Chapitre 1

Suites

1.1 Premières définitions

Définition 1 *Une suite est une application dont l'ensemble de depart est* $\mathbb{N}$ *ou une partie de* $\mathbb{N}$.

Remarque 2 *Si l'ensemble d'arrivé est* $\mathbb{R}$ *(resp.* $\mathbb{C}$*), la suite est dite réelle, (resp. complexe).*

On désigne les éléments d'une suite par une lettre suivie d'un indice, u_0 est ainsi l'image par l'application u de l'entier 0.
L'image d'un élément quelconque n est appelée terme général de la suite et noté u_n. La suite est notée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 3 *On peut définir une suite en donnant l'expression de son terme général en fonction de* n *par exemple* $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Exemple 4 *On peut définir une suite par récurrence en donnant certains de ses premiers termes et une relation de récurrence*

$u_0 = 1$ *et* $u_n = 1 + \dfrac{1}{u_{n-1}}$ *pour* $n > 0$*, on obtient par exemple* $u_1 = 2, u_2 = \dfrac{3}{2}...$

$u_0 = u_1 = 1$ *et* $u_n = u_{n-2} + \dfrac{1}{u_{n-1}}$ *pour* $n \geq 2$*, on obtient par exemple* $u_2 = 2, u_3 = \dfrac{3}{2}...$

Définition 5 *Une suite* u_n *est dite convergente si sa limite quand* n *tend vers l'infini existe et* *est finie. Autrement dit*

$$u_n \text{ convergente } \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \ : \lim_{n\to\infty} u_n = \lambda.$$

Une suite est dite divergente si elle n'est pas convergente.

Exemple 6 *i) La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dont le terme général est donné par* $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2+2}$ *est convergente car on a* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^2+2} = \dfrac{1}{2}$.
ii) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dont le terme général est donné par* $v_n = n^2+1$ *est divergente car on a* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2+1 = +\infty$.

1.2 Sens de variation des suites - suites bornées

Définition 7 *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite croissante (resp. strictement croissante) si elle vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n \ \left(resp. u_{n+1} > u_n\right).$$

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite décroissante (resp. strictement décroissante) si elle vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n \ \left(resp. u_{n+1} < u_n\right).$$

Une suite est dite monotone (resp. monotone) si elle croissante ou décroissante.

Exemple 8 *La suite de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ *est une suite strictement décroissante. En effet on*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{n^2+1} = \frac{\left(n^2+1\right) - \left((n+1)^2+1\right)}{\left((n+1)^2+1\right)\left(n^2+1\right)} \\ &= \frac{\left(n^2+1\right) - \left(n^2+2n+2\right)}{\left((n+1)^2+1\right)\left(n^2+1\right)} = -\frac{2n+1}{\left(n^2+1\right)\left((n+1)^2+1\right)}. \end{aligned}$$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n < 0$.

Exemple 9 *La suite de terme général $w_n = n^2$ est strictement croissante.*
En effet on

$$w_{n+1} - w_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

D'où pour tout $\forall n \in \mathbb{N} : w_{n+1} - w_n > 0$.

Définition 10 *On dit qu'une suite est majorée (resp minorée) s'il existe un nombre réel $M \in \mathbb{R}$ $(resp. m \in \mathbb{R})$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq M \ \ (resp. u_n \geq m)\,.$$

Si les inégalités sont strictes on dit que la suite est strictement majorée ou stirctement minorée.

Remarque 11 *Si une suite est à la fois majorée et minorée on dira qu'elle est bornée.*

Exemple 12 *La suite de terme de général $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ est minorée par 0 et majorée par 1.*
En effet les nombres $n^2 + 1$ et 1 sont positifs alors on a $\dfrac{1}{n^2+1} \geq 0$.
de plus

$$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n^2+1} \leq 1.$$

1.3 Convergence des suites monotones

Proposition 13 *Toute suite convergente est bornée.*

Proposition 14 *Toute suite croissante (resp. décroissante) majorée (resp. minorée) est convergente.*

Exemple 15 *La suite de terme de général $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.*

1.4 Suites extraites

Définition 16 *Soit u_n une suite et φ une application strictement croissante $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*
La suite définie par $u_{\varphi(n)}$ est dite suite extraite ou sous-suite de la suite u_n.

Exemple 17 *Soit la suite* $u_n = n^2$ *et l'application* $\varphi(n) = n + 1$ *alors la suite* $u_{\varphi(n)} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ *est une suite extraite de la suite* u_n.

Proposition 18 *Soit* u_n *une suite convergente qui admet le nombre réel* l *pour limite alors toute suite extraite est convergente et admet la même limite.*

Exemple 19 *Soit la suite* $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2+3}$ *qui admet la limite* $\frac{1}{2}$.
La suite extraite $u_{2n+1} = \dfrac{(2n+1)^2+1}{2(2n+1)^2+3} = \dfrac{4n^2+4n+2}{8n^2+8n+5}$ *possède la même limite* $\frac{1}{2}$.

Remarque 20 *La proposition précédente est surtout utile pour démontrer qu'une suite ne possède pas de limite. Par contraposée si une suite possède deux suites extraites qui n'ont pas la même limite alors elle n'admet pas de limite.*

Exemple 21 *Soit la suite de terme général* $u_n = (-1)^n$, *considérons les suites extraites* u_{2n} *et* u_{2n+1}, *on a :*
la suite extraite u_{2n} *est constante et vaut* 1 *et par conséquent sa limite aussi, tandis que la suite extraite* u_{2n+1} *est constante et vaut* -1 *et sa limite également.*
Ainsi on a deux suites extraites qui n'admettent pas la même limite alors la suite u_n *n'a pas de limite.*

1.5 Application à l'étude des suites récurrentes

Une suite récurrente est définie par un ou plusieurs termes initiaux et une fonction de récurrence qui permet de calculer les termes suivants. L'étude de ces suites est plus difficile que les suites dont le terme général est donné en fonction de n.

Supposons qu'ont veut étudier une suite u_n définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Les propositions 12 et 16 ont des conséquences intéréssantes dans ce cas, comme on le verra à travers l'exemple suivant :

Exemple 22 *Soit la suite définie par la relation de récurrence* $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}$.

1- Démontrer que u_n *est monotone.*

2- Démontrer que u_n *est majorée par* 1.

3- Si la suite est convergente, donner sa limite.

En effet

1- On commence par étudier la différence $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+u_n^2}{2} - u_n = \frac{1+u_n^2 - 2u_n}{2} = \frac{(u_n-1)^2}{2}.$$

Ainsi pour tout $n \geq 0 : u_{n+1} - u_n \geq 0$.

2- On démontre par récurrence.

Pour $n = 0$ *on a* $u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$.

On suppose ensuite que la proposition est vraie pour n *et on la démontre pour* $n+1$.

On remarquera que les termes de la suite sont positifs car la suite est croissante et que son premier terme est positif.

$$0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow u_n^2 \leq 1 \Rightarrow u_n^2 + 1 \leq 1 + 1 \Rightarrow \frac{1+u_n^2}{2} \leq \frac{2}{2} = 1.$$

3- Puisque la suite est convergente la suite extraite u_{n+1} *possède la même limite que la suite* u_n. *Notons la limite* l *on obtient alors :*

$$l = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+u_n^2}{2} = \frac{1+l^2}{2} \Rightarrow l = \frac{1+l^2}{2}.$$

La limite l *est donc solution de l'équation* $1 + l^2 - 2l = 0$ *qui possède la racine double* $l = 1$.

On conclut donc que la suite u_n *est convergente et sa limite est donnée par :* $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

Remarque 23 *D'une façon générale, si on a une suite définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$ *si la suite* u_n *est bornée et que la fonction* f *est monotone alors la suite est convergente en vertu de la proposition 12 et la limite* l *est solution de l'équation* $l = f(l)$.

