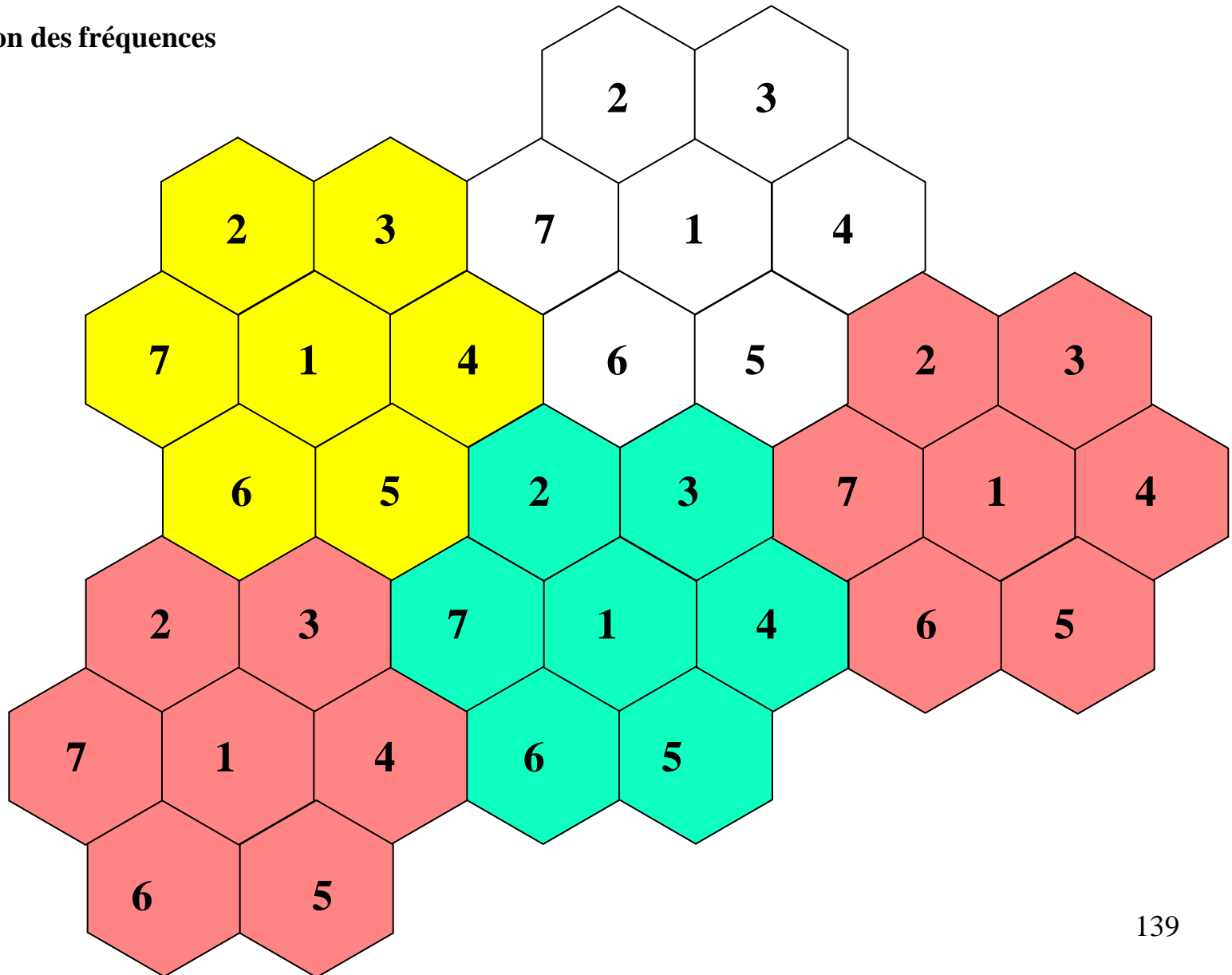
\* BTS : Base Station Transceiver (Tx/Rx cad émetteur/récepteur)



