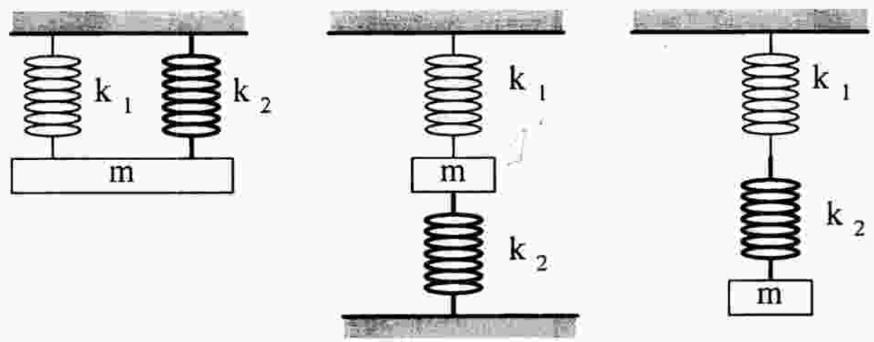
OSCILLATIONS LIBRES DE SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

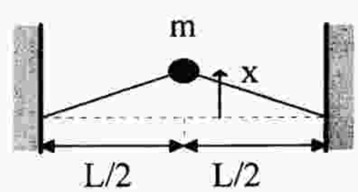
Exercice 1: Association de ressorts

Calculer la fréquence des oscillations pour chacun des systèmes suivants:



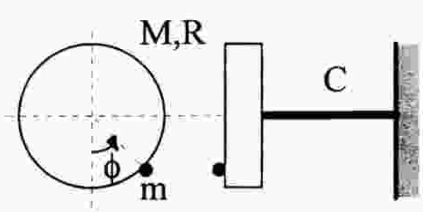
Exercice 2: Corde plombée

Une masse ponctuelle m glisse sans frottement sur une table horizontale. Elle est fixée à deux bâtis fixes par deux cordes de masse négligeable tendues horizontalement. En supposant que la tension T des cordes reste constante lors du mouvement, calculer la période des oscillations pour de faibles amplitudes du mouvement dans la direction x.



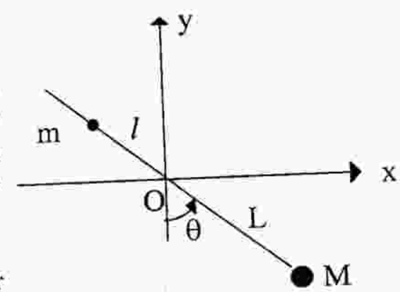
Exercice 3 : Pendule de torsion

Une tige d'acier de constante de torsion C est soudée par son extrémité au centre d'un disque homogène de masse M et de rayon R. L'autre extrémité est encastrée dans un bâti fixe. Une masse m est soudée au point le plus bas du disque. On tourne le disque d'un angle ϕ_0 et on le lâche sans vitesse initiale. Déterminer l'expression en fonction du temps de l'angle $\phi(t)$ d'écart du système par rapport à sa position d'équilibre. On néglige la flexion de la tige d'acier.



Exercice 4 : Métronome

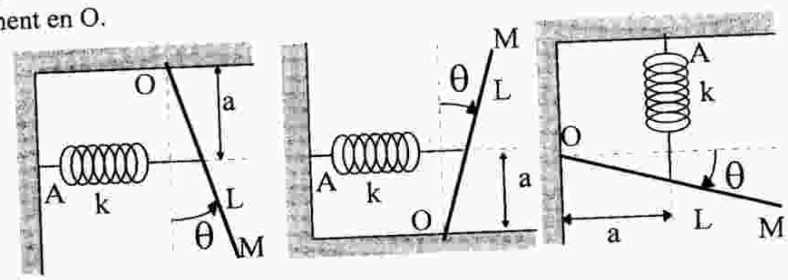
Un métronome est schématisé sur la figure ci-contre. La masse M est soudée à l'extrémité de la tige. La position de la masse m sur la tige peut être réglée. La tige est supposée de masse négligeable; elle est mobile sans frottements autour de O. La masse M étant en bas, on l'écarte d'un angle θ_0 petit et on l'abandonne sans vitesse initiale.



