

6.2 Equations de Maxwell

En résumé, les quatre équations de Maxwell *dynamiques* relient *localement* les divergences et rotationnels des champs électrique et magnétique aux champs électrique et magnétique eux-mêmes, ainsi qu'aux sources de charges et de courants statiques ou dynamiques.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Maxwell - Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (3)$$

Maxwell - Faraday

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \quad (4)$$

Maxwell - Ampère

6.2 Equations de Maxwell

En statique:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{E}} = \vec{0} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}} \quad (4)$$

En l'absence de charge et courant :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \quad (4)$$

6.3 Equations de propagation

$$\underbrace{\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{B}})}_{(4)} = -\nabla^2 \vec{\mathbf{B}} + \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}})}_{\mathbf{0}}$$



$$\nabla^2 \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} = -\mu_0 (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{j}})$$

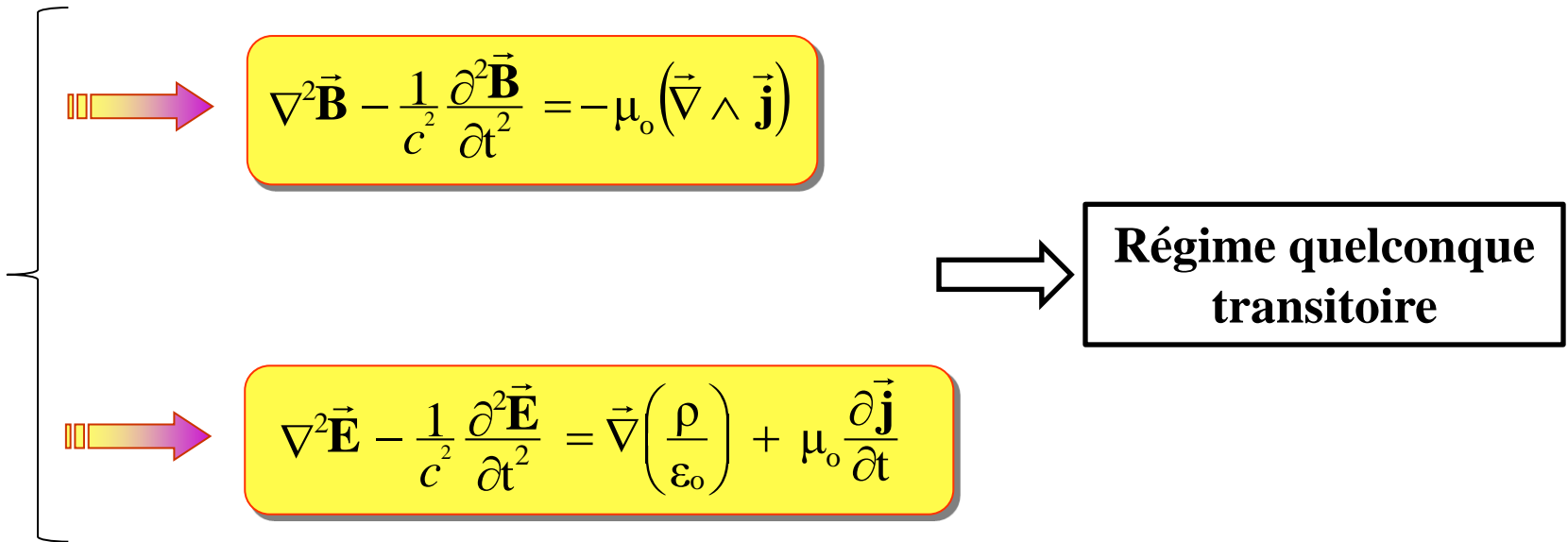
$$\mu_0 (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{j}}) + \underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{E}})}_{(3)} \rightarrow -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2}$$

$$\underbrace{\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{E}})}_{(3), (4)} = -\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} + \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}})}_{(1)}$$



$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) + \mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{j}}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{\mathbf{j}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right) \quad \vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right)$$



Dans le vide la vitesse de phase d'une onde plane est la vitesse de la lumière c . Par contre dans la matière, cette vitesse est plus lente. On sait que dans le vide la vitesse de la lumière c est liée aux constantes ϵ_o et μ_o par la relation:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o \mu_o}}$$

Équation d'ondes (temporel)

- ▼ Loin des sources : ni charges $\varrho = 0$ (milieux neutres) ni courants $\vec{J} = 0$
- ▼ Le champ électromagnétique s'auto-alimente !
- ▼ Découpler les équations du rotationnel
- ▼ Utile : $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$
- ▼ En temporel : Faraday (3) + Maxwell-Ampère (4)

$$\vec{\nabla} \wedge (3) \xrightarrow{(4)} \boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{\mathcal{E}} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} \quad \text{équ. d'ondes}} \quad (14)$$

- ▼ Vitesse de propagation : $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ ($c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \triangleq \frac{c}{n}$$

- ▼ Indice de réfraction

$$n \triangleq \sqrt{\mu_r\epsilon_r} \quad (15)$$

6.3 Equations de propagation dans le vide.

On voit que ces équations sont toutes les mêmes *dans le vide*, i.e. *en l'absence de charge et de courant*.

Equation de d'Alembert dans le vide

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

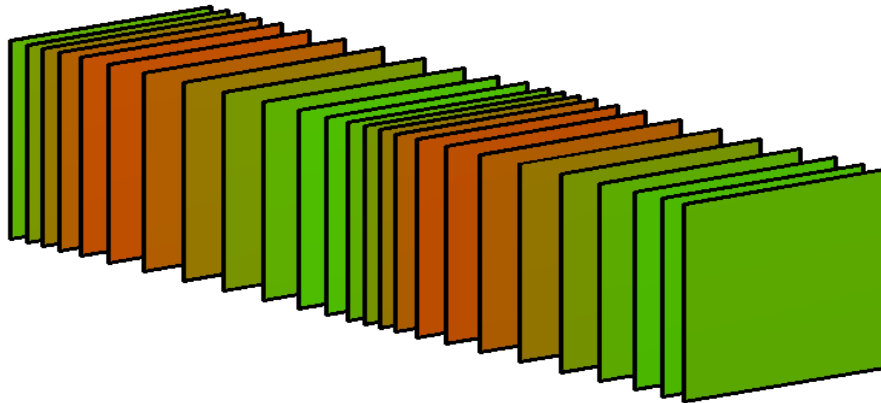
$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

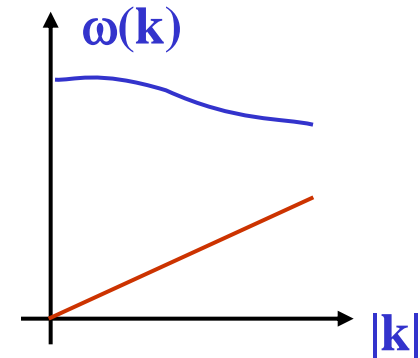
$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

6.4 Ondes électromagnétiques.

Ces équations admettent des solutions complexes, combinaisons linéaires de fonctions du type $\mathbf{S}(\vec{r}, t) = \mathbf{S}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)}$ qui sont des fonctions représentant une *onde plane*, c'est à dire une grandeur physique oscillant avec la *fréquence* $\nu = \omega/2\pi$ et se propageant dans la direction du *vecteur d'onde* \vec{k} avec une *vitesse de propagation* $c = \omega / |\vec{k}|$. La quantité ω s'appelle la *pulsation de l'onde*.

