Rappels mathématiques

Une fonction de période T peut être développée en une série trigonométrique partout convergente dite série de FOURIER et définie par :

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

dont les coefficients constants a_n et b_n sont calculés par les formules :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)\cos n\omega t \ dt \ ; \ b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)\sin n\omega t \ dt \ \ avec \ \ \omega = \frac{2\pi}{T} \quad et \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

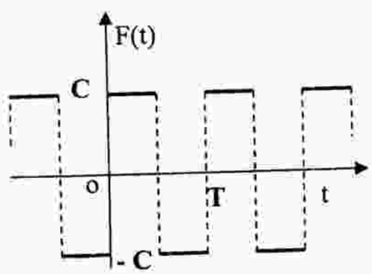
On appelle valeur moyenne d'une fonction F(t) sur un intervalle T la grandeur notée $< F >$ et donnée par :

$$< F > = \frac{1}{T}\int_0^T F(t) \ dt$$

Dans le cas d'une fonction développable en série de FOURIER, la valeur moyenne sur sa période est représentée par le terme $\frac{a_0}{2}$ de sa série.

EXEMPLE

$$F(t) = \begin{cases} +c & \text{pour} \quad 0 < t < \frac{T}{2} \\ -c & \text{pour} \quad -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases}$$



la fonction est impaire :

$a_n = 0 \quad , \quad \forall n$

Calculons les coefficients b_n :

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} c \ \sin\omega t \ dt = \frac{4c}{T}\left[\frac{-\cos n\omega \ t}{n\omega}\right]_0^{T/2} = \frac{2c}{n\pi}\left[1 - \cos n\pi\right] = \frac{2c}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$\rightarrow \begin{cases} n = 2p & b_{2p} = 0 \\ n = 2p+1 & b_{2p+1} = \frac{4c}{(2p+1)\pi} \end{cases}$$

soit $F(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4c}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1)\omega t$

$$F(t) = \underbrace{\frac{4c}{\pi}\sin\omega t}_{\text{Fondamental}} + \underbrace{\frac{4c}{3\pi}\sin 3\omega t}_{\text{3 ième harmonique}} + \underbrace{\frac{4c}{5\pi}\sin 5\omega t}_{\text{5 ième harmonique}} + \cdots$$

EXERCICE 1

Pour chacune des fonctions périodiques suivantes :

a) $F(t) = \begin{cases} -t & \text{pour } -\frac{T}{2} \le t \le 0 \\ t & \text{pour } 0 \le t \le \frac{T}{2} \end{cases}$

b) $F(t) = t^2$ pour $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$

c) $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } -\frac{T}{2} \le t \le 0 \\ t & \text{pour } 0 \le t \le \frac{T}{2} \end{cases}$

1) Donner son graphe.
2) Calculer les coefficients de son développement en série de FOURIER .
3) Donner sa valeur moyenne sur une période.

EXERCICE 2

Exprimer sous la forme $Z = |Z|\, e^{j\varphi}$ les nombres complexes suivants :

a) $1 - j\sqrt{3}$; b) -2 ; c) 5j

d) $(2j)^2 + 3j + 8$; e) $\frac{3}{\sqrt{3} - j}$; f) $\frac{3}{\left[\sqrt{3} - j\right]^2}$

g) $\frac{\sqrt{3} - j}{3 - 4j}$; h) $(\sqrt{3} + j)(3 + 4j)$

EXERCICE 3

Calculer et représenter graphiquement la solution de l'équation différentielle homogène $\ddot{x} + 4x = 0$ pour les conditions initiales suivantes :

a) $\begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ ou b) $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 2 \end{cases}$

EXERCICE 4

Calculer la solution de l'équation différentielle homogène :

1) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$
2) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$

3) $\ddot{x} + 0{,}3\,\dot{x} + 4\,x = 0$

pour les conditions initiales suivantes :

a) $\begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ ou b) $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 2 \end{cases}$

EXERCICE 5

Calculer la **solution générale** des équations différentielles inhomogènes suivantes :

1) $\ddot{x} + 4\,x = 5$

2) $\ddot{x} + 5\,\dot{x} + 4\,x = 5$

3) $\ddot{x} + 4\,\dot{x} + 4\,x = 5$

4) $\ddot{x} + 0{,}3\,\dot{x} + 4\,x = 5$

5) $\ddot{x} + 4\,x = 5\cos 3t$

6) $\ddot{x} + 0{,}3\,\dot{x} + 4\,x = 5\cos 3t$

pour les conditions initiales : $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 0$