1) Quelle(s) condition(s) doit satisfaire le système pour qu'il puisse osciller ?
2) Déterminer l'expression de la période pour des oscillations de faibles amplitudes.
3) A.N.: Sachant que M= 80g, m = 20g et L=4cm, déterminer la distance l pour que la période du métronome soit égale à 2 s.
4) On veut augmenter la période d'oscillation du métronome. Faut-il rapprocher ou éloigner la masse m du point O ?

Exercice 5 :

Dans les figures ci-dessous, une tige homogène de masse M et de longueur L oscille sans frottement, dans un plan vertical, autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du mouvement en O.

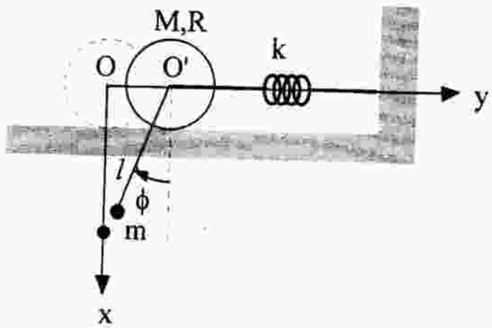


(a) (b) (c)

1) Quelle est la déformation du ressort à l'équilibre, sachant qu'à cette position θ=0?
2) Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des mouvements de faibles amplitudes.
3) A quelle condition le système de la figure (b) peut-il osciller? Quelle est la nature du mouvement lorsque cette condition n'est pas satisfaite?
4) Expliquer pourquoi la période des oscillations est indépendante de g dans le cas de la figure (c).
5) Calculer l'effort appliqué sur le mur au point A.

Exercice 6 :

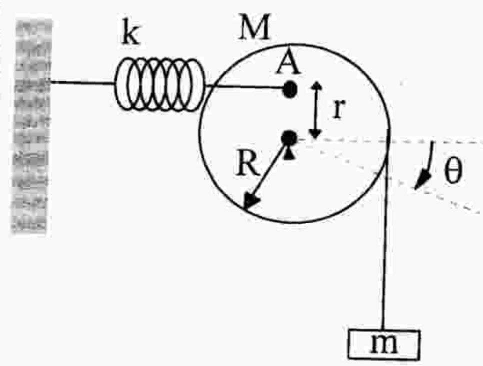
On considère le dispositif schématisé sur la figure ci-contre. Un disque homogène de masse M et de rayon R est attaché par son axe à l'extrémité d'un ressort de raideur k. Une tige rigide, de longueur l, de masse négligeable, est solidaire du disque qui peut rouler sans glisser sur un plan horizontal.



Déterminer la pulsation propre du système. Sachant qu'à t=0, la tige est écartée d'un angle petit ϕ_0 par rapport à la verticale et lâchée sans vitesse initiale, déterminer l'expression de $\phi(t)$. Donner l'expression de la vitesse de la masse m quand la tige passe par la verticale.

Exercice 7:

Dans le système ci-contre, la corde roule sans glisser autour du cylindre de masse M=5kg et de rayon R=40cm, qui tourne autour de son axe fixe. Elle porte à son extrémité une masse m=1kg. Un ressort de raideur k = 600 N/m, fixé à un bâti fixe, est accroché au point A distant de r=20cm de l'axe du cylindre.



1) Sachant qu'à l'équilibre $\theta = 0$ et dans l'hypothèse des oscillations de faible amplitude, établir l'équation différentielle du mouvement. Donner l'expression de θ en fonction du temps pour les conditions initiales suivantes :

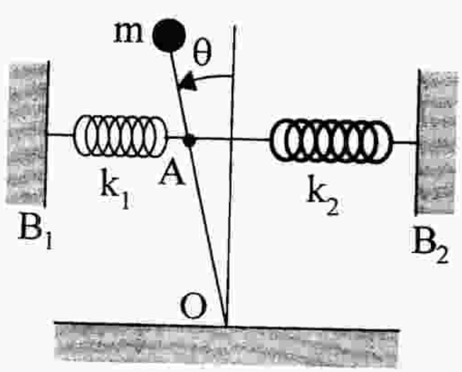
$\theta(t=0) = 5°$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

2) Au bout de cinq périodes d'oscillation, la masse m se décroche; quelle est la nature du mouvement à partir de cet instant? Autour de quelle position se font les oscillations? Calculer la nouvelle période du mouvement et l'amplitude des oscillations.