1.6 Suites particulières

1.6.1 Suite constante

Une suite de terme général u_n est dite constante si

$$\forall n : u_{n+1} = u_n.$$

1.6.2 Suite stationnaire

Une suite stationnaire est une suite qui devient constante à partir d'un certain rang

$$\ni n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n.$$

1.6.3 Suite arithmétique

Une suite de terme général u_n est dite arithmétique s'il un existe un nombre réel r tel que

$$\forall n : u_{n+1} = u_n + r.$$

Le terme général d'une suite peut être obtenu en fonction de son premier terme u_0 et de r, en effet on peut démontrer par récurrence que

$$u_n = u_0 + nr.$$

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est donné par

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{n}{2}\left(u_0 + u_{n-1}\right).$$

1.6.4 Suite géométrique

Une suite de terme général u_n est dite géométrique s'il un existe un nombre réel q tel que

$$\forall n : u_{n+1} = qu_n.$$

Le terme général d'une suite géométrique peut être obtenu en fonction de son premier terme u_0 et de q, en effet on peut démontrer par récurrence que

$$u_n = u_0 q^n.$$

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique est donné par

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \sum_{k=0}^{n-1} q^k = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

1.6.5 Suite arithmético-géométrique

Une suite de terme général u_n est dite arithmético-géométrique s'il un existe deux nombres réels a et b tel que

$$\forall n : u_{n+1} = a u_n + b.$$

Si $a = 1$ alors la suite est arithmétique et si $b = 0$ alors la suite est géométrique.

Pour $a \neq 1$ le terme général d'une suite arithmético-géométrique peut être obtenu en fonction de son premier terme u_0 et de la paire (a, b), en effet on peut démontrer par récurrence que :

$$u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}.$$

La somme des n premiers termes d'une suite arithmético-géométrique est donnée par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = (u_0 - r) \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{nb}{1-a}.$$

1.7 Applications

1.7.1 Croissance des bactéries

Les bactéries se multiplient par division binaire (on dit également par dichotomie). Chaque cellule produit deux nouvelles cellules.

On caractérise les populations bactériennes par période de doublement, c'est à dire le temps nécéssaires à une population pour doubler son effectif.

Ainsi l'effectif d'une bactérie dépend de sa période de doublement et du nombre initial de bactéries. On commence par donner un exemple avant de généraliser.

Exemple 24 *La bactérie Escherichia coli nécéssite 20 minutes pour se dupliquer. A combien de bactéries une Escherichia coli donne naissance après 48 h ?*
Réponse : *On a* $48h = 48 \times 60\,\text{min} = 2880\,\text{min}$*. Ainsi dans 48 h on a* $2880/20 = 144$ *périodes de doublement.*
Le nombre de bactéries est donc donné par 1×2^{144}*.*

Remarque 25 *Plus généralement si* N_0 *est le nombre de bactéries au départ et* n *le nombre de périodes de doublement alors l'effectif est donné par :*

$$E_n = N_0 2^n.$$

qui est une suite géométrique.

1.7.2 Les lapins de Fibonacci (Leonardo Fibonacci 1175 - 1250 Pise Italie)

Le problème des lapins a été posé par Fibonacci dans son livre Liber abaci (Livre de calcul). Ce problème peut se résumer dans les points suivants :

- La maturité sexuelle du lapin est atteinte après un mois.
- La durée de gestation est également de 1 mois.
- Chaque portée comporte toujours un mâle et une femelle.
- Les lapins ne meurent pas.

Si on commence par un couple de lapins jeunes (non mature) quel est le nombre de lapins après n mois ?

Le schéma suivant donne l'évolution du nombre de lapins en fonction des mois.

Au départ ($n = 0$) on a un seul couple de lapins jeunes, après un mois le couple est en age de procréer, après un autre mois (gestation) on obtient un nouveau couple de lapins jeunes et ainsi de suite.

- Soit L_n le nombre de couples au mois n. Au mois n, nous retrouvons tous les lapins déjà vivants au mois $n-1$ (dont le nombre est L_{n-1}) et les enfants qui sont eux issues de la reproduction des couples adultes qui existaient deux mois auparavant donc ceux qui existaient au mois $(n-2)$ (dont le nombre est L_{n-2}).

On obtient ainsi la relation de récurrence suivante :

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}.$$

Les deux premiers termes sont donnés par $L_0 = L_1 = 1$. On obtient ainsi la suite définie par récurrence

$$\begin{cases} L_0 = L_1 = 1 \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \qquad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Cette suite est appelée suite de Fibonacci.

1.7.3 Problème d'apport fixe et fuite proportionnelle.

On injecte à une souris une dose de produit actif de 1.5 unités chaque heure. On sait qu'après une heure l'organisme de la souris arrive à éliminer 60% du produit.

La première injection se fait à l'instant $t = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note Q_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t = n$ (en heures), dès que la nouvelle injection est faite.

- A l'instant $t = 1$ l'organisme de la souris aura éliminé 60% de la première injection et reçu une seconde injection on a donc

$$Q_1 = 0,4 \times 1,5 + 1,5.$$

- A l'instant $t = 2$ l'organisme de la souris aura éliminé 60% de la quantité du produit présente une heure avant Q_1 et reçu une nouvelle injection on a donc

$$Q_2 = 0,4 \times Q_1 + 1,5.$$

- A l'instant $t = n$ l'organisme de la souris aura éléminé 60% de la quantité présente une heure avant et reçu une nouvelle injection on a donc :

$$Q_n = 0,4 \times Q_{n-1} + 1,5.$$

Cette relation est une relation définissant une suite arithmético-géométrique dont le terme général est :

$$Q_n = 1,5 \times (0,4)^n + 1,5 \times \frac{1-(0,4)^n}{1-0,4}.$$

Cette suite est convergente et la limite de la suite est donnée par

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} (1,5)\,(0,4)^n + (1,5)\,\frac{1-(0,4)^n}{1-0,4} = \frac{1,5}{0,6} = 2,5.$$

La limite dans ce cas a une signification importante, en effet quel que soit le nombre d'injections que la souris va recevoir la quantité présente dans l'organisme va se stabiliser autour de 2.5 unités.

Question : Trouver la formule de la suite dans le cas général où la quantité délivrée lors de la première injection est notée Q_0 et en supposant qu'à chaque injection on délivre une dose fixe D de produit.

Chapitre 2

Fonction réelle d'une variable réelle

2.1 Généralités

Définition 26 *Une fonction réelle d'une variable réelle est une application définie de* $\mathbb{R}$ *ou une partie de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *.*

Le graphe d'une fonction réelle f *définie sur un ensemble* I *de* $\mathbb{R}$ *est l'ensemble des points définie par :*

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in I\}.$$

Définition 27 *Un sous-ensemble* I *de* $\mathbb{R}$ *est dit symétrique s'il vérifie*

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in I \Rightarrow -x \in I.$$

Une fonction f *définie sur un ensemble symétrique* I *est dite paire (resp impaire)si elle vérifie*

$$\forall x \in I : f(-x) = f(x)\,.\,(resp.\ f(-x) = -f(x))\,.$$

Exemple 28 *Considérons la fonction* $f : \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2$. f *n'est pas une fonction paire car le domaine de définition n'est pas symétrique, tandis que si on la définie sur le domaine* $[-1, 1]$ *la fonction sera paire.*

Remarque 29 *Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe* (oy)*, par contre celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine* $(0, 0)$*.*

Définition 30 *Soit f une fonction définie sur $I\subset \mathbb{R}$.*

1- On dit que f est croissante (resp. strictement croissante) si elle vérifie :

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (resp.\ f(x_1) < f(x_2)).$$

2- On dit que f est décroissante (resp. strictement décroissante) si elle vérifie :