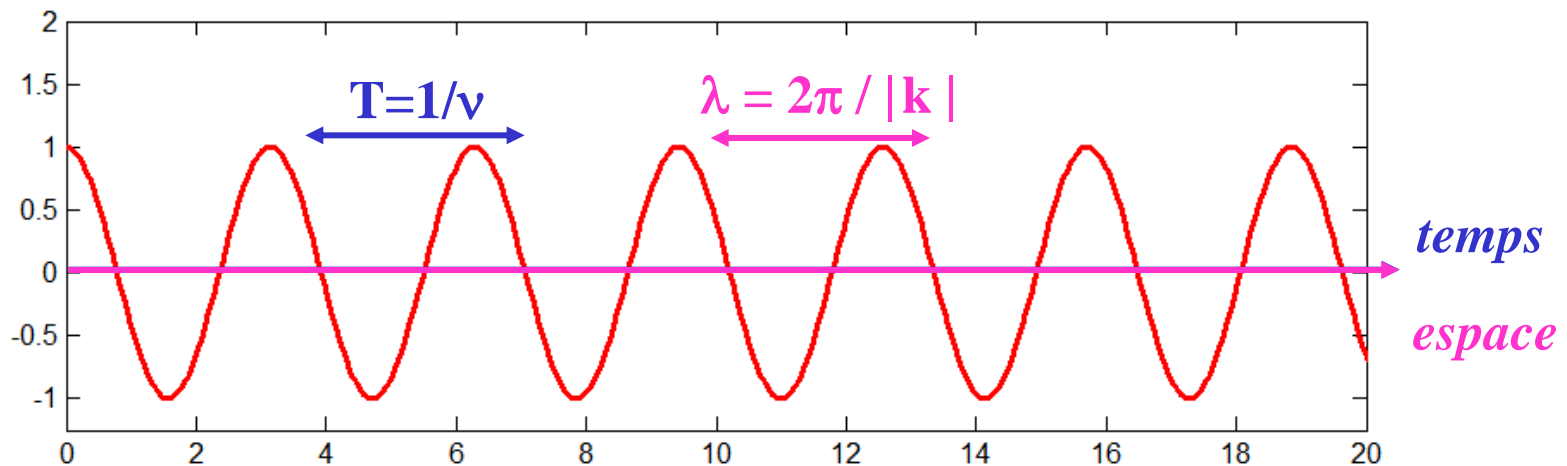


La relation entre la pulsation et le vecteur d'onde s'appelle *relation de dispersion*.



6.4 Ondes électromagnétiques.

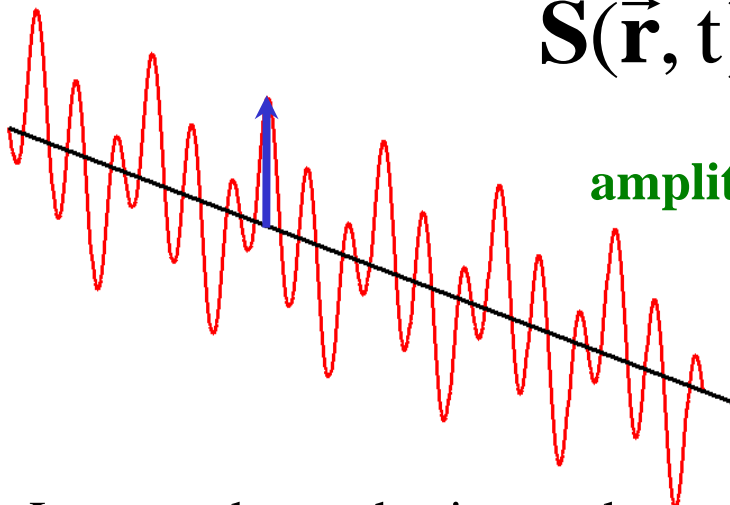
Une telle onde présente une *doublé périodicité* dans le *temps* et dans l'*espace*. La *période temporelle* T (mesurée en secondes) est l'inverse de la fréquence ν (mesurée en Hz) $T=1/\nu$. La *période spatiale* ou *longueur d'onde* λ est inversement proportionnelle au module du vecteur d'onde $\lambda = 2\pi / |\vec{k}|$.



Supposons qu'au temps $t = 0$ et à la position $\vec{r} = \vec{0}$, la phase initiale φ soit nulle, alors à chaque fois que le temps t est un multiple de la période T , ou que la projection du vecteur position \vec{r} sur la direction de propagation $\vec{k} / |\vec{k}|$ est un multiple de la longueur d'onde, l'amplitude de la fonction d'onde $|\mathbf{S}(\vec{r}, t)|$ passe par un maximum $|\mathbf{S}_0|$.

6.4 Ondes électromagnétiques.

Dans le cas où la grandeur physique est un champ vectoriel, la fonction d'onde est un vecteur. La fonction d'onde est alors définie non seulement par une amplitude, une pulsation, un vecteur d'onde, mais également par **une direction** particulière appelée *polarisation de l'onde*, à ne pas confondre avec la direction de propagation (représentée par le vecteur d'onde). Pour une onde sinusoïdale on aura:


$$\vec{S}(\vec{r}, t) = S_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)} \vec{e}_0$$

The diagram illustrates the components of the wave function $\vec{S}(\vec{r}, t)$. A red sinusoidal wave is shown propagating along a black line. A blue arrow indicates the polarization direction. Red arrows point from the terms in the equation to their corresponding physical quantities: S_0 is labeled 'amplitude' (green), ω is labeled 'pulsation' (magenta), \vec{k} is labeled 'vecteur d'onde' (magenta), and \vec{e}_0 is labeled 'polarisation' (blue).