EXERCICE 6

Calculer la **solution particulière** des équations différentielles inhomogènes suivantes :

1) $\ddot{x} + 4\,x = F(t)$

2) $\ddot{x} + 0{,}3\,\dot{x} + 4\,x = F(t)$

F(t) étant une fonction périodique définie par :

$$F(t) = \begin{cases} +a & \text{pour} \quad 0 < t < \frac{T}{2} \\ -a & \text{pour} \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \end{cases}$$

EXERCICE 7

Un mouvement harmonique est décrit par : $x(t) = 10\cos\frac{\pi}{5}t$

(x en mm , t en secondes). Déterminer :

a) la fréquence et la période du mouvement.

b) l'amplitude du déplacement, de la vitesse et de l'accélération.

c) le déplacement, la vitesse et l'accélération aux instants $t = 0$ s et $t = 1{,}2$ s

EXERCICE 8

Un mouvement harmonique est décrit par $x(t) = C\cos(100\,t + \psi)$

Les conditions initiales sont : $x(0) = 4$ mm ; $\dot{x}(0) = 1$ m/s

a) Calculer C et ψ

b) Exprimer x(t) sous la forme $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ et en déduire les valeurs de A et B .

EXERCICE 9

Montrer que $x(t) = 2\sin\omega t + 3\cos\omega t$ peut se mettre sous la forme : $x(t) = C\cos(\omega t + \psi)$.

Quelles sont les valeurs de C et de ψ ?

EXERCICE 10

Un accéléromètre indique que l'accélération d'un dispositif mécanique est sinusoïdale de fréquence 40 Hz .

Si l'amplitude de cette accélération est de $100\ m/s^2$, déterminer l'amplitude du déplacement et de la vitesse correspondantes.

Nombre de degrés de liberté – coordonnées généralisées

EXERCICE 11

On considère un point matériel astreint à se déplacer sur un cercle de rayon R et de centre O contenu dans le plan XOY.

1/Traduire la liaison par une ou des relations mathématiques. Quel est le nombre de degrés de liberté de ce point ?

2/Quelles sont les coordonnées généralisées que l'on peut utiliser pour repérer ce point ?

EXERCICE 12

On considère un point matériel astreint à se déplacer sur une sphère. Répondre aux mêmes questions que l'exercice précédent.

EXERCICE 13

Pour repérer la position d'un solide dans l'espace, il faut repérer la position de trois points non alignés A, B et C de ce solide.

1/Traduire les liaisons physiques par des relations mathématiques, quel est le nombre de degrés de liberté de ce solide ?

2/ Quelles sont les coordonnées généralisées les plus couramment utilisées pour décrire le mouvement de ce solide ?

3/ Quel est le nombre de degrés de liberté d'un solide qui possède :

a/ un point fixe

b/deux points fixes ?

EXERCICE 14

On considère une haltère constituée de deux masses identiques m, supposées ponctuelles, reliées par une tige de longueur a, de diamètre et de masse négligeables.

1/Comment s'écrit mathématiquement la liaison entre les deux masses ?

2/Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système ?

Rappels mathématiques

Exercice 2

a/ $1 - j\sqrt{3}$ $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$

$\cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6}$ rd

donc $Z = 2e^{-j\frac{\pi}{6}}$

b/ -2 $|Z| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$

$\cos\varphi = -1$ et $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\pi$ rd

donc $Z = 2e^{-j\pi}$

c/ $5j$ $|Z| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$

$\cos\varphi = 0$ et $\sin\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ rd

donc $Z = 5e^{j\frac{\pi}{2}}$

d/ $(2j)^2 + 3j + 8 = 3j + 4$ $|Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\cos\varphi = \frac{3}{5}$ et $\sin\varphi = \frac{4}{5} \Rightarrow \varphi = 0{,}92$ rd

donc $Z = 5e^{j0{,}92}$

e/ $\frac{3}{\sqrt{3} - j} = \frac{3}{\sqrt{3} - j} \cdot \frac{\sqrt{3} + j}{\sqrt{3} + j} = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}j$

$|Z| = \frac{3}{4}\sqrt{3 + 1} = \frac{3}{2}$ $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et