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (resp.\ f(x_1) > f(x_2)).$$

3- On dit que f est monotone (reps. strictement monotone) si elle croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Définition 31 *Soit f une fonction définie sur $I\subset \mathbb{R}$.*

- On dit que f est majorée (resp. minorée) s'il existe un réel M (resp. m) tel que :

$$\forall x \in I : f(x) \leq M \quad (resp.\ f(x) \geq m).$$

- On dit que f est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

2.1.1 Fonction composée

Définition 32 *Soient deux fonctions, f définie sur un intervalle $I\subset \mathbb{R}$ et g définie sur un intervalle $J\subset \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall x \in I : f(x) \in J.$$

La fonction composée $g \circ f$ est la fonction définie sur I par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Remarque 33 *Si $g \circ f$ existe $f \circ g$ n'existe pas forcément et quand $f \circ g$ on n'a pas forcément l'égalité $g \circ f = f \circ g$.*

Proposition 34 *Toute fonction composée de fonctions monotones est une fonction monotone.*

Preuve. Soient f, g deux fonctions définies respectivement sur I et J et $h = g \circ f$ la fonction composée : on a

$$\begin{aligned}
\frac{h(x_1) - h(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{(g \circ f)(x_1) - (g \circ f)(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{g(f(x_1)) - g(f(x_2))}{x_1 - x_2} \\
&= \frac{g(y_1) - g(y_2)}{x_1 - x_2} = \frac{g(y_1) - g(y_2)}{y_1 - y_2} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.
\end{aligned}$$

Comme f et g sont monotones, leurs taux de variations est de signe constant ainsi le taux de variation de h est également constante. ■

Remarque 35 *Si les fonctions f et g ont même sens de variation alors $h = g \circ f$ est croissante.*

Remarque 36 *Si les fonctions f et g ont des sens de variations différents alors $h = g \circ f$ est décroissante.*

2.1.2 Injectivité-Surjectivité-Bijectivité

Définition 37 *On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow J$ est injective si elle vérifie la condition suivante :*

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Remarque 38 *Si f est une fonction injective alors tout élément de J admet au plus un antécédent par f dans I.*

Définition 39 *On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow J$ est surjective si elle vérifie :*

$$\forall y \in J : \exists x \in I : y = f(x).$$

Remarque 40 *Si f est une fonction surjective alors tout élément de J est l'image par f d'au moins un élément de I.*

Définition 41 *Une fonction est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective.*

2.1.3 Fonction réciproque ou inverse

Considérons la fonction $f : I \rightarrow J$.

Théorème 42 *toute fonction continue et strictement monotone sur I est inversible. De plus on a $f^{-1} : J \to I$ et $f \circ f^{-1} = Id_J$ et $f^{-1} \circ f = Id_I$.*

2.1.4 Propriétés de la fonction inverse

1) f^{-1} est monotone et de même sens de variation que f.

2) f^{-1} est continue.

3) Lee graphes de f^{-1} et de f sont symétriques par rapport à la première bissectrice, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

2.2 Limites - Continuité

Définition 43 *On dit que la fonction f admet la limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si elle vérifie*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 : \forall x : \ \ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
On dit que $+\infty$ est limite de f en x_0 $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty\right)$ si

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \eta > 0 : \forall x : \ \ |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) \geq A.$$

On dit que $-\infty$ est limite de f en x_0 $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty\right)$ si

$$\forall A > \mathbb{R} \ \exists \eta > 0 : \forall x : \ \ |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) \leq A.$$

Définition 44 (limite en $+\infty$) *On dit que l est limite de f en $+\infty$ si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x : \ \ x \geq B \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

On dit que $+\infty$ est limite de f en $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x : \ \ x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A.$$

On dit que $-\infty$ est limite de f en $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x :\ x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A.$$

Définition 45 (limite en -∞) *On dit que l est limite de f en $-\infty$ si*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x :\ x \leq B \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

On dit que $+\infty$ est limite de f en $-\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x :\ x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A.$$

On dit que $-\infty$ est limite de f en $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x :\ x \leq B \Rightarrow f(x) \leq A.$$

Proposition 46 *Si la limite existe alors elle est unique.*

Définition 47 *On dit que la fonction admet la limite l quand x tend vers x_0 à droite (resp. à gauche) si*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0 : \forall x :\ x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0 : \forall x :\ x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

On note dans ce cas

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l\ \left(resp. \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l \right)\ ou\ bien\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l\ \left(resp. \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \right).$$

Si les limites à gauches et à droites existent et sont égales alors la limite existe et est égal à la limite commune.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} = l.$$

Dans le cas contraire on dit que la limite n'existe pas.

Proposition 48 *Soit f une fonction admettant une limite l quand x tend vers x_0 (∞) alors* *pour toute suite x_n tel que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ (∞) on a*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Remarque 49 *Cette proposition est utile pour démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite.*

Exemple 50 *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x)$.*

Preuve. Considérons les deux suites $\frac{\pi}{2} + 2kn$ et $2kn$ qui tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
Si la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x)$ existe elle doit être unique. Par contre on a

$$\lim_{x\to+\infty} \cos(x) = \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2kn\right) = 0 \text{ car } \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2kn\right) \text{ est une suite constante qui vaut 0.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \cos(x) = \lim_{n\to+\infty} \cos(0 + 2kn) = 1 \text{ car } \cos(2kn) \text{ est une suite constante qui vaut 1.}$$

Comme on a deux limites différentes alors la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x)$ n'existe pas. ■

Proposition 51 *Soit f et g deux fonctions définies sur le même ensemble I on a*

$$\forall x \in I : \; f(x) < g(x) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Théorème 52 (Théorème de Horn) *Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $g(x)$ une fonction bornée alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x) = 0$.*

2.2.1 Formes indéterminées

Soient f et g deux fonctions réelles, x_0 peut être un nombre réel ou bien ∞.

1. Si on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ alors $f+g$ représente une forme indéterminée de type $\infty - \infty$.
2. Si on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ alors $\frac{f}{g}$ représente une forme indéterminée de type $\frac{\infty}{\infty}$.

3. Si on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ représente une forme indéterminée de type $\dfrac{0}{0}$.
4. Si on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ alors $f.g$ représente une forme indéterminée de type $0 \times \infty$.

2.2.2 Formes indéterminées pour les écritures exponentielles

1. Si on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ alors f^g représente une forme indéterminée de type 0^0.
2. Si on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ alors f^g représente une forme indéterminée de type 1^∞.
3. Si on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ alors f^g représente une forme indéterminée de type ∞^0.

Remarque 53 *Souvent les formes indéterminée peuvent être résolus par des modifications algébriques.*

Exemple 54 *Calculer la limite* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x^2-3}$
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3} = +\infty$ *on a donc affaire à une forme indéterminée de type* $\infty - \infty$

$$.\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x^2-3} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}} - \sqrt{x-\frac{3}{x}}\right) = -\infty$$

Exemple 55 *Calculer la limite* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-3} = +\infty$ *on a donc affaire à une forme indéterminée de type* $\infty - \infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} = 0.\end{aligned}$$

2.3 Continuité

Définition 56 *Une fonction f est dite continue au point x_0 si on $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*
On dit que la fonction f est continue à droite (resp. à gauche) du point x_0 si on a $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. $\left(resp. \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \right)$.
On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en chacun de ses points.

La somme et le produit de deux fonctions continues sont des fonctions continues, le produit d'une fonction continue par un nombre réel donne une fonction continue.

Les fonctions élémentaires polynômes, fractions rationnelles, exponentielle, logarithme sont continues sur leurs domaines de définition.