Les grandeurs physiques observables étant réelles, la solution physique \mathcal{S} est donc donnée par la partie réelle de la fonction d'onde complexe.

$$\mathcal{S}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{ \mathbf{S}(\vec{r}, t) \} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{S} + \text{c.c.} \}$$

complexe conjugué

6.4 Ondes électromagnétiques.

Un nombre complexe Z peut s'écrire de deux façons:

$$\begin{aligned} Z &= a + jb & \bar{Z} &= a - jb & a &= \rho \cos(\theta) & b &= \rho \sin(\theta) \\ Z &= \rho \cdot e^{j\theta} & \bar{Z} &= \rho \cdot e^{-j\theta} & \rho &= \sqrt{a^2 + b^2} & \theta &= \arctg(b/a) \end{aligned}$$

Ainsi une fonction d'onde réelle s'écrira $\vec{\mathcal{S}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = S_o \cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \varphi) \vec{\mathbf{e}}_o$

Soit en coordonnées cartésiennes:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathbf{x}}(x, y, z, t) &= S_o \cos(\omega t - [k_x x + k_y y + k_z z] + \varphi) \mathbf{e}_{o\mathbf{x}} \\ \mathcal{S}_{\mathbf{y}}(x, y, z, t) &= S_o \cos(\omega t - [k_x x + k_y y + k_z z] + \varphi) \mathbf{e}_{o\mathbf{y}} \\ \mathcal{S}_{\mathbf{z}}(x, y, z, t) &= S_o \cos(\omega t - [k_x x + k_y y + k_z z] + \varphi) \mathbf{e}_{o\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Par exemple pour une onde de pulsation ω polarisée suivant la direction Oy et se propageant à la vitesse $c = \omega/k$ dans la direction Ox on écrira:

$$\mathcal{S}_{\mathbf{y}}(x, t) = S_o \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

6.4 Ondes électromagnétiques.

Vérifions à présent que ces fonctions sont bien solutions de l'équation de d'Alembert.

$$\nabla^2 \mathbf{S} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2} \stackrel{?}{=} 0$$

Soit \mathbf{S} la fonction d'onde définie par $\mathbf{S}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{S}_0 e^{j(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}})}$.

- $\nabla^2 \mathbf{S} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \mathbf{S}) = \vec{\nabla} \cdot (-j \vec{\mathbf{k}} \mathbf{S}) = -|\mathbf{k}|^2 \mathbf{S}$

$$\vec{\nabla}(e^{-j\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}) = \vec{\nabla}(e^{-j(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)}) = -j \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} e^{-j(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)} = -j \vec{\mathbf{k}} e^{-j\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (-j \vec{\mathbf{k}} e^{-j\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}) = -j \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} k_x e^{-j(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)} \\ k_y e^{-j(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)} \\ k_z e^{-j(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)} \end{pmatrix} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) e^{-j(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)} = -|\mathbf{k}|^2 e^{-j\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}$$

- $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (j\omega \mathbf{S}) = \frac{1}{c^2} j\omega \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{S}$

- $\nabla^2 \mathbf{S} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2} = \left(|\mathbf{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{S} = 0$

La fonction \mathbf{S} satisfait donc bien à l'équation de d'Alembert si $|\mathbf{k}| \cdot c = \omega$.

6.4 Ondes électromagnétiques.

Montrons à présent que c représente bien la vitesse de propagation.

Par commodité effectuons les calculs pour une fonction réelle 1D à phase initiale nulle (choix de la direction Ox suivant celle de k et de l'origine telle que $S(0,0)=S_0$):

$$S(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx)$$

Pour qu'un état donné de $S(x,t)$ se retrouve *également* en un point $x'=x+dx$ au temps $t'=t+dt$, il faut que la phase de l'onde " $\omega t - kx$ " soit conservée:

$$\Phi = \omega t - kx = \omega t' - kx'.$$

Pour que cette phase soit constante (*on parle alors d'onde stationnaire*) il faut que $d\Phi = 0$, soit $d\Phi = \omega dt - k dx = 0$.

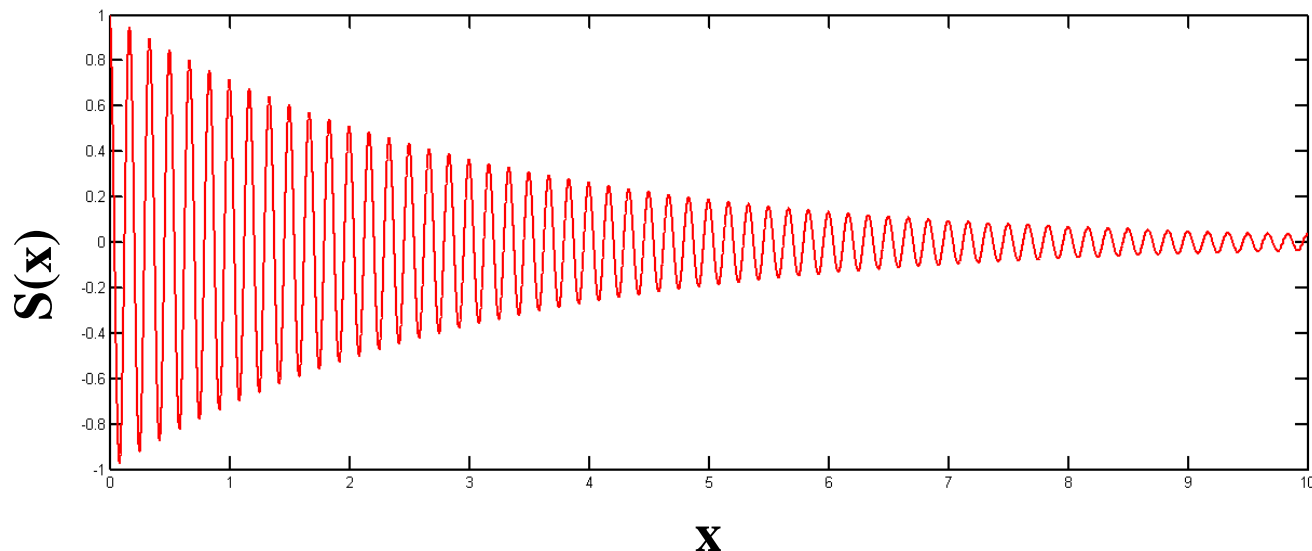
La quantité $dx/dt = \omega/k = c$ représente une vitesse instantanée. Il s'agit de la vitesse de propagation d'un état de l'onde - correspondant à une phase donnée -, c'est pourquoi on l'appelle *vitesse de phase*.

6.4 Ondes électromagnétiques.

Remarque: Nous verrons plus tard que les ondes électromagnétiques véhiculent de l'énergie. Or nous savons qu'au travers de la matière, une partie de cette énergie peut être absorbée et les ondes atténuées. Dans ce cas il faut ajouter un terme d'atténuation dans la fonction d'onde (en \mathbf{r} ou en t).

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = S_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) - \alpha \vec{r}} \vec{e}_0$$

Le terme α s'appelle coefficient d'amortissement (loi de Beer Lambert).



