Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences de Kénitra
Département de Physique
DESA- SCTI

Année Universitaire 2005-2006

Travaux Dirigés : Correction de la série no. 3
(Traitement du Signal)

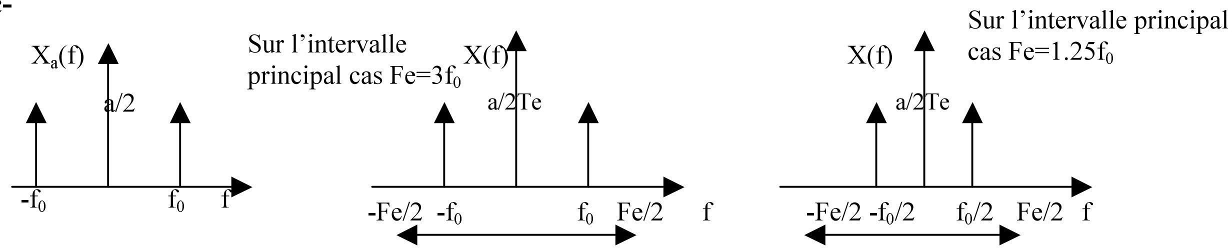
Exercice 1 :

a- $Fe \geq 2f_0$

b- $X(f)=a.[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]/2]*(1/T_e)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-n/Te)=\frac{a}{2Te}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-f_0-n/Te)+\frac{a}{2Te}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f+f_0-n/Te)$

ou encore $X(f)=(1/T_e)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_a(f-n/Te)$ (avec $X_a(f)=a.[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]/2]$

c-



Pour le cas $Fe=3f_0$, l'intervalle principal est $[-1.5f_0,1.5f_0]$
Pour le cas $Fe=1.5f_0$, l'intervalle principal est $[-0.75f_0,0.75f_0]$
d- le filtre cardinal utilisé a pour réponse impulsionnelle $h(t)=sinc(t.F_e)$,

d'où $y(t)=xe(t)*h(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kTe)sinc[(t-kTe)Fe]$.

C'est une opération d'interpolation.
Ce filtre est irréalisable car h(t) est non nulle pour t<0, en plus elle est à durée infinie.
Dans les deux cas $Fe=3f_0$ et $Fe=1.25f_0$, on obtient respectivement en sortie :
$y(t)=a.\cos(2\pi f_0 t)=x_a(t)$ et $y(t)=a.\cos(2\pi(0.25).f_0 t) \neq x_a(t)$
e- $y(t)=a.\cos(2\pi(0.5).f_0 t)+b.\cos(2\pi f_0 t)$,

Exercice 2 :

- $N=2T.F_{max}$
- fréquences de Nyquist

a- $x(t)=5\cos(1000\pi t)\cos(4000\pi t)=2.5[\cos(2x1500\pi t)+\cos(2 \text{ x } 2500\pi t)]$,d'où Fe=5000Hz)

b- $x(t)=\frac{\sin(200\pi t)}{\pi t}$ → $X(f)=(1/200)rect_{200}(f)$, d'où Fe=200Hz)

Exercice 3 :

a- $X(f)=1$

b- $X(f)=\exp(-2j\pi f.k_0)$

c- $X(f)=\sum_{k=0}^{N-1}\exp(-2j\pi fk)=\sum_{k=0}^{N-1}[\exp(-2j\pi f)]^k=\frac{1-b^N}{1-b}$ $(b=\exp(-2j\pi f))$

$\Rightarrow X(f)= \frac{1-b^N}{1-b}\,\frac{b^{-N/2}.b^{N/2}}{b^{-1/2}b^{1/2}} = \frac{\sin(\pi fN)}{\sin(\pi f)}\exp[-j\pi f(N-1)]$

d- $X(f)=2\exp(-3j\pi f)\cos(3\pi f)$,

e- $X(f)=\sum_{k=0}^{N-1} a^k \exp(-2j\pi fk) = \sum_{k=0}^{N-1}[a.\exp(-2j\pi fk)]^k = \frac{1-a_a^N\exp(-2j\pi fN)}{1-a.\exp(-2j\pi f)}$