Exemple 57 ***Fonction en escaliers.***
Soit la fonction partie entière de x notée $[x]$.
Cette fonction associe à chaque nombre réel l'entier définie par $[x] \leq x < [x] + 1$.
Par exemple $[1,5] = 1$ et $[e] = 2$.
Question : *étudier la continuité de la fonction $[x]$.*
Réponse : *On commence par étudier la fonction sur l'intervalle $[0, 2]$ on a :*

$$\begin{aligned} \forall x &\in [0,1[: [x] = 0 \\ \forall x &\in [1,2[: [x] = 1. \end{aligned}$$

Il faut étudier la continuité dans les points où la fonction n'est pas définie de la même façon à gauche et à droite.
On a

$$\lim_{x \to 1^+} [x] = 1 \neq \lim_{x \to 1^-} [x] = 0.$$

La fonction est par conséquent discontinue au point 1.
D'une façon générale la fonction $[x]$ est toujours constante dans les intervalles de la forme $[n, n+1[$ et par conséquent continue. Elle est discontinue en tout entier n car elle n'a pas les

même limites à gauche et à droite.

$$\lim_{x \to n^+} [x] = n \neq \lim_{x \to n^-} [x] = n - 1.$$

Le graphe de la fonction partie entière est particulier et justifie la dénomination de fonction en escalier.

Théorème 58 (Valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ si on a $f(a) f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Théorème 59 (Valeurs intermédiaires version générale) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a, b $(a < b)$ deux éléments de I si on a $f(a) < f(b)$ alors pour tout y vérifiant $f(a) \leq y \leq f(b)$ il existe $c \in]a, b[$ tel que $y = f(c)$.*
Si de plus la fonction f est monotone alors c est unique.

Corollaire 60 *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Remarque 61 *Attention l'image de l'intervalle $[a, b]$ par la fonction f n'est pas forcément l'intervalle $[f(a), f(b)]$.*

Exemple 62 *L'image de l'intervalle $[-1, 1]$ par la fonction $x \to x^2$ est l'intervalle $[0, 1]$.*

2.4 Application à la résolution approchée des équations

Les équations polynomiales de degré supérieur à deux forment une catégorie particulière d'équations où les résultats de l'algèbre sont très utiles, ainsi un polynôme de degré deux $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$ possède les racines $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en supposant $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

Cette dernière méthode de résolution est dite à radicaux, des formules similaires existent pour les polynômes de degré 3 et 4, elles sont dues respectivement aux mathématiciens italiens Niccolo Fontana Tartaglia $(1499 - 1557)$ et Lodovico Ferrari $(1522 - 1565)$, en 1824 le mathématicien norvégien Niels Henrik Abel $(1802 - 1829)$ démontre qu'il n'existe pas de méthode générale pour trouver les racines d'un polynôme de degré supérieur ou égal à 5, le mathématicien français Evariste Galois (1811–1832) a clarifié les situations où il est possible de trouver des racines à des polynômes de degré n quelconque.

Méthode de la Dichotomie (bissection)

La méthode de dichotomie est une application directe du théorème des valeurs intermédiaires, elle consiste à se donner un intervalle dont les extrémités vérifient les conditions du théorème, à le partager en deux parties égales et à regarder lequel des deux contient la racine.

Les étapes sont résumés dans le schéma suivant :

1. Calculer le point milieu de l'intervalle $[a_i, b_i]$ donné par $m_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$.
2. Si $f(m_i) = 0$ alors m_i est une solution de l'équation.
3. Si $f(m_i) \neq 0$ et $f(a_i).f(m_i) < 0$ la solution appartient donc à l'intervalle $]a_i, m_i[$ qui devient l'intervalle $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ à réinjecter dans 1.
4. Si $f(m_i) \neq 0$ et $f(m_i).f(b_i) < 0$. et donc la solution appartient à l'intervalle $]m_i, b_i[$ qui devient l'intervalle $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ à réinjecter dans 1.

Exemple 63 *On souhaite approximer* $\sqrt{5}$ *par la méthode de la dichotomie, on doit pour cela résoudre* $f(x) = x^2 - 5$ *on peut choisir l'intervalle* $[2, 3]$ *qui vérifie les conditions du théorème des valeurs intermédiaires.*

i	*Intervalle de départ* $[a_i, b_i]$	*Point milieu* m_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(m_i)$
0	$[2, 3]$	2.5	-1	4	1.25
1	$[2, 2.5]$	2.25	-1	1.25	0.0625
2	$[2, 2.25]$	2.125	-1	0.0625	-0.4844
3	$[2.125, 2.25]$	2.188	-0.4844	0.0625	-0.2127

La valeur approchée de $\sqrt{5}$ *à* 10 *chiffres est donnée par* 2.236067977.

2.4.1 Application en biologie

Exemple 64 *L'injection de bactéries dans le corps d'un insecte entraîne un taux de mortalité dont le pourcentage augmente en fonction du temps écoulé.*
Lors d'une expérience où le temps est mesuré en jours à partir de l'instant de l'injection on a

obtenu les résultats suivants

Jours	1	2	3	4	5	6
Taux de mortalité (%)	0.2054	43.7656	63.0858	65.9030	73.1470	93.9444

Ces observations ont permit de déduire la fonction régissant l'évolution du taux de mortalité en fonction du nombre de jours.L'expression de la fonction est donnée par :

$$M(t) = -0.2083t^5 + 3.6742t^4 - 21.913t^3 + 46.25t^2 + 9.5455t - 37.143$$

où M représente le taux de mortalité et t le nombre de jours, cette fonction est monotone sur l'intervalle $[1, 6]$ comme on le constate sur le graphe.

Question *: Au bout de combien de jours obtient on une mortalité de* 50%.

Réponse :

On a $M(1) =$ 0.2054 et $M(6) = 93.9444$ comme la fonction est monotone alors il existe une valeur t_0 unique tel que $M(t_0) = 0.5$ on applique la méthode de la dichotomie pour trouver la solution.

i	*Intervalle de départ* $[a_i, b_i]$	*Point milieu* m_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(m_i)$
0	$[1, 6]$	3.5	0.2054	93.9444	65.2654469
1	$[1, 3.5]$	2.25	0.2054	65.2654469	51.02633410
2	$[1, 2.25]$	1.625	0.2054	51.02633410	29.72790931
3	$[1.625, 2.25]$	1.9375	29.72790931	51.02633410	41.68102925
4	$[1.9375, 2.25]$	2.09375	41.68102925	51.02633410	46.69137682
5	$[2.09375, 2.25]$	2.171875	46.69137682	51.02633410	48.94351191
6	$[2.171875, 2.25]$	2.210937500	48.94351191	51.02633410	50.00604521

On peut retenir ainsi $2.210937500 \simeq 2.21$ *comme réponse.*

2.5 Dérivation

Définition 65 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
- On dit que la fonction f est dérivable au point x_0 si la limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$ *où l est un nombre réel.*
- Si la limite existe on note $f'(x_0)$ ou bien $\frac{df}{dx}(x_0)$.
- On dit que la fonction f est dérivable à droite (resp. à gauche) du point x_0 si on a

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l. \left(resp. \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l' \right).$$

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en chacun de ses points.
- La fonction dérivée notée f' est la fonction qui associe à chaque point x la dérivée de la fonction f au point x.

$$f' : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

Remarque 66 *Si les dérivées à gauche et à droite sont égales alors la fonction est dérivable, si elles sont différentes alors la fonction n'est pas dérivable.*

2.5.1 Opérations sur les dérivées

Soit f et g deux fonctions dérivables on a les égalités suivantes :

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$.
3. $(fg)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$.
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}$.