6.4 Ondes électromagnétiques.

Appliquons ces notions d'ondes aux champs électrique et magnétique, qui s'écrivent alors sous la forme:

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = B_o e^{j(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \varphi_m)} \quad \vec{\mathbf{e}}_b = \vec{\mathbf{B}}_o e^{j(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \varphi_m)}$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = E_o e^{j(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \varphi_e)} \quad \vec{\mathbf{e}}_e = \vec{\mathbf{E}}_o e^{j(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \varphi_e)}$$

Calculons les deux membres de l'équation de Maxwell-Faraday (3) à partir de ces expressions.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{E}} = - \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial E_z / \partial y - \partial E_y / \partial z \\ \partial E_x / \partial z - \partial E_z / \partial x \\ \partial E_y / \partial x - \partial E_x / \partial y \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (E_o e^{j(\omega t - [k_x x + k_y y + k_z z] + \varphi_e)}) = -j k_y E_z$$

6.4 Ondes électromagnétiques.

De même, pour tout couple (α, β) $\frac{\partial E_\alpha}{\partial \beta} = -j k_\beta E_\alpha$ et :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j \begin{pmatrix} k_y E_z - k_z E_y \\ k_z E_x - k_x E_z \\ k_x E_y - k_y E_x \end{pmatrix} = -j \vec{k} \wedge \vec{E}$$

D'autre part, on a pour la dérivée par rapport au temps du champ magnétique:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega \vec{B}$$

On en déduit donc, la relation suivante pour la propagation des champs électrique et magnétique *dans le vide*:

$$\vec{B} = (\vec{k}/\omega) \wedge \vec{E}$$

$$c\vec{B} = \vec{u}_k \wedge \vec{E}$$

$$|\vec{k}/\omega| = 1/c$$

$\vec{u}_k \equiv$ vecteur unitaire dans la direction de propagation

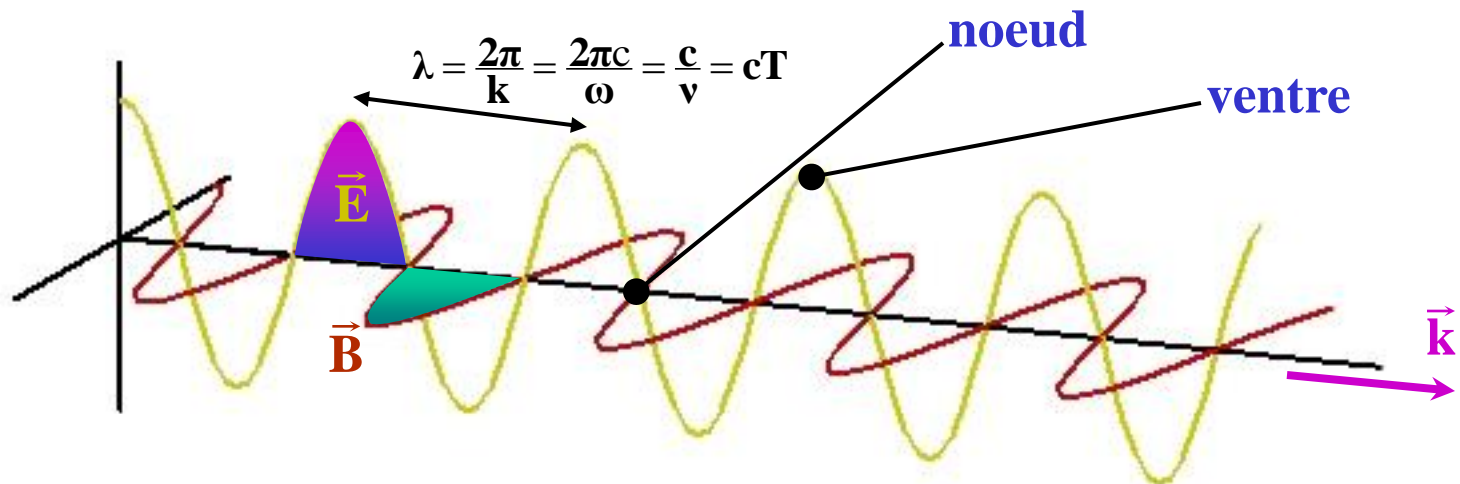
Le champ magnétique se propage perpendiculairement au champ électrique et à la direction de propagation (dans le vide).

6.4 Ondes électromagnétiques.

Par analogie, on trouve le même type de relations à partir de l'équation de Maxwell-Ampère (4) :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \quad \begin{matrix} \nearrow \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{B}} = -j \vec{\mathbf{k}} \wedge \vec{\mathbf{B}} \\ \searrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{j\omega}{c^2} \vec{\mathbf{E}} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \quad \boxed{\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{u}}_k \wedge c \vec{\mathbf{B}}}$$

Le champ électrique se propage perpendiculairement au champ magnétique et à la direction de propagation.



En tout point **le rapport des modules** $|\vec{\mathbf{E}}| / |\vec{\mathbf{B}}|$ dans le vide est constant et égal à la **vitesse de la lumière c**.

6.5 Energie transportée par une onde électromagnétique.

En électrostatique et magnétostatique, nous avons montré qu'on pouvait associer localement dans le vide des densités d'énergie potentielle (i.e. « récupérable » par une charge test au point considéré sous forme de travail de la force de Lorentz):

- **Energie électrostatique :** $\frac{dW_e}{d^3r} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2$
- **Energie magnétostatique :** $\frac{dW_m}{d^3r} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2$

Nous allons montrer que la puissance par unité de volume dissipée localement par une onde électromagnétique dans le vide est donnée par la divergence du *vecteur de Poynting* :

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathbf{E}} \wedge \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) = \vec{\mathbf{B}} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{E}}) - \vec{\mathbf{E}} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{B}})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) = \vec{\mathbf{B}} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \right) - \vec{\mathbf{E}} \cdot \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \epsilon_0 \mu_0 \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}})$$

6.5 Energie transportée par une onde électromagnétique.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{S}} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\mathbf{E}} \wedge \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu_0} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 \right)$$

La divergence du *vecteur de Poynting* est donc égale à l'opposé du taux de variation de la densité locale d'énergie électromagnétique.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{S}} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dW_{\text{em}}}{d^3r} \right)$$

En utilisant le théorème de la divergence, on trouve que la puissance dissipée à travers une surface est donnée par l'opposé du flux du vecteur de Poynting:

$$- \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{S}} \, d^3r = - \int_S \vec{\mathcal{S}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dW_{\text{em}}}{d^3r} \right) d^3r = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V dW_{\text{em}} \right) = \frac{\partial W_{\text{em}}^S}{\partial t} = \mathcal{P}_{\text{em}}$$

Puissance rayonnée à travers la surface

Permittivité équivalente d'un milieu

Pour l'étude de phénomènes de propagation des ondes électromagnétiques, un milieu sera défini par :