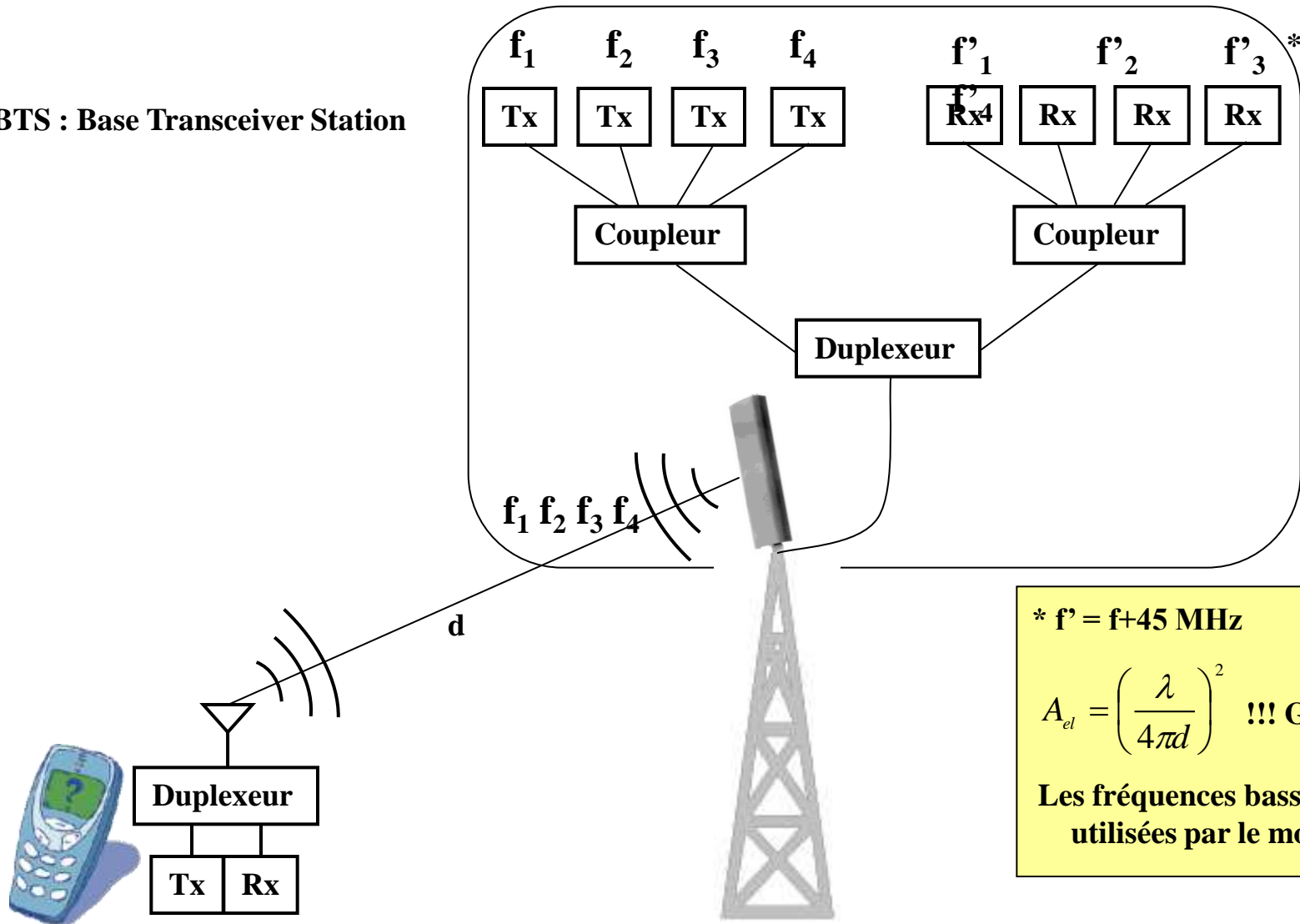
BTS\* comportant  
 $3 \times 2 = 6$  antennes  
(diversité d'antennes)



Réutilisation des fréquences



BTS : Base Transceiver Station



\*  $f' = f + 45 \text{ MHz}$

$$A_{el} = \left( \frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 \quad \text{!!! Gain !!!}$$