2.5.2 Dérivée d'une fonction composée

Soit f une fonction dérivable au point x_0 et g une fonction dérivable au point $f(x_0)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable au point x_0 et sa dérivée est donnée par l'expression :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

2.5.3 Dérivée de la fonction inverse

Soit f une fonction continue et inversible sur un intervalle I. Si f est dérivable au point x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$ alors sa fonction inverse est dérivable au point au point $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Exemple 67 *Soit la fonction* $f(x) = \ln(x)$ *on sait que* $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ *et* $f^{-1}(x) = \exp(x)$. *De plus on a*

$$\exp'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x).$$

2.5.4 Dérivées d'ordre supérieur

Soit f une fonction dérivable. Si sa fonction dérivée f' est dérivable à son tours on note sa fonction dérivée f''.

On définit par récurrence la dérivée de degré n et (on note $f^{(n)}$) par :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

On note également $f^{(n)}$ par $\dfrac{d^n f}{dx^n}$. Par convention $f^{(0)}$ désigne la fonction $f(x)$.

Formule de Leibniz

Proposition 68 *Soient f et g deux fonctions n fois dérivables, la fonction $f.g$ admet alors une dérivée de d'ordre n et on a*

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)},$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Exemple 69 *Calculer la dérivée d'ordre 3 de la fonction* $\exp(x)\left(x^3+x^2+x+1\right)$.
On note $f(x) = \left(x^3+x^2+x+1\right)$ *et* $g(x) = \exp(x)$.

$$\begin{aligned}
f^{(3)} &= \sum_{k=0}^{3} C_3^k f^{(k)} g^{(3-k)} = C_3^0 f^{(0)} g^{(3-0)} + C_3^1 f^{(1)} g^{(3-1)} + C_3^2 f^{(2)} g^{(3-2)} + C_3^3 f^{(3)} g^{(3-3)} \\
&= \frac{3!}{0!3!}\left(x^3+x^2+x+1\right)(\exp(x))^{(3)} + \frac{3!}{1!2!}\left(x^3+x^2+x+1\right)'(\exp(x))^{(2)} \\
&\quad + \frac{3!}{2!1!}\left(x^3+x^2+x+1\right)''(\exp(x))' + \frac{3!}{3!0!}\left(x^3+x^2+x+1\right)^{(3)}(\exp(x)) \\
&= \left(x^3+x^2+x+1\right)(\exp(x)) + 3\left(3x^2+2x+1\right)(\exp(x)) + 3(6x+2)\exp(x) + 18\exp(x).
\end{aligned}$$

2.5.5 Théorème de Rolle

Le théorème de Rolle fut démontré par Michel Rolle uniquement pour les fonctions polynomiales, la démonstration de la généralisation aux fonctions dérivables est due à Pierre-Ossian Bonnet.

Théorème 70 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ tel que $f(a) = f(b)$, alors il existe un point $c \in\ ]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Le théorème de Rolle est intuitif, si la fonction à les mêmes images aux extrémités de l'intervalle $[a,b]$ alors elle admet soit un maximum soit un minimum ce qui correspond à l'existence d'un point dont la tangente est horizontal.

2.5.6 Théorème des accroissements finis

Le théorème des accroissements finis est une conséquence du théorème de Rolle.

Théorème 71 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} = f'(c).$$

2.5.7 Règle de l'Hôpital

Proposition 72 *Soit f et g deux fonctions dérivables au point a, si la limite $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$ alors la limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$ existe et possède la même limite.*

2.6 Formule de Taylor avec reste de Lagrange.

Théorème 73 *Soit a un réel, x dans le voisinage de a et f une fonction n fois dérivables sur l'intervalle $[a, b]$ admettant une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ alors il existe un élément ξ de $]a, b[$ tel que :*

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Remarque 74 *Cette formule est dite formule de Taylor avec reste de Lagrange.*

2.6.1 Application au calcul approché des fonctions

On peut obtenir une formule d'approximation à partir de la formule de Taylor en ne retenant que les n premiers termes.

$$f(x) \approx f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Dans l'approximation ainsi obtenue l'erreur absolue commise en arrêtant le calcul à l'étape n est donnée par :

$$E_n = \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right|.$$

On constate que pour des valeurs de x proches de a l'expression $\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ est décroissante et tend vers 0 quand n tend vers l'infini et comme $f^{(n+1)}(\xi)$ est une constante alors l'erreur E_n tend vers 0.

Ainsi ce qui permet aux calculateurs (de la calculatrice à l'ordinateur) d'évaluer une fonction autre qu'un polynôme ou une fraction rationnelle est le développement de Taylor tronqué (arrêté) à l'étape n, la valeur de n varie en fonction du calculateur, plus n est grand plus la valeur est précise.

Exemple 75 *On peut obtenir une expression permettant le calcul de e par la formule de Taylor de la fonction* e^x *développé au voisinage de* 0*. On considérera l'intervalle* $[0,2]$ *par exemple*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}.$$

Ainsi nous en déduisant que

$$e^1 = e = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1^n}{n!} + \frac{1^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}.$$

On ne retenant que les n premiers termes du développement on obtient un moyen de calculer e, alors

$$e \simeq 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1^n}{n!}.$$

L'erreur ainsi commise est

$$E_n = \frac{1^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi} \to 0.$$

Chapitre 3

Intégration

3.1 Primitive d'une fonction continue

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur D.

Définition 76 *Une fonction $F : D \to \mathbb{R}$ est une primitive de f dans D ssi*

1) *F est dérivable sur D.*

2) *$F' = f$ dans D.*

Proposition 77 *Si F et G sont deux primitives de f, alors $F - G$ est une constante sur tout intervalle $I \subset D$.*

Existence d'une primitive

Théorème 78 *Toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, possède une primitive, on écrit*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Et

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Remarque 79 *Il existe des fonctions continues mais leurs primitives n'ont pas forcement une écriture explicite.*

Théorème 80 (de la moyenne) *Soit $f \in C([a,b])$. Alors*

$$\exists c \in]a,b[: \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

Primitives des fonctions usuelles

C est une constante réelle.

$\int t^\alpha \, dt = \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int \dfrac{dt}{t} = \ln\|t\| + C$
$\int \exp(t) = \exp(t) + C$	$\int chtdt = sht + C$
$\int \dfrac{dt}{1+t^2} = arctg\ t + C$	$\int \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$
$\int \dfrac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln\left\|\dfrac{1+t}{1-t}\right\| + C$	$\int \dfrac{dt}{\sqrt{t^2+\alpha}} = \ln\left\|t + \sqrt{t^2+\alpha}\right\| + C$
$\int \cos t \, dt = \sin t + C$	$\int \sin t \, dt = -\cos t + C$
$\int \dfrac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C$	$\int \dfrac{dt}{\sin^2 t} = -cotg\ t + C$
$\int \dfrac{dt}{\cos t} = \ln\left\|tg\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\| + C$	$\int \dfrac{dt}{\sin t} = \ln\left\|\tan \dfrac{t}{2}\right\| + C$
$\int \tan t \, dt = -\ln\|\cos t\| + C$	$\int cotg\ t \, dt = \ln\|\sin t\| + C$

Exemple 81 *Calculer l'intégrale* $\int (3x^2 + e^{-x} - \cos 2x)dx$.

On a

$$\begin{aligned} I &= \int 3x^2 dx + \int e^{-x} dx - \int \cos 2x dx \\ &= 3\int x^2 dx - \int -e^{-x} dx - \frac{1}{2}\int 2\cos 2x dx \\ &= x^3 - e^{-x} - \frac{1}{2}\sin 2x + c. \end{aligned}$$

Exemple 82 *Calculer l'intégrale* $\int_0^2 x \exp\left(x^2\right) dx$.

On a

$$\int_0^2 x \exp\left(x^2\right) dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \times 2\right) x \exp\left(x^2\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 2x \exp\left(x^2\right) dx = \frac{1}{2} \left[\exp\left(x^2\right)\right]_0^2 = \frac{1}{2} \left(\exp(4) - 1\right).$$

Exemple 83 *Calculer l'intégrale* $\int_1^2 \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$.