Sa permittivité électrique complexe

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad (\text{F/m})$$

Sa perméabilité magnétique complexe

$$\underline{\mu} = \mu' - j\mu''$$

Sa conductivité σ (S/m) pertes ohmiques

Permittivité équivalente d'un milieu

- *Milieu sans perte* ($\sigma = 0$ et ε réel)

$$\vec{\text{rot}}(\vec{H}) = j\omega\varepsilon\vec{E}$$

- *Milieu avec pertes conductrices* (σ fini et ε réel)

$$\vec{\text{rot}}(\vec{H}) = \sigma\vec{E} + j\omega\varepsilon\vec{E} = j\omega\varepsilon_e\vec{E}$$

avec $\varepsilon_e = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$

Permittivité équivalente d'un milieu

$\underline{\varepsilon}_e$ est la permittivité équivalente ; elle peut s'écrire également sous la forme :

$$\underline{\varepsilon}_e = \sqrt{\varepsilon^2 + (\sigma / \omega)^2} \exp(-j\delta)$$

avec :

$$\delta = \arctg\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

δ est l'angle de pertes du diélectrique

$$\operatorname{tg}(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$$

$\operatorname{tg} \delta$ est le facteur de pertes du diélectrique

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} &= 0 \\ \bar{\nabla}^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} &= 0\end{aligned}$$

Dans un milieu dissipatif ε est complexe est donc k est complexe. Ceci traduit l'atténuation d'une onde à mesure qu'elle se propage

Considérons que k est complexe et le remplaçons par γ ; si on exprime γ par $\underline{\varepsilon}_e = \varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega}$. On obtiendra

$$\gamma^2 = +j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)$$

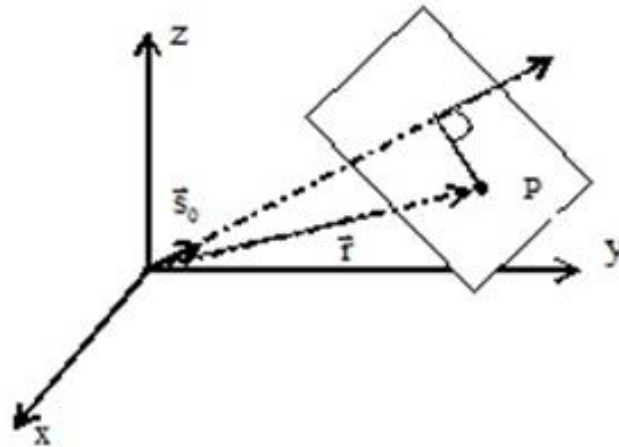
$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} + 1 \right)}$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1 \right)}$$

α : facteur d'atténuation
 β : constante de phase

Ondes planes, Impédance Caractéristique



$$\vec{H}(z, t) = H_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{a}_x \quad \text{et} \quad \vec{E}(z, t) = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{a}_y$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -(\sigma + j\omega\epsilon) E_x$$

Sachant que : $H_y = H_0 \cdot e^{-\gamma z} \cdot e^{j\omega t}$ et $E_x = E_0 \cdot e^{-\gamma z} \cdot e^{j\omega t}$

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\gamma}{\sigma + j\omega\epsilon}$$

$$\gamma = +\sqrt{j\omega\mu} \sqrt{j\omega\epsilon + \sigma}$$

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \eta \quad [\Omega]$$

Impédance caractéristique

- ▼ Le rapport $\|\vec{E}\|/\|\vec{H}\|$ (ou E/H) est constant :

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\hat{k} \wedge \vec{E}}{Z}} \xrightarrow{\vec{E} \perp \vec{k}} H = \frac{1}{Z} E$$

- ▼ Impédance caractéristique du milieu :

$$\boxed{\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \eta \quad [\Omega]}$$

$$Z \triangleq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} Z_0 \quad (\Omega)$$

- ▼ Dans le vide (ou l'air) :

$$Z_0 \triangleq \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

- ▼ Milieux sans pertes (Z réel) :
(23) valide en temporel **et** en harmonique ;
Milieux avec pertes (\tilde{Z} complexe) :
(23) valide **seulement** en harmonique

Onde plane, progressive, monochromatique vers $+z$

- ▼ TD 1.1 et 1.2 : OPPM, la plus simple solution de (14)

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \underbrace{\vec{E}_0}_{\text{cste}} \cos(\omega t - kz) = \vec{\mathcal{E}}(z, t) \perp \hat{e}_z \quad (18)$$

issue d'une perturbation initiale harmonique (à $z = 0$) :

$$\propto \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \cos(\omega t)$$

se propageant selon $+\hat{e}_z : t \rightarrow t - \frac{z}{v}$

$$\propto \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}z\right) = \cos(\omega t - kz)$$

- ▼ $\lambda = vT$: longueur d'onde, la période spatiale (en m)
- ▼ $k = 2\pi/\lambda$: nombre d'onde (en rad m^{-1})
- ▼ $\vec{k} = k\hat{k} = k(+\hat{e}_z)$: vecteur d'onde
- ▼ $\phi(z, t) = \omega t - kz$: la phase de l'onde
- ▼ $v_\phi = \omega/k$: la vitesse de phase (dz/dt à $\phi(z, t) = \text{cste}$)

II- NOTION D'ONDE PLANE

II.1 - Onde sphérique.

Quand **une vibration** se propage dans l'espace, elle se fait sous la forme d'**une onde**.

Si le phénomène est **sinusoïdal** en fonction du temps, l'amplitude de la vibration peut s'écrire sous la forme:

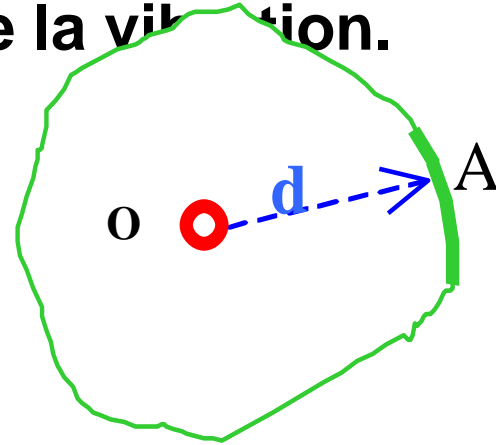
$$A(t) = A_o e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \text{ou} \quad A(t) = A_o \sin(\omega t + \varphi)$$

avec: $\varphi = \beta d = \frac{2\pi}{\lambda} d$

où φ représente le déphasage crée par le déplacement de la perturbation le long de **d** (du point O au point A).

Le lieu des points pour lesquels la vibration présente **la même phase** constitue **la surface équiphas** de l'onde ou, encore, **un front d'onde**.

Si un ébranlement ou une perturbation se produit en un point "A" dans **un milieu homogène et isotrope** à trois dimensions, le front d'onde sera alors une sphère centrée sur l'origine "O" de la vibration.



Ce point d'excitation est appelé centre de phase.

En un point quelconque d'un front d'onde situé à une distance (**d**), l'amplitude de la vibration sera donnée par :

$$A(t) = A_0 e^{-j \frac{2\pi d}{\lambda}} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

II.2 - Onde plane.

Si l'on considère une surface de **dimensions réduites** découpée dans un front d'onde sphérique à une **très grande distance** du centre de phase, cette surface peut-être assimilée à **un plan**.

Par définition, **une onde plane** est donc une onde dont **le front d'onde est un plan**.

III- VITESSE DE PHASE ET VITESSE DE GROUPE.