3) Tracer le graphe représentant les variations de θ en fonction du temps pour $0<t<10s$.

Exercice 8 :

Soit une masse m fixée à l'extrémité d'une tige de masse négligeable et de longueur l. La tige effectue des oscillations de faibles amplitudes autour d'un axe fixe passant par le point O et perpendiculaire au plan du mouvement. Le point A de la tige, tel que OA=a, est relié à deux bâtis fixes B_1 et B_2 respectivement par deux ressorts de raideur k_1 et k_2. A l'équilibre, la tige est verticale.



a) Sachant qu'à l'équilibre, les ressorts ne sont pas déformés, établir l'équation différentielle du mouvement du système.

b) Si m, k_1 , k_2 et l sont donnés, quelle condition doit satisfaire la longueur a pour que le système puisse osciller?

c) Cette condition étant satisfaite, déterminer l'expression de la pulsation propre du système.

Oscillations libres des Systèmes à un degré de Liberté

Exercice 1

On calcule la fréquence

a-

$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$U = U_K = \frac{1}{2} K_1 x^2 + \frac{1}{2} K_2 x^2$

$U_m - mgx = 0$ ds

L'équation de Lagrange

$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2}(K_1+K_2)x^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -(K_1+K_2)x$

$m\ddot{x} + (K_1+K_2)x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{(K_1+K_2)}{m}x = 0$

avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1+K_2}{m}} = 2\pi f$

$\Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_1+K_2}{m}}}$

b- On applique la loi de Newton.

On écarte m de $x>0$ et on lâche.

à l'équilibre :

$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$ donc

$K_1(l_1 - l_{01}) - K_2(l_2 - l_{02}) = mg$

m est en mouvement. $\sum \vec{F} = m\ddot{x}$

$\vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = m\ddot{x}$ on projecte

$-mg + K_1(l_1 - l_{01} - x) - K_2(l_2 - l_{02} + x) = m\ddot{x}$

$\Rightarrow -K_1 x - K_2 x = m\ddot{x}$

$\Rightarrow -x(K_1+K_2) = m\ddot{x}$

$\ddot{x} + \frac{(K_1+K_2)}{m}x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1+K_2}{m}}$

$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_1+K_2}{m}}}$

c-

à l'équilibre

$\begin{cases} mg = k_1 x_{01} \\ k_1 x_{01} = k_2 x_{02} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{01} = \frac{mg}{k_1} \\ x_{02} = \frac{mg}{k_2} \end{cases}$

déplacement de m est $x_0 = x_{01} + x_{02}$

donc : $x_0 = mg\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$

On écarte m de $x>0$ vers le haut

$-mg + k'(x + x_0) = m\ddot{x}$

$-k'x = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k'}{m}x = 0$

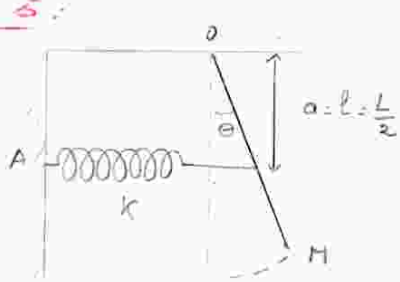
avec : $k' = \frac{k_1+k_2}{k_1 k_2}$

d'où : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m k_1 k_2}}$

donc $\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m k_1 k_2}}}$

Exercice 5 :

1er Cas



$J_{0/G} = \frac{ML^2}{12}$; $J = J_0 + Ma^2 \Rightarrow J = \frac{ML^2}{3}$

a : distance entre G et (Δ)

$T = \frac{1}{2} J \dot\theta^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3}\right)\dot\theta^2$

Une déformation θ_0 à l'équilibre

$U = U_K + U_m$

$U_K = \frac{1}{2} K \left[a\theta + \theta_0\right]^2 \Rightarrow U_K = \frac{1}{2} K a^2 (\theta+\theta_0)$