On a

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx &= \int_1^2 \sqrt{x}dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 x^{\frac{1}{2}}dx + \int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}dx \\ &= \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^2 + \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^2 \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 + \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{8}-\frac{2}{3}\right) + \left(2\sqrt{2}-2\right) = \frac{10}{3}\sqrt{2}-\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

3.1.1 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Soit f, g deux fonctions Riemann intégrables, on a alors pour toute subdivision X de $[a,b]$:

1) $s(f,X) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(f,X)$. En particulier, on a

$$(b-a)\inf f([a,b]) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\sup f([a,b]).$$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ dite relation de Chasles.

3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

4) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

5) $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6) $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, (La réciproque est fausse).

7) $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

8) $|f|$ est Riemann intégrables, alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

3.1.2 Intégration par parties

Proposition 84 *Pour $f,g \in C^1(I,\mathbb{R})$, on a*

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Au cas ou $I = [a, b]$ et en utilisant les intégrales définies

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Exemple 85 *Calculer l'intégrale suivante*

$$I = \int \ln(x+1)\ dx.$$

Posons $u = \ln(x+1) \Rightarrow u' = \frac{1}{x+1}$ et $v' = 1 \Rightarrow v = x+1$. Ainsi

$$\begin{aligned} I &= (x+1)\ \ln(x+1) - \int\ dx \\ &= (x+1)\ \ln(x+1) + x + c. \end{aligned}$$

Exemple 86 *Calculer l'intégrale $\int_0^2 x\exp(x)\,dx$.*

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \exp(x)$ on a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^2 x\exp(x)\,dx &= [x\exp(x)]_0^2 - \int_0^2 \exp(x)\,dx = [x\exp(x)]_0^2 - [\exp(x)\,dx]_0^2 \\ &= (2\exp(2) - 0) - (\exp(2) - 1) = \exp(2) + 1. \end{aligned}$$

Changement de variable d'intégration

Proposition 87 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi : J \to I$ un difféomorphisme, on a*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Exemple 88 *Calculer l'intégrale $\int x\sqrt{1+x^2}dx$.*

Posons $u = 1 + x^2 \Rightarrow 2xdx = du$. Ainsi

$$I = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{3}u\sqrt{u}.$$

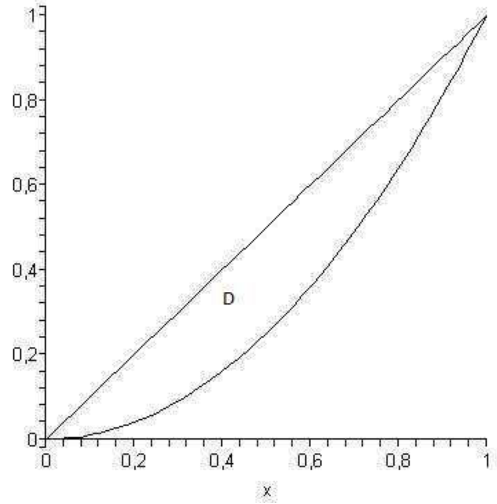

FIG. *3-1* –

D'où

$$I = \frac{1}{3}\left(1 + x^2\right)\sqrt{1 + x^2} + c.$$

Exemple 89 *Calculer l'intégrale* $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos\left(x^2\right) dx.$
On pose $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$ *et les bornes d'intégration deviennent* 0 *et* $\frac{\pi}{2} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2.$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos\left(x^2\right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(u)\, du = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\, du = \frac{1}{2}\left[\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3.2 Application du calcul intégral au calcul des aires

Une des applications du calcul intégral est le calcul de l'aire d'un domaine.

Exemple 90 *On souhaite calculer l'aire du domaine D (voir graphe) défini par :*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq x\right\}.$$

L'air du domaine D correspond à la différence entre l'aire sous la droite $y = x$ *et l'aire sous la* *courbe* x^2.

On a donc

$$A=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-(0-0)=\frac{1}{6}.$$

3.3 Méthode approchée (Méthode des points milieu)

Quand on ne peut pas trouver de primitives à une fonction on utilise des méthodes pour trouver une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$.

La méthode consiste à décomposer l'intervalle d'intégration $[a,b]$ en n parties $[x_0=a,x_1]\,,[x_1,x_2]\,,...$ $[x_{n-1},x_n=b]$ de même longueur $\dfrac{b-a}{n}$.

Puisque les points sont séparés par la même distance on peut démontrer que chaque point est donné par l'expression

$$x_k=a+k\frac{b-a}{n},k=\overline{0,n}.$$

Sur chaque sous intervalle $[x_i,x_{i+1}]$ on prend comme fonction, la fonction constante qui correspond à la valeur de f au point milieu de l'intervalle $f\left(\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$.

La valeur approchée de $\int_a^b f(x)\,dx$ est alors donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{a+k\frac{b-a}{n}+a+(k+1)\frac{b-a}{n}}{2}\right)\\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right).\end{aligned}$$

Exemple 91 *On désire trouver une valeur approchée de l'intégrale* $\int_1^4\frac{1}{x}dx$ *en effectuant une partition en* 10 *sous intervalles, donner l'intégrale approchée dans ce cas.*

Réponse : *On a* $[a,b]=[1,4]$.

On divise l'intervalle en 10 *parties égales.*

La longueur de chaque partie est donc de $\dfrac{4-1}{10}=\dfrac{3}{10}=0.3$

La valeur approchée de $\int_1^4 \frac{1}{x}dx$ *est donc donnée par :*

$$\begin{aligned}\frac{3}{10}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(1+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{3}{10}\right) &= 0.3\left(f\left(1.15\right)+f\left(1.45\right)+f\left(1.75\right)+f\left(2.05\right)+f\left(2.35\right)\right. \\ &\quad \left. +\ f\left(2.65\right)+f\left(2.95\right)+f\left(3.25\right)+f\left(3.55\right)+f\left(3.85\right)\right) \\ &= 0.3\left(\frac{1}{1.15}+\frac{1}{1.45}+\frac{1}{1.75}+\frac{1}{2.05}+\frac{1}{2.35}+\frac{1}{2.65}+\frac{1}{2.95}\right. \\ &\quad \left. +\ \frac{1}{3.25}+\frac{1}{3.55}+\frac{1}{3.85}\right) = 1.38283500.\end{aligned}$$

Chapitre 4

Equations différentielles

La plupart des problèmes posés par la physique, l'économie et les sciences d'ingénierie sont modélise par des équations différentielles ordinaires ou partielles, c'est-à-dire une équation dépendant d'une fonction inconnue ainsi que certaines de ses dérivées. La solution du problème étudier revient à résoudre l'équation différentielle obtenue.

4.1 Equations différentielles ordinaires

Définition 92 *On appelle équation différentielle une équation établissant une relation entre la variable indépendante x, la fonction inconnue $y = f(x)$ et un certain nombre de ces dérivées, on écrit*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = g(x).$$

Remarque 93 *Si la fonction inconnue de l'équation différentielle dépend d'une seule variable, l'équation différentielle est dite ordinaire.*

Exemple 94 $y'' - 2y' + 3y = 0$ *avec* $y = f(x)$, $\dfrac{dy}{dx} = y' = x$.

Définition 95 *On appelle ordre de l'équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée dans l'équation différentielle.*

Exemple 96 $y'' - 2y' + 3y = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 2.

$\dfrac{dy}{dx} = x$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.

Définition 97 *On appelle intégrale ou solution d'une équation différentielle toute fonction vérifiant cette dernière.*

Définition 98 *Résoudre ou intégrer une équation différentielle, c'est trouver l'ensemble de toutes ses solutions .*

Exemple 99 *La fonction* $y = \dfrac{x^2}{2} + C$ *où* C *est une constante est solution de l'équation* $y' = x$.
On a en effet $y' = \left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)' = \dfrac{2x}{2} = x$.
On remarque que cette équation différentielle admet une infinité de solutions.