III.1 - Vitesse de phase.

On appellera vitesse de phase v_φ , de l'onde, la vitesse d'un observateur qui, se déplaçant selon la direction de propagation, verrait **la phase de l'onde inchangée**.

C'est aussi la vitesse d'un observateur qui suivrait un zéro de champ. ω

Une onde de pulsation se propageant dans **un milieu isotrope** produit à une distance (**d**) de la source un champ donné par:

$$E = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{d}{v} \right) \quad \varphi = \omega \frac{d}{v} = \beta d = \frac{2\pi}{\lambda} d = \frac{2\pi f}{v} d$$

- φ correspond au déphasage le long du parcours.
- β [rad/m] est la constante d'onde ou le déphasage linéique.

La vitesse de phase sera alors définie par $v_\varphi = \frac{\lambda}{2\pi} \omega$
ou

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} \quad \frac{[rad / s]}{[rad / m]} \quad \text{[m/s]}$$

Remarque:

- v_φ peut être supérieure à "c" (cas d'un **plasma sans collisions** par exple.) ; la phase étant une notion abstraite ne correspondant à aucun transport d'énergie.

III.2 - Vitesse de groupe.

Quand une onde de fréquence ω_0 transportant une information se propage dans l'espace, c'est, en réalité, toute **une bande** comprise entre ω_1 et ω_2 et centrée sur ω_0 qui est occupée par le signal à transmettre.

Si tout le groupe de fréquences se propageait avec la même vitesse; le temps de propagation τ_g de l'ensemble du **spectre** sera évidemment $\tau_g = \frac{d}{v}$

mais l'espace libre étant un milieu plus ou moins **dispersif**; chaque fréquence se propagera avec une vitesse qui lui est propre $V = f(\omega)$

Sachant que $\varphi = \omega t$; ie $t = \frac{\varphi}{\omega}$

**le temps de propagation du groupe de fréquence
situé autour de ω_0 sera :** $\Delta t = \tau_g = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}$

or: , $\varphi = \beta d = \frac{\omega d}{v}$

donc:

$$\tau_g = \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\omega d}{v} \right] = \frac{\partial \left(\frac{\omega}{v} \right)}{\partial \omega} d = \frac{\partial \beta}{\partial \omega} d$$

**On définit alors la vitesse de propagation de groupe
comme étant :**

$$v_g = \frac{d}{\tau_g} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \quad \text{[m/s].}$$

C'est la vitesse de propagation ou de déplacement d'une crête d'interférences d'ondes de fréquences voisines et se propageant dans un milieu dispersif.

C'est en général la vitesse de déplacement de l'énergie ou la vitesse de propagation de l'enveloppe du signal modulé.

Elle résulte de la superposition d'ondes de fréquences différentes mais voisines.

- - $v_g < c$ et souvent : $v_g \cdot v_\varphi = c^2$
- - Dans un milieu diélectrique homogène et isotrope (non dispersif) : $v_g = v_\varphi$:

6.6 Réflexion – Réfraction aux interfaces.

• Discontinuité du champ électrique aux interfaces :

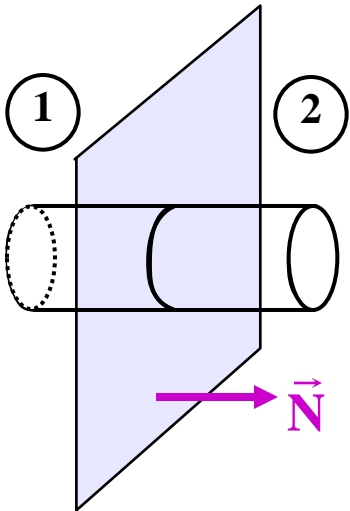
Revenons un peu en arrière et regardons ce qui se passe à une interface entre milieux isolants ou conducteurs parfaits (ie. dans lesquels aucune densité de charge n'existe en volume).

Comme nous nous intéressons à ce qui se passe à l'interface, nous pouvons donc considérer celle-ci comme un plan infini séparant deux milieux (1) et (2), qui peut être chargé avec une densité surfacique de charges σ . Nous pouvons appliquer le théorème de Gauss sur une petite surface cylindrique qui est coupée par le plan perpendiculairement au cylindre. *Nous pouvons rendre le cylindre aussi petit que*

l'on veut de sorte que le champ soit homogène sur toute la surface de part et d'autre du plan. Nous pouvons décomposer le champ en deux composantes, l'une normale au plan, l'autre tangentielle.

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_n + \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_t \approx (\vec{E}_{2n} - \vec{E}_{1n}) \times \vec{S}_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{S}_n$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{N} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



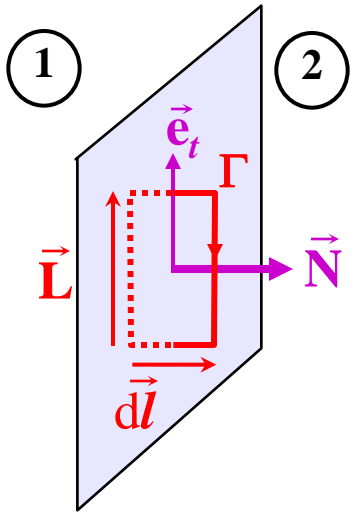
Une interface chargée superficiellement donne lieu à une discontinuité de la composante normale du champ électrique.

6.6 Réflexion – Réfraction aux interfaces.

• Discontinuité du champ électrique aux interfaces :

Considérons à présent la circulation du champ électrique le long du contour fermé Γ , que l'on peut également rendre aussi petit que l'on veut.

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = (\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{E}}_2) \cdot \vec{\mathbf{L}} = (\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{E}}_2) \cdot \vec{\mathbf{e}}_t$$



Appliquons ensuite le théorème de Stokes qui permet de passer d'une intégrale sur un contour fermé à une intégrale sur une surface s'appuyant sur ce contour:

$$\int (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{E}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{E}}) \cdot (\vec{\mathbf{L}} \wedge d\vec{\mathbf{l}})$$

$$\int (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{E}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_S (\vec{\mathbf{L}} \wedge \vec{\mathbf{E}}) \cdot (\vec{\nabla} \wedge d\vec{\mathbf{l}}) \xrightarrow{dl \rightarrow 0} 0$$

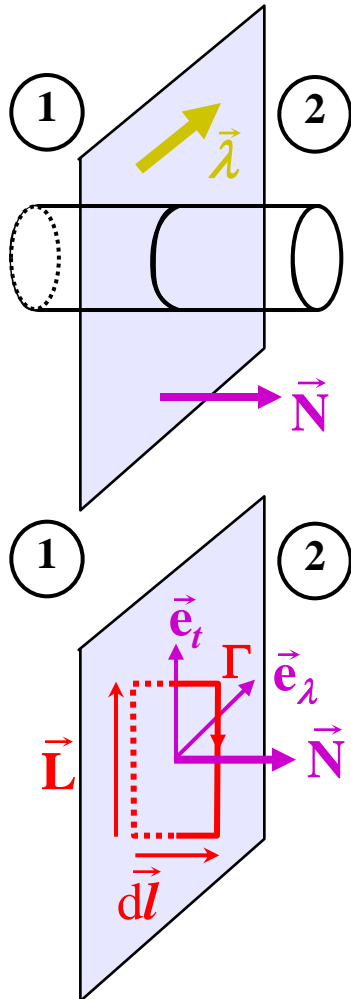
$$(\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{E}}_2) \cdot \vec{\mathbf{e}} = 0$$

*Une interface **même** chargée superficiellement **n'entraîne pas** de discontinuité de la composante **tangentielle** du champ électrique.*

6.6 Réflexion – Réfraction aux interfaces.

• Discontinuité du champ magnétique aux interfaces :

Nous pouvons appliquer les mêmes considérations au champ magnétique en considérant que le plan est parcouru par une densité de courant $\vec{\lambda}$.