$\vec{P} = -\vec{grad}\, U \Leftrightarrow mg = -\frac{dU}{dy}$

$U_m = -mg \int_l^{l\cos(\theta+\theta_0)} dy$

Pour les petites oscillations

$\cos(\theta+\theta_0) = 1 - \frac{(\theta+\theta_0)^2}{2}$

$U_m = -mgl\left[1 - \frac{(\theta+\theta_0)^2}{2}\right] + mgl$

$U_m = mgl\,\frac{(\theta+\theta_0)^2}{2}$

$U = U_K + U_m \Rightarrow U = \left[\frac{1}{2}(Ka^2 + mgl)\right](\theta+\theta_0)^2$

à l'équilibre $\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0$

$\frac{\partial U}{\partial \theta} = (Ka^2 + mgl)(\theta+\theta_0)$

$(Ka^2 + mgl)\theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0$

donc : $\boxed{U = \frac{1}{2}(Ka^2 + mgl)\theta^2}$

$L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3}\right)\dot\theta^2 - \frac{1}{2}(Ka^2 + mgl)\theta^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \frac{ML^2}{3}\dot\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{ML^2}{3}\ddot\theta$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -(Ka^2 + mgl)\theta$

donc $\frac{ML^2}{3}\ddot\theta + (Ka^2 + mgl)\theta = 0$

$\ddot\theta + \underbrace{\left[\frac{3(Ka^2 + mgl)}{ML^2}\right]}_{\omega_0^2}\theta = 0$

$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

A et φ des constantes

On doit les trouver à partir des conditions initiales $\omega_0 = 2\pi f = 2\pi / T$

$F_K = Kx = K a \theta(t)$

2e Cas

$J = \frac{ML^2}{3}$, $T = \frac{1}{2} J \dot\theta^2$

$U = U_K + U_m$ et $U_K = \frac{1}{2} K a^2 (\theta+\theta_0)^2$

$-\vec{P} = -\vec{grad}\, U \Leftrightarrow mg = \frac{dU}{dy}$

$U_m = mg \int_l^{l\cos(\theta+\theta_0)} dy$

$U_m = -mgl\,\frac{(\theta+\theta_0)^2}{2}$

$U = \left[\frac{1}{2}(Ka^2 - mgl)\right](\theta+\theta_0)^2$

à l'équilibre $\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0$

$\frac{\partial U}{\partial \theta} = (Ka^2 - mgl)(\theta+\theta_0) \Rightarrow \theta_0 = 0$

$\boxed{U = \frac{1}{2}(Ka^2 - mgl)\theta^2}$

$L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3}\right)\dot\theta^2 - \frac{1}{2}(Ka^2 - mgl)\theta^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \frac{ML^2}{3}\dot\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{ML^2}{3}\ddot\theta$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -(Ka^2 - mgl)\theta$

donc : $\frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + (Ka^2 - mgl)\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\left[\frac{3(Ka^2 - mgl)}{ML^2}\right]}_{= \omega_0^2}\theta = 0$$

Condition de stabilité

$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} > 0 \Rightarrow Ka^2 - mgl > 0$

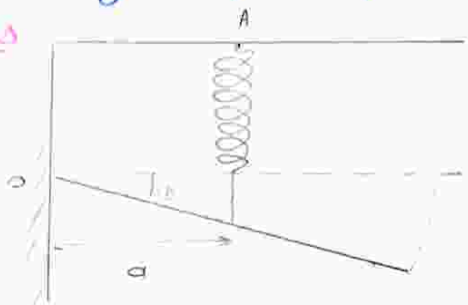
Condition d'oscillation : $\omega_0^2 > 0$

$Ka^2 > mgl$: régime oscillatoire $\omega_0^2 > 0$

$Ka^2 = mgl$: régime critique

$Ka^2 < mgl$: régime apériodique

3e Cas



$J = \frac{ML^2}{3}$; $T = \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3}\right)\dot{\theta}^2$