4.2 Equations différentielles du premier ordre

Equations à variables séparées

Soit l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$y' = f(x, y). \tag{4.1}$$

Définition 100 *Si* $f(x, y)$ *à la forme* $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$*, alors l'équation est dite à variables séparées.*

Méthode de résolution

On a

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dx} &= f_1(x)f_2(y), \end{aligned} \tag{4.2}$$

pour $f_2(y) \neq 0$ l'équation (4.2) devient

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Par passage à l'intégration on obtient

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + c.$$

Remarque 101 *L'équation à variables séparables peut se mettre sous la forme*

$$M(x)dx + N(y)dy = 0.$$

Exemple 102 *Donner la solution de l'équation différentielle suivante*

$$x^2dx - \cos y dy = 0.$$

C'est une équation à variables séparées, intégrons les deux membres, on obtient

$$\int \cos y dy = \int x^2dx + c,$$

d'où

$$\sin y = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

Ainsi

$$y = \arcsin\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right).$$

Exemple 103 *Résoudre l'équation* $y' = -\dfrac{x}{y}$.
En effet

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow \int ydy = \int -xdx \\
&\Rightarrow \int ydy = \int -xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \\
&\Rightarrow y^2 + x^2 = 2C.
\end{aligned}$$

Ainsi les solutions de l'équation différentielle représentent les équations de cercles de centre $(0,0)$ *et de rayon* $\sqrt{2C}$.

Equations à variables séparables

Définition 104 *Toute équation différentielle ayant la forme*

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \tag{4.3}$$

est dite équation à variables séparables.

Méthode de résolution

Il suffit de diviser les deux membres de (4.3) par $N_1(y)M_2(x)$, on obtient une équation à variables séparées, c'est-à-dire de la forme (4.2).

Exemple 105 *Donner la solution de l'équation différentielle suivante*

$$2x\left(1+y\right)dx - \ ydy = 0. \tag{4.4}$$

(4.4) est une équation à variables séparables,on la réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} 2xdx &= \frac{y}{(1+y)}dy \\ &= \left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Intégrons les deux membres de (4.5) on obtient

$$\int 2xdx = \int \left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy + c,$$

d'où

$$x^2 = y - \ln|y+1| + c.$$

Ainsi

$$x = \sqrt{y - \ln|y+1| + c}.$$

4.2.1 Equations homogènes du premier ordre

La forme générale de ces équations est

$$y' = f(x, y).$$

Définition 106 *On dit que la fonction $f(x,y)$ est homogène de degré n par rapport aux variables x et y si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y), \tag{4.6}$$

ou

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = n. \tag{4.7}$$

Définition 107 *Toute équation de la forme (4.1) est dite homogène, si la fonction $f(x,y)$ est homogène de degré zéro.*

Méthode de résolution

Considérons l'équation différentielle homogène du premier ordre suivante

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \tag{4.8}$$

Faisons le changement de variable suivant

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}. \tag{4.9}$$

Remplaçons dans (4.9) $y = xu$, on obtient

$$u + x\frac{du}{dx} = f(x, xu). \tag{4.10}$$

Comme f est homogénéité (4.10) devient

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1,\ u). \tag{4.11}$$

Ainsi on peut réécrire (4.11) sous la forme suivante

$$\frac{du}{f(1,\ u)-u}=\frac{dx}{x}. \tag{4.12}$$

(4.12) est une équation à variables séparées on peut l'intégrer facilement.

Exemple 108 *Intégrer l'équation différentielle suivante*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}. \tag{4.13}$$

Il est évident que (4.13) est une équation homogène du premier ordre, en faisant le changement de variable approprié, (4.13) devient

$$-\frac{u+1}{u^2+2u-1}du=\frac{dx}{x}, \tag{4.14}$$

d'où

$$-\ln\left|u^2+2u-1\right|=\ln cx^2. \tag{4.15}$$

(4.15) implique

$$u^2+2u-1=\frac{1}{cx^2}. \tag{4.16}$$

Ainsi on a

$$y^2+2yx-x^2=c.$$

Exemple 109 *Résoudre l'équation* $y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

$$y'=\frac{x^2+y^2}{xy}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}.$$

On divise chaque membre de la fraction par y^2*.*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2+y^2}{y^2}}{\frac{xy}{y^2}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{y^2}+1}{\frac{x}{y}}.$$

On pose maintenant $u = \dfrac{y}{x}$ *et* $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$. *L'équation différentielle devient maintenant :*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{x^2}{y^2}+1}{\frac{x}{y}} \Rightarrow u + x\frac{du}{dx} = \frac{u^2+1}{u} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^2+1}{u} - u \\
&\Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \Rightarrow udu = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int udu = \int \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \frac{u^2}{2} = \ln(x) + c \Rightarrow u^2 = 2\ln(x) + 2C \\
&\Rightarrow u = \pm\sqrt{2\ln(x) + 2C}.
\end{aligned}$$

On remplace à présent $u = \dfrac{y}{x}$ *on obtient :*

$$y = \pm x\sqrt{2\ln(x) + 2C}.$$

4.2.2 Equations se ramenant aux équations homogènes

Les équations de la forme $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ où $(c, c_1) \neq (0,0)$ ne sont pas des équations homogènes, mais à l'aide d'un changement de variable approprié elles peuvent le devenir. D'où leurs appellations.

Méthode de résolution

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}. \tag{4.17}$$

Si $(c, c_1) = (0,0)$, alors (4.17) est homogène, sa résolution est évidente.

Si $(c, c_1) \neq (0,0)$ et $ab_1 \neq a_1b$, en faisant le changement de variable suivant

$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k, \end{cases} \tag{4.18}$$

et en substituant (4.18) dans (4.17), on obtient

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}. \tag{4.19}$$

Choisissons h, k de telle sorte qu'ils soient solution du système suivant

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

Ainsi (4.19) devient

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}. \tag{4.21}$$

Résolvons (4.21) et revenons aux anciennes variables, on obtient la solution de (4.17).

Si $(c, c_1) \neq (0, 0)$ et $ab_1 = a_1b$, nous utiliserons le changement de variable suivant

$$z = ax + by, \tag{4.22}$$

la condition $ab_1 = a_1b$, assure l'existence d'un certain λ de telle sorte que l'équation (4.17) devient

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx} = \frac{z + c}{\lambda z + c_1} + \frac{a}{b}. \tag{4.23}$$

L'équation (4.23) est une équation à variables séparables, donc on peut la résoudre facilement.

Remarque 110 *De la même manière on résout les équations différentielles dont la forme est*

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right), \tag{4.24}$$

où f est une fonction continue.

Exemple 111 *Intégrer l'équation différentielle suivante*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}. \tag{4.25}$$

L'équation (4.25) étant similaire à (4.17), de plus $(c, c_1) \neq (0, 0)$ et $ab_1 = -1 \neq 1 = a_1b$.

Faisons le changement de variable suivant

$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k. \end{cases} \tag{4.26}$$

Choisissons h, k *de telle sorte qu'ils soient solution du système*

$$\begin{cases} h + k - 3 = 0 \\ h - k - 1 = 0, \end{cases} \tag{4.27}$$

on trouve

$$h = 2, \ k = 1.$$

On obtient l'équation homogène

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}. \tag{4.28}$$

Posons $u = \frac{y_1}{x_1}$, *(4.28) devient*

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx_1}{x_1}. \tag{4.29}$$

Ainsi la solution de (4.29) est

$$arctgu - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) = \ln\left|cx_1\right|. \tag{4.30}$$

D'où la solution de (3.29) est

$$arctg\frac{y-1}{x-2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2\right) = \ln\left|c\left(x-2\right)\right|. \tag{4.31}$$

Exemple 112 *Intégrer l'équation différentielle suivante*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x+y-1}. \tag{4.32}$$

L'équation (4.32) est similaire à (4.17), de plus $(c, c_1) \neq (0, 0)$ *et* $ab_1 = 1 = a_1b$.