- en calculant le *flux du champ magnétique* à travers une petite surface cylindrique fermée perpendiculaire au plan.

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot d\vec{S}$$

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} d^3r = 0$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{N} = 0$$

une interface parcourue par une densité de courant superficielle ne donne pas lieu à une discontinuité de la composante normale du champ magnétique.

- en utilisant le *théorème d'Ampère* sur le contour Γ

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{L} = (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot L\vec{e}_t$$

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{e}_t = \mu_0 \lambda$$

une interface parcourue par une densité de courant superficielle entraîne une discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique.

6.6 Réflexion – Réfraction aux interfaces.

- **Discontinuité du champ magnétique aux interfaces :**

Pour la discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique, puisque la composante normale est continue on peut mettre la dernière équation trouvée sous la forme:

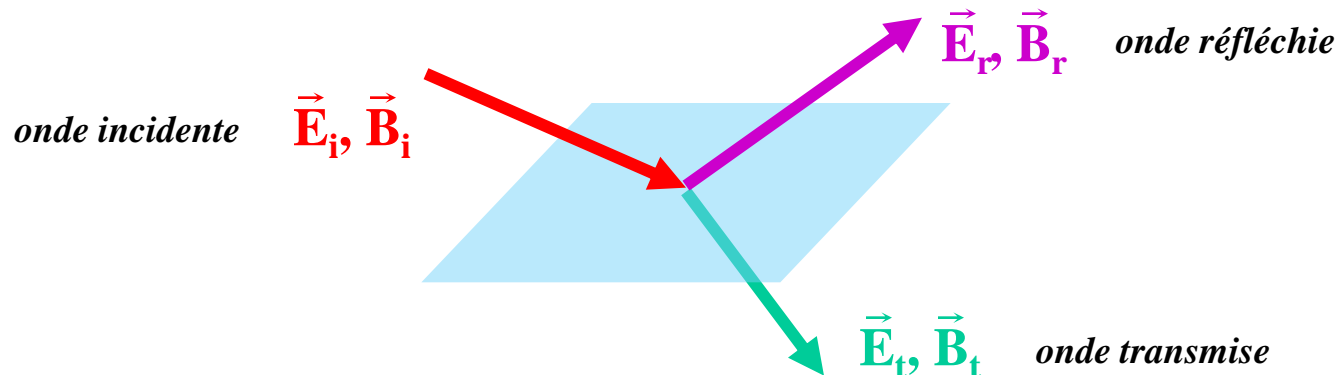
$$\vec{\mathbf{B}}_1 - \vec{\mathbf{B}}_2 = \vec{\mathbf{N}} \wedge \mu_0 \vec{\lambda}$$



La normale est dirigée du milieu (1) vers le milieu (2).

- **Réflexion - Réfraction :**

Lorsqu'une onde *incidente* rencontre une interface (changement de milieu (1) vers (2)), on observe qu'une partie de l'onde est *réfléchi*e (miroir) et une autre partie est *transmise* à travers l'interface en étant plus ou moins déviée. On parle dans ce dernier cas de *réfraction*.



6.6 Réflexion – Réfraction aux interfaces.

• Réflexion - Réfraction :

Il y a donc 4 inconnues vectorielles qu'il faut trouver en utilisant les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday dans les milieux « homogènes » (1) et (2) , et les conditions de continuité à l'interface.

Dans le vide la vitesse de phase d'une onde plane est la vitesse de la lumière c . Par contre dans la matière, cette vitesse est plus lente. On sait que dans le vide la vitesse de la lumière c est liée aux constantes ϵ_0 et μ_0 par la relation:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Dans la matière la permittivité du vide ϵ_0 est remplacée par la permittivité du milieu $\epsilon_r \epsilon_0$ et la perméabilité magnétique μ_0 par $\mu = \mu_r \mu_0$. On en déduit donc intuitivement que la vitesse de phase d'une onde plane électromagnétique dans la matière est du type :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} c$$

*Cette relation est vraie s'il n'y a pas d'absorption. Le rapport c/v n'est autre que **l'indice de réfraction n** du milieu matériel (que l'on utilise dans les **lois de Snell-Descartes** en optique géométrique). Dans beaucoup de matériaux la perméabilité relative μ_r est très proche de 1 et la **constante diélectrique** d'un matériaux correspond donc approximativement au **carré de l'indice de réfraction** (si on néglige l'absorption): $n = c/v \sim \epsilon_r^{1/2}$.*

6.6 Réflexion – Réfraction aux interfaces.

• Réflexion - Réfraction : conditions générales

D'autre part, une onde électromagnétique est générée par des sources de charges électriques, dipôles électriques, dipôles magnétiques oscillant à une fréquence, ou pulsation, donnée. Cela correspond donc à un système d'oscillations forcées pour lequel la pulsation est imposée par le générateur. *Les pulsations des ondes électromagnétiques incidente, réfléchie et transmise sont donc toutes les mêmes.*

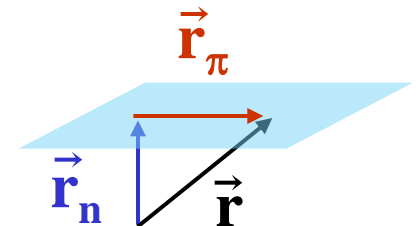
Les ondes incidente, réfléchie et transmise sont donc du type:

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= \vec{E}_{oi} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} & \vec{B}_i &= \vec{B}_{oi} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \\ \vec{E}_r &= \vec{E}_{or} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} & \vec{B}_r &= \vec{B}_{or} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \\ \vec{E}_t &= \vec{E}_{ot} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} & \vec{B}_t &= \vec{B}_{ot} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}\end{aligned}$$

Les relations liant, en un point de l'interface, ces différents vecteurs ne doivent pas dépendre de la position choisie dans le plan (π) de l'interface. Faisons apparaître la composante \vec{r}_π du vecteur position $\vec{r} = \vec{r}_\pi + \vec{r}_n$ qui est dans le plan π .