Les fréquences basses sont utilisées par le mobile

Source : Réseaux GSM-DCS, p 148  
Lagrange, Godlewski, Tabbane  
Editions Hermes

Sens de la liaison	Montante	Descendante	
Partie réception	BTS	MS	
Sensibilité	- 104 dBm	- 102 dBm	C
Marge de protection (cf. 6.5.2.4)	3 dB	3 dB	D
Perte totale câble et connecteur	4 dB	0 dB	E
Gain d'antenne	12 dBi	0 dBi	F
Marge de masque (90 % de la surface)	5 dB	5 dB	G
Puissance médiane nécessaire	- 104 dBm	- 94 dBm	$H=C+D+E-F+G$
Partie émission	MS	BTS	
Puissance d'émission (classes 2 et 7)	33 dBm	38 dBm	I
Perte de couplage + isolateurs	0 dB	3 dB	K
Perte totale câbles et connecteurs	0 dB	4 dB	L
Gain d'antenne	0 dBi	12 dBi	M
PIRE	33 dBm	43 dBm	$N=I-K-L+M$
Bilan de liaison			
Affaiblissement maximal	137 dB	137 dB	$O=N-H$
Perte due au corps humain	3 dB	3 dB	P
Affaiblissement de parcours	134 dB	134 dB	O-P
Portée en extérieur	2 km		
Portée intérieure (marge de 15 dB)	0,7 km		

On considère un câble de perte 2 dB/100m d'une longueur de 120 mètres dans la station de base, un mobile de puissance 2W.

La portée est calculée sur la valeur O-P en considérant la loi d'Okumura Hata pour une zone urbaine (figure 6.4).

D'après [GSM 03.30 Annexe A.1].

Figure 6.6. Exemple de bilan de liaison pour GSM 900

Source : Réseaux GSM-DCS, p 149  
Lagrange, Godlewski, Tabbane  
Editions Hermes

Sens de la liaison	Montante	Descendante	
Partie réception	BTS	MS	
Sensibilité	- 104 dBm	- 102 dBm	C
Marge de protection (cf. 6.5.2.4)	3 dB	3 dB	D
Perte totale câble et connecteur	2 dB	0 dB	E
Gain d'antenne	18 dBi	0 dBi	F
Gain de diversité	5 dB	0 dB	F'
Marge de masque (90 % de la surface)	6 dB	6 dB	G
Puissance médiane nécessaire	- 116 dBm	- 91 dBm	$H=C+D+E-F-F'+G$
Partie émission	MS	BTS	
Puissance d'émission (classes 1 et 2)	30 dBm	42 dBm	I
Perte de couplage + isolateurs	0 dB	3 dB	K
Perte totale câbles et connecteurs	0 dB	2 dB	L
Gain d'antenne	0 dBi	18 dBi	M
PIRE	30 dBm	55 dBm	$N=I-K-L+M$
Bilan de liaison			
Affaiblissement maximal	146 dB	146 dB	$O=N-H$
Perte due au corps humain	3 dB	3 dB	P
Affaiblissement de parcours	143 dB	143 dB	$O-P$
Portée en extérieure	2 km		
Portée intérieure (marge de 15 dB)	0,7 km		

On considère un mobile de puissance 1W.