$U_K = \frac{1}{2}Ka^2(\theta + \theta_0)^2$

$U_m = -mg\int_0^{l\sin(\theta+\theta_0)} dy$

pour θ petit $\sin(\theta + \theta_0) \simeq \theta + \theta_0$

$U_m = -mg\frac{L}{2}(\theta + \theta_0)$

$U_T = \frac{1}{2}\left[Ka^2(\theta+\theta_0)^2 - mgL(\theta + \theta_0)\right]$

$= \frac{1}{2}Ka^2\theta^2 + Ka^2\theta\theta_0 + \frac{1}{2}Ka^2\theta_0^2$ cte

$- mgL\theta - mgL\theta_0$

$$\boxed{U_T = \frac{1}{2}Ka^2\theta^2 + (Ka^2\theta_0 - mgL)\theta + c^{te}}$$

$\frac{\partial U}{\partial \theta} = Ka^2\theta + (Ka^2\theta_0 - mgL)$

$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow Ka^2\theta_0 - mgL = 0$

condition d'équilibre

$U_T = \frac{1}{2}Ka^2\theta^2 + c^{te}$

avec $\theta_0 = \frac{mgL}{Ka^2}$

$L = T - U = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}Ka^2\theta^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = Ka^2\theta$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{ML^2}{3}\dot{\theta}$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta}$

donc :

$\frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + Ka^2\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{3Ka^2}{ML^2}\right)}_{\omega_0^2 =}\theta = 0$$

condition de stabilité

$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} > 0$ $\quad Ka^2 \; mgl > 0$

Exercice 6 :

$T = T_{disque\ M} + T_m$

$T_M = T_R + T_t$ / $T_R = \frac{1}{2} J \dot\varphi^2$

$T_t = \frac{1}{2} M \dot y^2$ avec $\dot y = R\dot\varphi$; $J = \frac{1}{2} M R^2$

donc $T_M = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} M R^2\right)\dot\varphi^2$

$T_m = ?$ $\quad \vec{om}_{(e)} \begin{cases} x = l\cos\varphi \\ y = -l\sin\varphi \end{cases}$

$\vec{Om} = \vec{OO'} + \vec{O'm}$

$\vec{OO'} \begin{cases} x = 0 \\ y = R\varphi \end{cases}$; $\vec{Om} \begin{cases} x = l\cos\varphi \\ y = R\varphi - l\sin\varphi \end{cases}$

$T_m = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot x^2 + \dot y^2)$

$\dot x = -l\sin\varphi \cdot \dot\varphi$

$\dot y = -l\cos\varphi \cdot \dot\varphi + R\dot\varphi$

$f'(\varphi) = \frac{\partial f(\varphi)}{\partial t} = \frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$

$\dot x^2 = l^2 \sin^2\varphi\ \dot\varphi^2$

$\dot y^2 = R^2\dot\varphi^2 + l^2\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2 - 2Rl\cos\varphi\cdot\dot\varphi^2$

$\dot x^2 + \dot y^2 = l^2\dot\varphi^2 + R^2\dot\varphi^2 - 2Rl\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\dot\varphi^2$

$= l^2\dot\varphi^2 + R^2\dot\varphi^2 - 2Rl\dot\varphi^2 + Rl\varphi^2\dot\varphi^2$

$\sin\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3}$, $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$

$\dot x^2 + \dot y^2 = l^2\dot\varphi^2 + R^2\dot\varphi^2 - 2Rl\dot\varphi^2$

$= (l^2 + R^2 - 2Rl)\dot\varphi^2$

$= (l - R)^2\dot\varphi^2$

$\dot x = l\varphi\dot\varphi \Rightarrow \dot x^2 = l^2\varphi^2\dot\varphi^2$

$\dot y = R\dot\varphi - l\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\dot\varphi = R\dot\varphi - l\dot\varphi - l\frac{\varphi^2}{2}\dot\varphi$

$= (R - l)\dot\varphi$

$\dot x^2 + \dot y^2 = (R - l)^2\dot\varphi^2$ donc $T_m = \frac{1}{2} m (R - l)^2\dot\varphi^2$

$T = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} M R^2 + m(R - l)^2\right]\dot\varphi^2$

$U = U_K + U_m + U_M$

$U_K = \frac{1}{2} K (R\varphi)^2 = \frac{1}{2} K R^2 \varphi^2$

Si on a un ressort ... K'