$\sin\varphi = \frac{1}{2}$ donc $\varphi = \frac{\pi}{6}$ et $Z = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}$

f/ $\frac{3}{(\sqrt{3} - j)^2} = \frac{3}{2(1 - \sqrt{3}j)} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}j}{1 + \sqrt{3}j} = \frac{3}{8}(1 + \sqrt{3}j)$

$|Z| = \frac{3}{8}\sqrt{1 + 3} = \frac{3}{4}$ $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d'où $\varphi = \frac{\pi}{6}$ et $Z = \frac{3}{4}e^{j\frac{\pi}{6}}$

g/ $\frac{\sqrt{3} - j}{3 - 4j}$

Exercice 3 $\ddot{x} + 4x = 0$

x déplacement $x(t)$

$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$: vitesse

$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt}$: accélération

$\begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ équation caractéristique

$k^2 + 4 = 0$ $k_{1,2} = \pm 2j$

$\Delta = 0 - 16 = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 4j$

$k_1 = 2j$; $k_2 = -2j$ racines complexes

$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$

C_1, C_2 ?

$C_1 = A\sin\varphi$ et $C_2 = A\cos\varphi$

$x(t) = A\sin\varphi\cos 2t + A\cos\varphi\sin 2t$

donc $x(t) = A\sin(2t + \varphi)$

A, φ ?

$x(t) = C_1\cos 2t + C_2 \sin 2t$

$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -2C_1\sin 2t + 2C_2\cos 2t$

$1 = C_1 \times 1 + C_2 \times 0 \Rightarrow C_1 = 1$

$0 = -2C_1 \times 0 + 2C_2 \times 1 \Rightarrow C_2 = 0$

$x(t) = \cos 2t$

$\dot{x}(t) = 2A\cos(2t + \varphi)$

$1 = A\sin(2 \times 0 + \varphi) = A\sin\varphi$

$0 = 2A\cos(2 \times 0 + \varphi) = 2A\cos\varphi$

$\Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$x(t) = \sin(2t + \frac{\pi}{2})$

Exercice 4

1/ $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$

équation caractéristique :

$k^2 + 5k + 4 = 0$; $\Delta = 9$

il y a deux racines réelles

$\sqrt{\Delta} = 3$; $k_1 = -1$, $k_2 = -4$

$x(t) = A e^{-t} + B e^{-4t}$

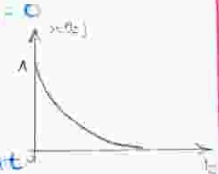
$\begin{cases} x(0) = 1 \Rightarrow A + B = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = -A e^{-t} - 4B e^{-4t} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow -A - 4B = 0$

$\Rightarrow A = -4B$

donc : $B = -\frac{1}{3}$ et $A = \frac{4}{3}$

d'où $x(t) = \frac{4}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-4t}$



2) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$

équ cara : $k^2 + 4k + 4 = 0$, $\Delta = 0$

$k_{1,2} = -2$ racine double

$x(t) = e^{-2t}(C_1 + C_2 t)$

$\begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ \dot{x}(0) = 2 \Rightarrow \dot{x}(t) = -2e^{-2t}(C_1 + C_2 t) + C_2 e^{-2t} = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow C_2 = 2$

$x(t) = e^{-2t}(2t)$

3) $\ddot{x} + 0{,}3\dot{x} + 4x = 0$

équ cara : $k^2 + 0{,}3k + 4 = 0$

$\Delta = 0{,}3^2 - 4\times4 \simeq -16$; $\sqrt{\Delta} = \pm 4j$

$k_1 = -0{,}15 + 2j$ $k_2 = -0{,}15 - 2j$

$x(t) = e^{-0{,}15t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$

$= A e^{-0{,}15t} \sin(2t + \varphi)$

$x(0) = 1 \Rightarrow A \sin\varphi = 1$

$\dot{x}(t) = 2A e^{-0{,}15t} \cos(2t + \varphi) - \sin(2t + \varphi) \cdot 0{,}15 A e^{-0{,}15t}$