Faisons le changement de variable suivant

$$z = x + y \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}. \tag{4.33}$$

Combinons (4.32) et (4.33) on obtient

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z - 4}{z - 1} \tag{4.34}$$

(4.36) est équivalente à

$$\frac{z - 1}{2z - 4} dz = dx. \tag{4.35}$$

Intégrons (4.35) on obtient

$$z + \ln |z - 2| = 2x + c. \tag{4.36}$$

Substituons dans (4.36) la valeur de z, on trouve

$$x + y + \ln |x + y - 2| = 2x + c. \tag{4.37}$$

4.3 Applications en biologie

4.3.1 Croissance exponentielle

On considère une population donnée et on désigne par $x(t)$ son effectif à l'instant t. On suppose que le taux de croissance est proportionnel au nombre d'éléments de la population. On note par $a > 0$ la constante de proportionnalité.

Dans ce cas l'effectif de la population vérifie :

$$x'(t) = ax(t)$$

Cette équation est une équation différentielle à variable séparable qu'on peut résoudre facilement.

Exemple 113 (Croissance de bactéries) *Une population de bactéries croit selon un taux constant de* 0.2%. *Si on commence par* 1000 *bandes de bactéries, combien trouve t'on après* 2 *heures ?*

En effet : *Notons $x(t)$ l'effectif des bactéries à l'instant t. Puisque le taux de croissance est de 0.2% on obtient :*

$$\begin{aligned} x'(t) &= 0.2 \times x(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0.2 \times x(t) \Rightarrow \frac{dx}{x} = 0.2dt \\ &\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int 0.2dt \Rightarrow \ln(|x|) = 0.2t + C \\ &\Rightarrow x = \exp(0.2t + C) \Rightarrow x = \exp(C)\exp(0.2t) \\ &\Rightarrow x = C'\exp(0.2t). \end{aligned}$$

Pour trouver la valeur de C' on remplace $t = 0$ et on obtient

$$x(0) = 1000 = C'\exp(0) \Rightarrow C' = 1000.$$

On a $x(t) = 1000\exp(0.2t)$ donc après 2 heures on obtient :

$$x(2) = 1000\exp(0.2 \times 2) = 1491.8.$$

Exemple 114 (Croissance pondérale d'un organisme) *Pendant une période de $t = 0$ à $t = t_1$ du développement d'un organisme, on admet que la vitesse de croissance pondérale est proportionnelle à son poids.*

Notons par p le poids (en g), le temps est exprimé en jours.

Si on suppose que le taux d'accroissement est donné par 0.1 et qu'au départ l'organisme pèse 1 gramme quel est le poids de l'organisme après 3 jours ?

En effet :

On obtient l'équation suivante :

$$\frac{dp}{dt} = (0.1)\,p.$$

C'est une équation à variables séparables, la solution est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= (0.1)\,p \Rightarrow \frac{dp}{p} = (0.1)\,dt \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int (0.1)\,dt \\ &\Rightarrow \ln(p) = (0.1)\,t + C \Rightarrow p = \exp((0.1)\,t + C) \\ &\Rightarrow p = \exp(C)\exp((0.1)\,t).\end{aligned}$$

On pose $\exp(C) = C'$ *on obtient alors :*

$$\Rightarrow p(t) = C' \exp((0.1)\,t).$$

Pour trouver C' *on remplace dans* $p(0) = 1 \Rightarrow C' = 1.$
Ainsi la fonction p *est donnée par*

$$p(t) = \exp((0.1)\,t).$$

Pour connaitre le poids après 3 *jours il suffit de remplacer* $t = 3$ *et on a :*

$$p(3) = \exp(0.3) = 1.349\,9.$$

4.3.2 Croissance avec ralentissement (Propagation d'une maladie)

On considère une population donnée, on souhaite étudier la propagation d'une maladie parmi les individus de cette population. On désigne par $M(t)$ l'effectif des individus malades à l'instant t.

On suppose que le taux de propagation de la maladie est proportionnel au produit du nombre d'éléments saints par celui des éléments infectés. On note par $k > 0$ la constante de proportionnalité.

Dans ce cas l'effectif de la population vérifie :

$$M'(t) = kM(t)\,(E - M(t)).$$

Cette équation est une équation différentielle à variable séparable qu'on peut résoudre en recourant à une décomposition en éléments simples.

Exemple 115 *Un groupe de* 150 *oiseaux migrateurs est affecté par une maladie contagieuse, le nombre d'individus malades au départ est de* 8*.*
On suppose que le taux de propagation de la maladie est proportionnel au produit du nombre d'oiseaux saints par celui des oiseaux infectés.
On suppose que la constante de proportionnalité est $k = 0.15$*. Le temps est exprimé en jours.*
Combien d'oiseaux infectés trouve t'on après 15 *jours ?*
Réponse :
Notons $M(t)$ *l'effectif des oiseaux malades à l'instant* t*.*
Puisque le nombre d'oiseaux saints est donné par $150 - M(t)$*.*
L'équation est donnée par :

$$M'(t) = (0.15)\, M(t)\, (150 - M(t)).$$

Cette équation est à variables séparables, on peut la résoudre par décomposition en éléments simples :

$$\frac{dM}{dt} = (0.15)\, M(150 - M) \Rightarrow \frac{dM}{M(150 - M)} = (0.15)\, dt \Rightarrow \int \frac{dM}{M(150 - M)} = \int (0.15)\, dt.$$

On a $\dfrac{1}{M(150 - M)} = \dfrac{1}{150M} - \dfrac{1}{150(M - 150)}$*, d'où on obtient :*

$$\begin{aligned}
\int \frac{dM}{M(150 - M)} &= \int (0.15)\, dt \Rightarrow \int \left(\frac{1}{150M} - \frac{1}{150(M - 150)} \right) dM = \int (0.15)\, dt \\
&\Rightarrow \ln(|150M| - \ln(|150(M - 150)|)) = 0.15t + C \\
&\Rightarrow \ln\left(\left| \frac{150M}{150(M - 150)} \right| \right) = 0.15t + C \Rightarrow \left(\left| \frac{M}{(M - 150)} \right| \right) = \exp(0.15t + C) \\
&\Rightarrow \left(\frac{M}{(150 - M)} \right) = C' \exp(0.15t) \Rightarrow M = (150 - M)\, C' \exp(0.15t) \\
&\Rightarrow M + MC' \exp(0.15t) = 150C' \exp(0.15t) \\
&\Rightarrow M = \frac{150C' \exp(0.15t)}{1 + C' \exp(0.15t)}.
\end{aligned}$$

Pour trouver la valeur de C on remplace $t = 0$ et on obtient

$$\begin{aligned} M(0) &= 8 = \frac{150C'}{1+C'} \Rightarrow C' = \frac{4}{71} \Rightarrow M = \frac{150 \times \frac{4}{71} \times \exp(0.15t)}{1 + \frac{4}{71} \times \exp(0.15t)} \\ &\Rightarrow M = \frac{600 \times \exp(0.15t)}{71 + 4 \times \exp(0.15t)}. \end{aligned}$$

Donc pour trouver le nombre d'oiseaux infectés après 15 *jours on remplace* $t = 15$ *:*

$$M(15) = \frac{600 \times \exp(0.15 \times 15)}{71 + 4 \times \exp(0.15 \times 15)} = 52.250.$$