$U_{K'} = \frac{1}{2} K' (2R\varphi)^2$
$= 2K'R^2\varphi^2$

Rotation + translat°

$U_M = 0$ et $U_m = ?$

$\vec P = -\vec{grad}\, U \Rightarrow mg = -\frac{dU}{dx}$

donc $U_m = -mg \int_l^{l\cos\varphi} dx$

$= -mgl\cos\varphi + mgl$

$= -mgl\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + mgl$

$\frac{1}{2} mgl\,\varphi^2$

$U = \frac{1}{2}(KR^2 + mgl)\varphi^2$

$L = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} M R^2 + m(R - l)^2\right]\dot\varphi^2$
$- \frac{1}{2}\left[(KR^2 + mgl)\right]\varphi^2$

$\rightarrow \ddot\varphi + \left[\frac{KR^2 + mgl}{\frac{3}{2} M R^2 + m(R - l)^2}\right]\varphi = 0$

$\omega_0^2 = \frac{KR^2 + mgl}{\frac{3}{2} M R^2 + m(R - l)^2}$

$\varphi(t) = A\cos(\omega t + \theta)$

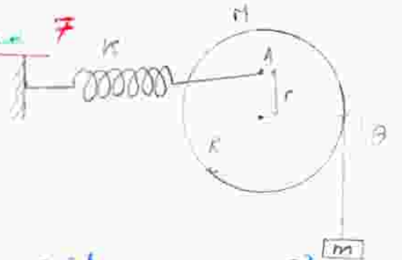
$\varphi = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

à $t = 0$: $\varphi = \varphi_0$; $\dot\varphi = 0 \Rightarrow A = \varphi_0$

$B = 0$ donc $\varphi(t) = \varphi_0\cos\omega_0 t$

$\dot\varphi = -\varphi_0\omega_0\sin\omega_0 t$

Exercice 7



1) $\theta(t)$?

$T_m = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$; $T_M = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2$

$U_K = \frac{1}{2} K r^2 \theta^2$, $U_M = 0$

$U_m = mg \int_R dy = \ldots$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$\frac{1}{2}(m + M) R^2 \ddot{\theta} + K r^2 \theta = 0$

$\ddot{\theta} + \left[\frac{2(K r^2 + mgR)}{(m+M) R^2}\right] \theta = 0$

$\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

avec $\omega = \sqrt{\frac{K r^2 + mgR/2}{\frac{1}{2}(m+M) R^2}} = \sqrt{\frac{600 \cdot 20^2 + \ldots}{(1+5) 40^2}} = 5$

$\theta(0) = A \cos\varphi = 5°$

$\dot{\theta}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$

$\dot{\theta}(0) = -A\omega \sin\varphi = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0$

$\Rightarrow \varphi = 0$ d'où $A = 5°$

donc $\theta(t) = 5 \cos(5t + \varphi)$

Exercice 8

a) Equation différentielle du M^vt

$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

$U = U_{K_1} + U_{K_2} + U_m$

compression de k_1 : $-a\theta$

allongement de k_2 : $a\theta$

$-\vec{P} = -\overrightarrow{grad}\,U \Rightarrow mg = \frac{dU}{dy}$

$U_m = mg \int_l^{l\cos\theta} dy$ avec $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ pour θ petit

donc : $U_m = -mgl\frac{\theta^2}{2}$

d'où $U = \frac{1}{2} K_1 (-a\theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 (a\theta)^2 - mgl\frac{\theta^2}{2}$

$L = T - U = -\frac{1}{2}(K_1 a^2 + K_2 a^2 - mgl)\theta^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$\Rightarrow m l^2 \ddot{\theta} + (K_1 a^2 + K_2 a^2 - mgl)\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \left(\frac{K_1 a^2 + k_2 a^2 - mgl}{m l^2}\right)\theta = 0$

b) Condition d'oscillation

pour le système soit oscille

$\frac{(K_1 + K_2) a^2 - mgl}{m l^2} > 0$

c) L'expression de la pulsation ω_0

$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{(K_1 + K_2) a^2 - mgl}{m l^2}}$