Nous pouvons mettre les vecteurs ci dessus sous la forme:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{oi} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_n} e^{j\omega t} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_\pi} = \vec{E}_{oi}^* e^{j\omega t} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_\pi}$$



6.6 Réflexion – Réfraction aux interfaces.

• Réflexion - Réfraction : conditions générales

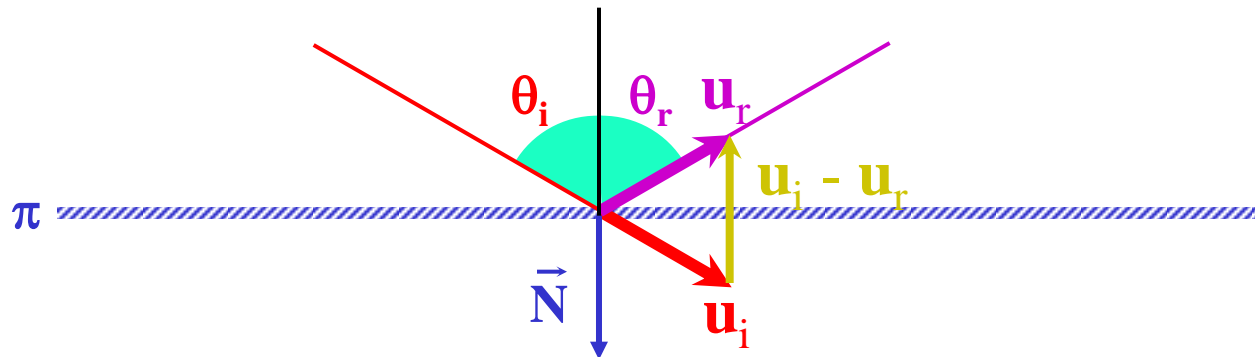
Ecrire que les relations liant ces différents vecteurs en un point de l'interface ne dépendent pas de la position choisie dans le plan de l'interface revient donc à écrire l'équation suivante :

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r}_\pi = \vec{k}_r \cdot \vec{r}_\pi = \vec{k}_t \cdot \vec{r}_\pi$$

De la première équation ci-dessus on tire : $(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_\pi = 0$

En notant que $|\vec{k}_i| = v_i / \omega$ où v_i est la vitesse de phase de l'onde incidente et en appelant \vec{u}_i le vecteur unitaire dans la direction de \vec{k}_i , cela revient à dire que :

Le vecteur $\vec{u}_i - \vec{u}_r$ est perpendiculaire à l'interface et donc les angles que font les rayons incidents (vecteur d'onde incident) et réfléchis avec la normale \vec{N} au plan sont égaux. On retrouve la **loi de la réflexion**.



Les vecteurs \vec{u}_i , \vec{u}_r et \vec{N} définissent le **plan d'incidence**.

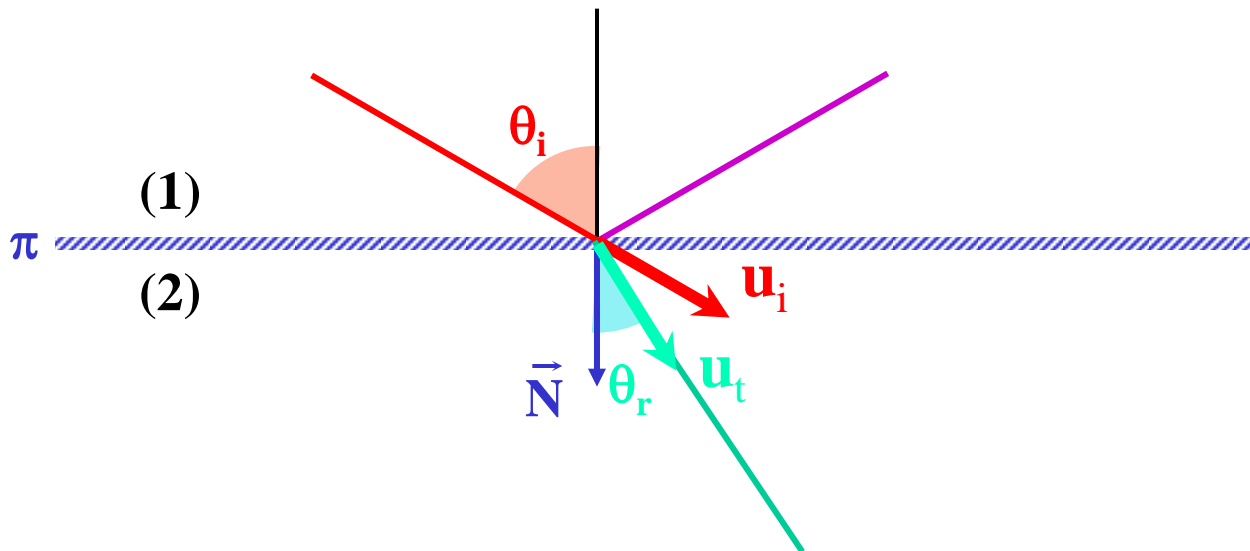
6.6 Réflexion – Réfraction aux interfaces.

• Réflexion - Réfraction : conditions générales

Pour interpréter la deuxième partie de l'équation d'invariance le long de l'interface, introduisons les indices de réfraction n_1 et n_2 des milieux (1) et (2).

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r}_\pi = \vec{k}_r \cdot \vec{r}_\pi \longrightarrow n_1 \vec{u}_i \cdot \vec{r}_\pi = n_2 \vec{u}_t \cdot \vec{r}_\pi \longrightarrow \boxed{n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_r)}$$

On retrouve la loi de réfraction de Snell-Descartes.



6.6 Réflexion – Réfraction aux interfaces.

• Réflexion - Réfraction : conditions générales

Enfin il reste à écrire les conditions de continuité à l'interface pour les amplitudes des composantes normales et tangentielles des champs électrique et magnétique en présence d'éventuelles densités superficielles de charge ou de courant:

$$E_{2n} = E_{1n} + \frac{\sigma_s}{\epsilon_0}$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

$$B_{2n} = B_{1n}$$

$$B_{2t} = B_{1t} - \mu_0 \lambda_s$$

$$E_{1n} = E_{ion} + E_{ron}$$

$$E_{1t} = E_{iot} + E_{rot}$$

$$B_{1n} = B_{ion} + B_{ron}$$

$$B_{1t} = B_{iot} + B_{rot}$$

$$E_{2n} = E_{ton}$$

$$E_{2t} = E_{tot}$$

$$B_{2n} = B_{ton}$$

$$B_{2t} = B_{tot}$$

Certaines contraintes supplémentaires viennent de la nature des matériaux. Par exemple dans un conducteur parfait $\mathbf{E}=0$. Dans un matériaux diamagnétique la susceptibilité magnétique χ est égale à -1 et $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} = \mathbf{0} \dots$