$X(n)=TFD(a^k)= \frac{1-a^N}{1-a.\cos(2\pi n/N)+j.a.\sin(2\pi n/N)}$ $\Rightarrow |X(n)|=\frac{1-a_a^N}{\sqrt{1+a_a^2-2a.\cos(2\pi n/N)}}$,

$\varphi(n)=\arg[X(n)]=\mathrm{arctg}\left[\frac{a.\sin(2\pi n/N)}{a.\cos(2\pi n/N)-1}\right]$

f- On sait qu'à $x_a(t)= \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t}$ lui correspond $X_a(f)=rect_{2fc}(f)$
et puisque Te=1=1/Fe -> Fe=1, théorème Shannon satisfait $\Rightarrow$ $X(f)=X_a(f)/Te=X_a(f)$ sur l'intervalle principal [-1/2,1/2]
Donc $X(f)=TFN[\frac{\sin(2\pi f_c k)}{\pi k}]=rect_{2fc}(f) = rect_{1/2}(f)$

g- $W(f)= \frac{2}{N}\,TFN[rect_{N/2}(k)].TFN[rect_{N/2}(k)]=\frac{2}{N}\left(\frac{\sin(\pi fN/2)}{\sin(\pi f)}\right)^2$ (utiliser c- et propriété décalage)

Exercice 4 :

a- $X(f)= \frac{\sin(\pi fN)}{\sin(\pi f)} * [\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]/2$ $\Rightarrow X(f)=\frac{\sin[\pi(f-f_0)N]}{2\sin[\pi(f-f_0)]}+\frac{\sin[\pi(f+f_0)N]}{2\sin[\pi(f+f_0)]}$,

$X(n)=\frac{\sin[\pi(\frac{n}{N}-f_0)N]}{2\sin[\pi(\frac{n}{N}-f_0)]}+\frac{\sin[\pi(\frac{n}{N}+f_0)N]}{2\sin[\pi(\frac{n}{N}+f_0)]}$

b- Si $\exists\ n_0\in Z/\ f_0= n_0/N$ alors $X(n)=\begin{cases} N & \text{si } n=n_0 \text{ modulo } N \\ 0 & \text{si } n\neq n_0 \text{ modulo } N\end{cases}$, X(n) permettra de cerner exactement la raie correspondante à la fréquence f_0

c- Si n'est pas un multiple de /N alors $\exists\ n_0\in Z/\ \ n_0/N < f_0 < (n_0+1)/N$. Dans ce cas, $X(n)\neq 0$ $\forall\, n\in\{0,\ldots,N-1\}$, elle prend des valeurs non nulles avec des valeurs prépondérantes pour les fréquences n_0/N et $(n_0+1)/N$ encadrant f_0. Ce phénomène de dispersion (ou de distribution) est appelé leakage. Pour bien estimer f_0, il faut donc choisir N très grand.

d- $\Delta f=10^4/1024 \cong 10$ Hz

Exercice 5 :

-Signal (a) $\Rightarrow$ $x_a(t)=x(t).\sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect_\tau(t-kTe) = x(t).\left[rect_\tau(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kTe)\right]$

d'où $X_a(f)=X(f)*\left[\tau\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}\frac{1}{Te}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kTe)\right]=$

$X(f)*\left[\frac{\tau}{Te}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\pi F_e k\tau)}{\pi F_e k\tau}\delta(t-kTe)\right]=\frac{\tau}{Te}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\pi F_e k\tau)}{\pi F_e k\tau}X(f-\frac{k}{Te})$

-Signal (b) $\Rightarrow$ $x_\tau(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT_e)rect_\tau(t-kTe) = rect_\tau(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT_e)\delta(t-kTe)$

d'où $X\,(f)=\frac{\tau}{Te}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(f-\frac{k}{Te})\right]\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$

-Signal (c) $\Rightarrow$ $\tau=T_e$ d'où $X_\tau(f)=\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(f-\frac{k}{Te})\right]\frac{\sin(\pi fT_e)}{\pi fT_e}$