$\dot{x}(0) = 2A\cos\varphi - 0{,}15 A \sin\varphi = 0$

$2\cos\varphi = 0{,}15 \sin\varphi$

$\tan\varphi = \frac{4}{0{,}3}$

$\varphi = 85{,}7°$

$A \simeq 1$

Exercice 5

1/ $\ddot{x} + 4x = 5$

$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$

solution général ; Homogène ; particulière

$x_H(t) = A \sin(2t + \varphi)$

$x_p(t) = \text{constante} = c$

$\dot{x}_p = 0$ $\quad 0 + 4\times c = 5$

$\ddot{x}_p = 0$ $\quad \boxed{c = 5/4}$

donc $x(t) = A \sin(2t + \varphi) + 5/4$

4) $\ddot{x} + 4x = 5\cos 3t$

$x_H(t) = A \sin(2t + \varphi)$

$x_p(t) = M \cos 3t + N \sin 3t$

— Notation réelle

$\dot{x}_p(t) = \frac{dx_p}{dt} = -3M \sin 3t + 3N \cos 3t$

$\ddot{x}_p(t) = -9M \cos 3t - 9N \sin 3t$

$= -9x_p$

$\ddot{x}_p + 4x_p = 5\cos 3t$

$-5x_p = 5\cos 3t$

$x_p = -\cos 3t$

$x(t) = A \sin(2t + \varphi) - \cos 3t$

Exercice 7

$x(t) = 10 \cos \frac{\pi}{5} t$

$x(t) = x_0 \cos \omega t$

$= x_0 \cos 2\pi f t$

$= x_0 \cos \frac{2\pi}{T} t$

$x(t)$ [mm] et t [s]

a/ $\frac{\pi}{5} = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{1}{10}$

$f = 0,1\ Hz$

$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,1} \Rightarrow T = 10\ s$

b/ $x_0 = 10\ mm$ $\quad \dot{x}(t) = -2\pi \sin \frac{\pi}{5} t$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -x \omega \sin \omega t$

$= \dot{x}_0 \sin \omega t$

$\Rightarrow \dot{x}_0 = -x_0 \omega = -10 \frac{\pi}{5} = -2\pi$

$\dot{x}_0 = 2\pi\ mm/s$

$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt}$

$= -x_0 \omega^2 \cos \omega t$

$= -\ddot{x}_0 \cos \omega t$

donc $\ddot{x}_0 = -x_0 \omega^2 = -10 \frac{\pi^2}{25}$

$\ddot{x}_0 = -4\ mm/s^2$

$\ddot{x}(t) = -4 \cos \frac{\pi}{2} t$

c/ à $t = 0s$

$x(0) = 10\ mm$

$\dot{x}(0) = 0\ mm/s$

$\ddot{x}(0) = -4\ mm/s^2$

$\Rightarrow$ sens physique

à $t = 1,2s$

$x(1,2) = 7,29\ mm$.

$\dot{x}(1,2) = -4,3\ mm/s$

$\ddot{x}(1,2) = 1,23\ mm/s^2$

Exercice 8

$x(t) = C \cos(100t + \psi)$

$x(0) = 4\ mm$, $\dot{x}(0) = 1\ m/s$

a/ C, ψ ?

$\dot{x}(t) = -C\omega \sin(\omega t + \varphi)$

$\dot{x}(t) = -100\, C \sin(100t + \varphi)$

$x(0) = 4\ mm = 4 \times 10^{-3}\ m = C \cos\varphi$ ... (1)

$\dot{x}(0) = 1\ m/s = -100\, C \sin\varphi$ ... (2)

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{-100\, C \sin\varphi}{C \cos\varphi} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}}$

$\Rightarrow -100 \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{0,4}$

$\Rightarrow \varphi = \operatorname{Arctg}\left(\frac{-1}{0,4}\right) = \operatorname{Arctg}(-2,5)$

$\Rightarrow \psi = -68,19 \simeq -70°$

(1) $C \cos(-70) = 4 \Rightarrow C = \frac{4}{\cos 70}$

$\Rightarrow C = 11,70\ mm \simeq 12\ mm$

b/ $x(t) = C \cos(100t + \varphi) = C \cos(\omega t + \varphi)$

$= A \cos \omega t + B \sin \omega t$

A, B ? $\quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\begin{cases} a = \omega t \\ b = \psi \end{cases}$

$C \cos(\omega t + \psi) = C[\cos \omega t \cos \psi - \sin \omega t \sin \psi]$

$\Rightarrow A = C \cos\psi$

$B = -C \sin\psi$ $\quad C = \sqrt{A^2 + B^2}$

Exercice 9

$x(t) = 3 \cos \omega t + 2 \sin \omega t$

$A = 3$; $B = 2$

$C = \sqrt{A^2 + B^2} = 3,6$

$3 = 3,6 \cos\psi \Rightarrow \cos\psi = \frac{3}{3,6} = 0,83$

$\psi = 34°$