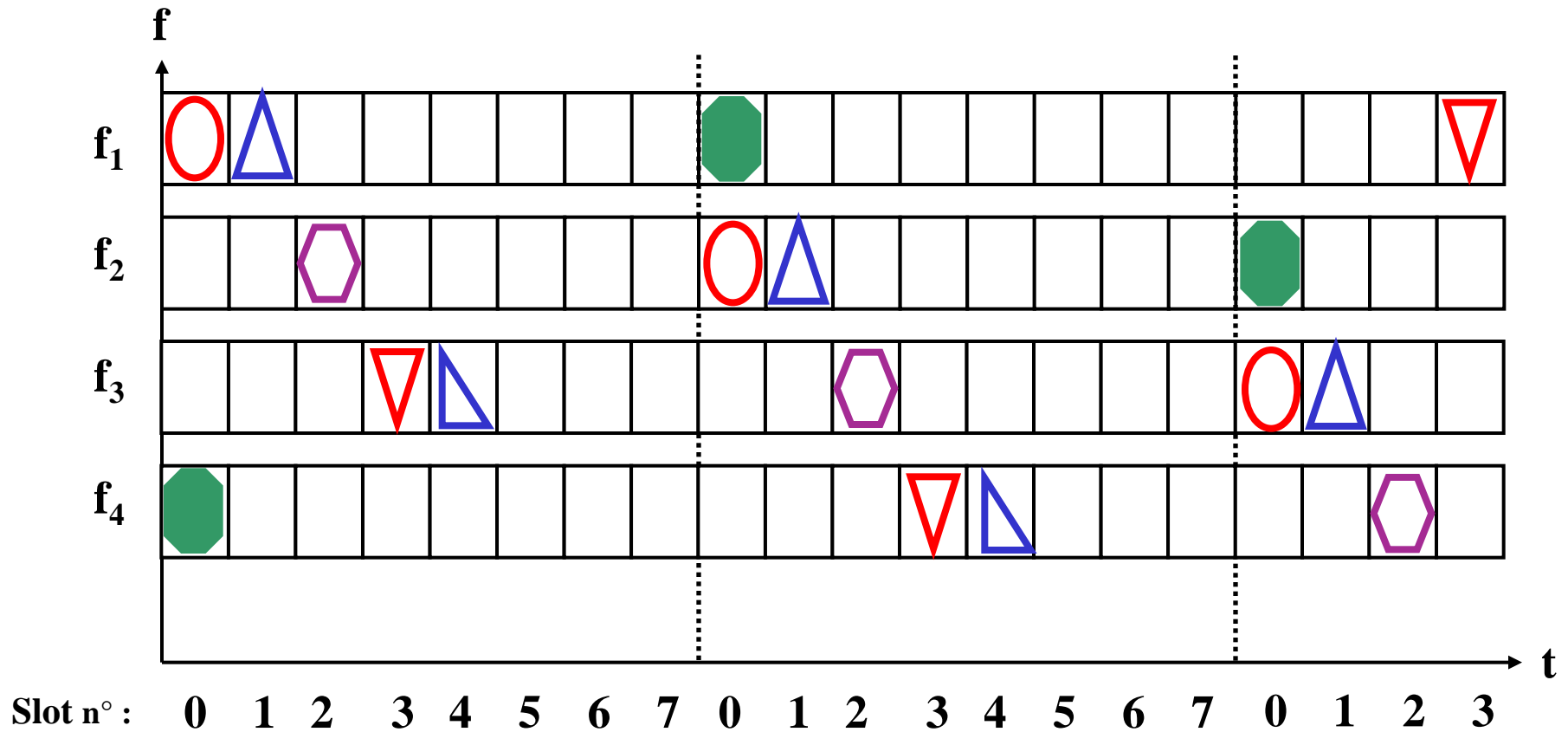
La portée est calculée en considérant la loi d'Hata pour une zone urbaine.

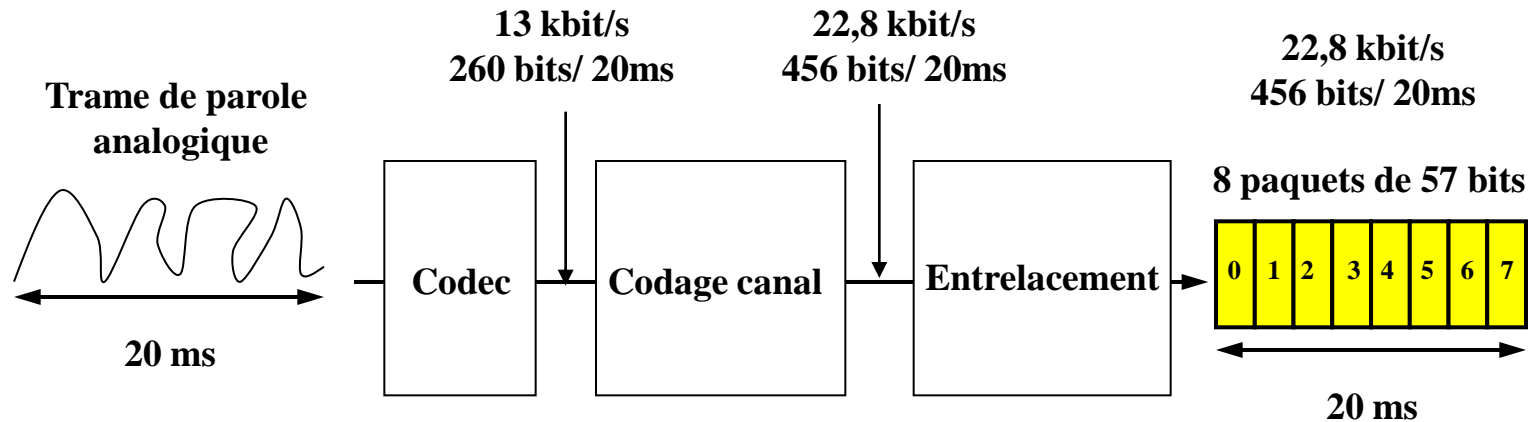
Noter l'utilisation de la diversité dans la station de base et l'utilisation d'antennes à fort gain pour supporter des affaiblissements plus importants que pour le bilan de liaison GSM 900 (ces techniques peuvent être aussi employées pour GSM 900).

D'après [GSM 03.30 Annexe A.3].

Figure 6.7. Exemple de bilan de liaison pour DCS 1800

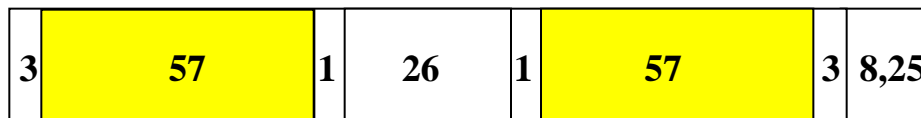
Exemple de frequency hopping sur 4 fréquences





Séquence d'apprentissage

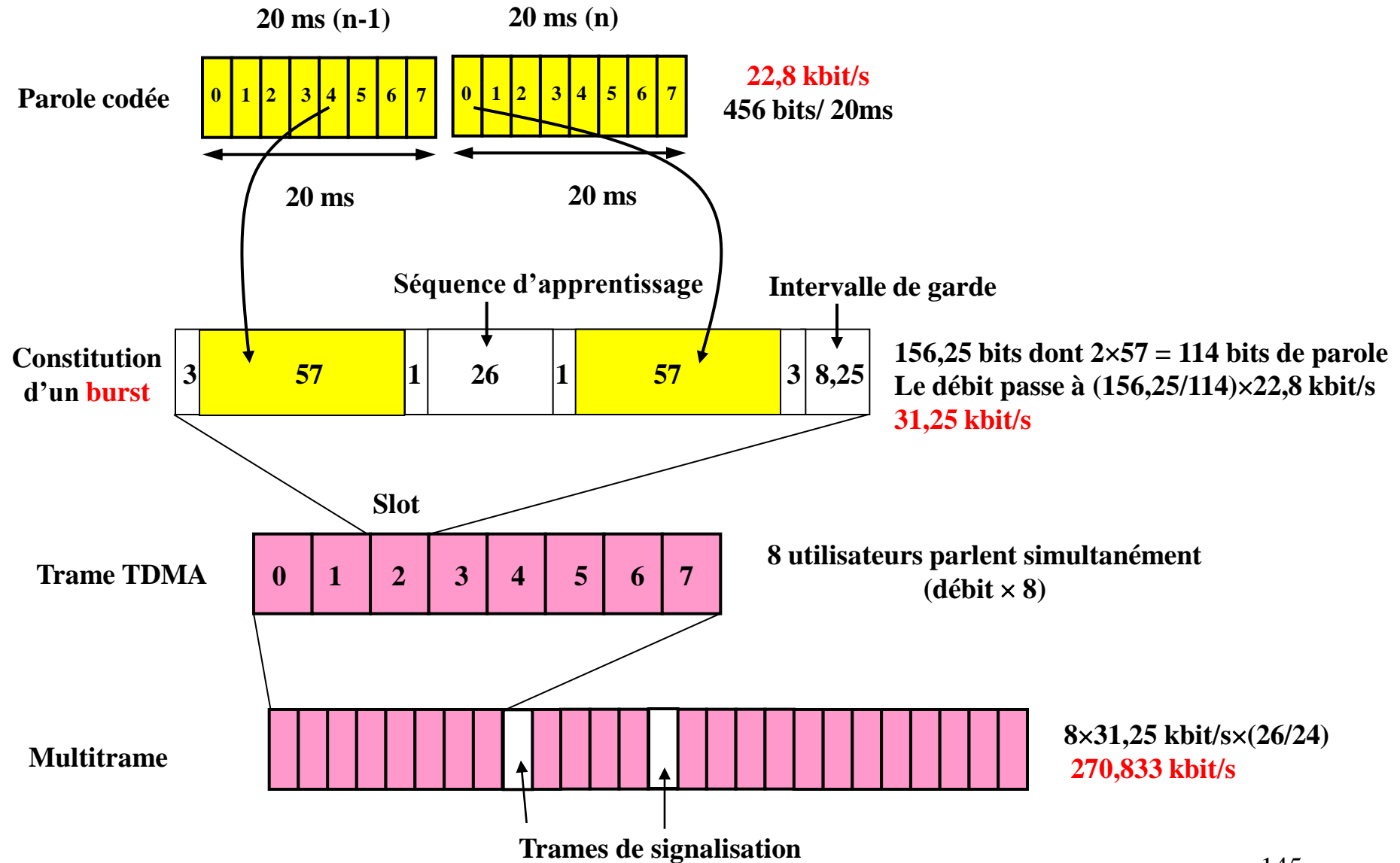
Intervalle de garde

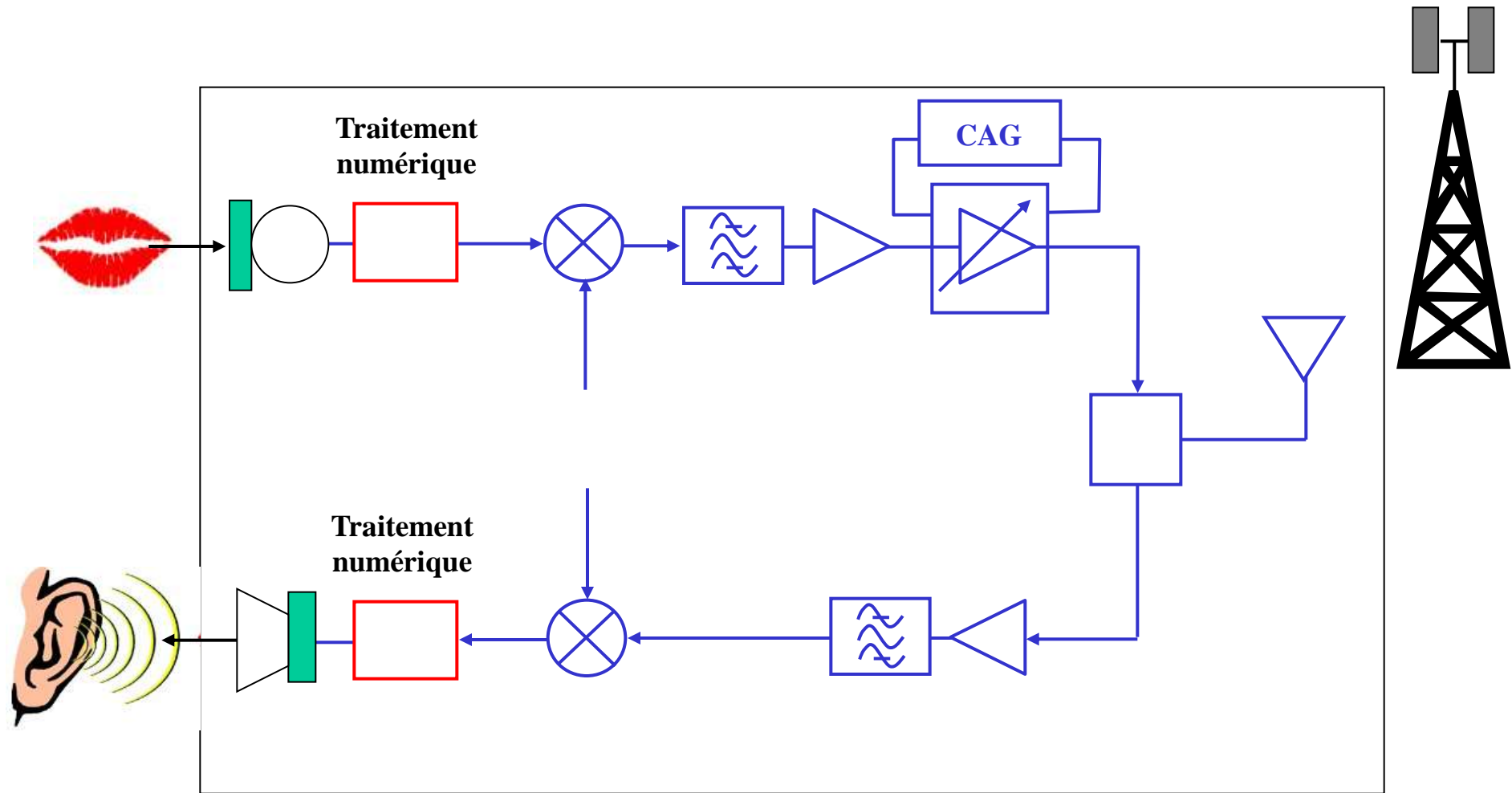


Contenu d'un burst

156,25 bits dont  $2 \times 57 = 114$  bits de parole  
Le débit passe à  $(156,25/114) \times 22,8 \text{ kbit/s} = 31,25 \text{ kbit/s}$







$\exists$  2 perturbations du canal
 {

 Le filtrage  $\Leftrightarrow$  canal à bande limitée  
 Le bruit additif

