

THEORIE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Cours rédigé par : Dr. TILMATINE AMAR
Faculté des sciences de l'Ingénieur, université de sidi-Bel-Abbès.

INTRODUCTION

Il existe trois régimes distincts en électromagnétisme, chacun différent de l'autre suivant la variation en fonction du temps.

a) Régime stationnaire (R.S)

Phénomènes indépendants du temps $\partial/\partial t=0$;

Toutes les grandeurs électriques et magnétiques ($E, H, q\dots$) sont constantes.

R.S: Electrostatique (Chapitre 1) + Magnétostatique (Chapitre 2)

b) Régime quasi-stationnaire (RQS)

Phénomènes variables avec le temps $\partial/\partial t \neq 0$ (Chapitre 3);

Exemple: $q = q_0 \cos(2\pi ft)$

Si $f < 1$ kHz \Rightarrow RQS

Si $f > 1$ kHz \Rightarrow Régime variable

c) Régime variable (R.V)

Phénomènes très variables avec le temps

Ne concerne que les hautes fréquences > 1 kHz.

Dans le RV le champ électromagnétique devient une onde électromagnétique qui se propage dans l'air.

SOMMAIRE :

Chapitre I : Electrostatique

Chapitre II : Magnétostatique

Chapitre III : Régime Quasi-Stationnaire

Chapitre IV : Régime Variable- Equations de Maxwell

Chapitre V : Propagation du champ électromagnétique

Chapitre VI : Réflexion et transmission des ondes électromagnétiques.

CHAPITRE I

ELECTROSTATIQUE

Définition : L'électrostatique est l'étude des interactions électriques entre des charges constantes et immobiles. Autrement dit, pas de courant électrique.

I. STRUCTURE ATOMIQUE DE LA MATIERE

1. L'atome

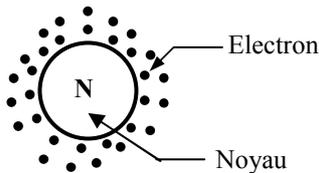


Figure 1

Le noyau comprend des :

- charges positives appelées protons
- particules neutres appelées neutrons

Les électrons sont des charges négatives qui gravitent autour du noyau.
En valeur absolue, les charges de l'électron et du proton sont égales :

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$$

Les caractéristiques des particules sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

Particule	Masse	Charge
Electron	$m_e = 9,1091 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	- e
Proton	$m_p = 1,6725 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	+ e
Neutron	$m_n = 1,6748 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	0

A l'état fondamental, il y a autant d'électrons que de protons : l'atome est une particule neutre.

L'atome est ionisé s'il cède ou acquiert un électron :

- c'est un ion positif s'il perd 1 ou plusieurs électrons.
- c'est un ion négatif s'il gagne 1 ou plusieurs électrons.

2. Nuage électronique

Le nuage électronique est formé d'électrons tournant à grande vitesse autour du noyau selon des trajectoires très complexes. Les électrons sont répartis sur les couches selon les quantités suivantes :

K 2	N 32	
L 8	O 50	
M 18	P 72	Q 98

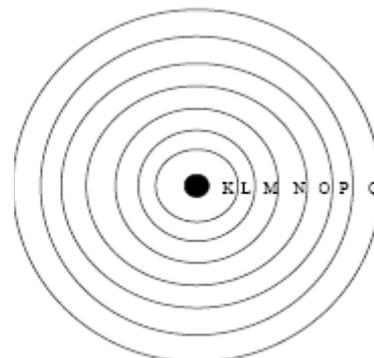


Fig. 2.2 Le nuage électronique.

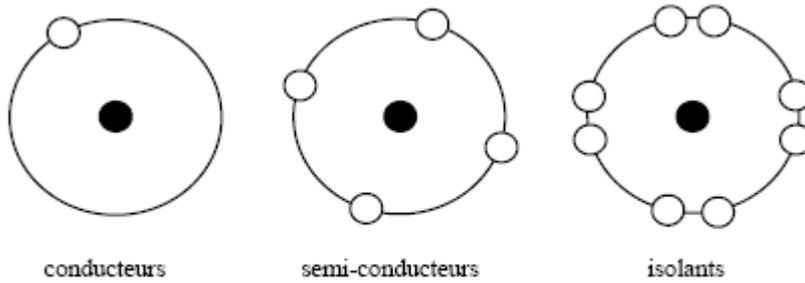
3. Couches périphériques

Définition : C'est la couche la plus extrême d'un atome. Ses électrons sont appelés *électrons périphériques* ou *électrons de valence*.

La *couche périphérique* d'un atome ne peut pas posséder plus de huit électrons.

Important : Les propriétés électriques dépendent des électrons de la couche périphérique.

<i>Conducteurs :</i>	<i>1 à 3 électrons de valence</i>
<i>Semi-conducteurs :</i>	<i>4 électrons de valence</i>
<i>Isolants :</i>	<i>5 à 8 électrons de valence</i>



Représentation des couches périphériques.

- Les bons conducteurs ont leur dernière couche incomplète. Ils céderont facilement leurs électrons (électrons libres).
- Les isolants ont leur dernière couche saturée ou presque saturée. Ils ne céderont pas facilement leurs électrons (électrons liés).
- Les semi-conducteurs sont des matériaux dont la dernière couche est formée de 4 électrons. Le silicium et le germanium sont les semi-conducteurs les plus utilisés.

II. LOI DE COULOMB (1785)

Charles A. de Coulomb : ingénieur français (1736 – 1806).

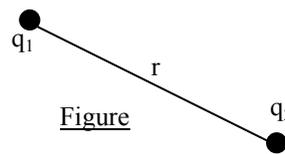
Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2

Force de Coulomb : $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Unités : F [N] ; q_1, q_2 [C] ; r[m]

ϵ_0 : constante diélectrique du vide.

Vide, air... $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ [F/m]



Figure

$F_{12} = F_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

La charge q_1 exerce une force F_{12} sur q_2 , de même que la charge q_2 exerce une force F_{21} sur q_1 .

Attraction et répulsion :

Si q_1 et q_2 ont même signe \Rightarrow Force de répulsion.

Si q_1 et q_2 ont des signes opposés \Rightarrow Force d'attraction.

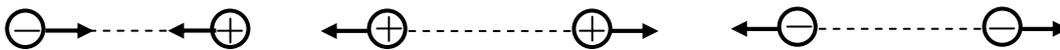
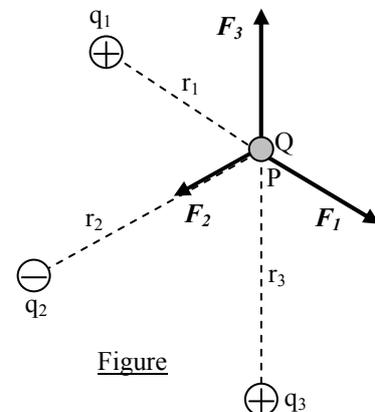


Figure : Forces entre charges électriques de signes identiques ou opposés

Une charge Q placée dans une région où se trouvent plusieurs autres charges est soumise à l'action de toutes ces charges :

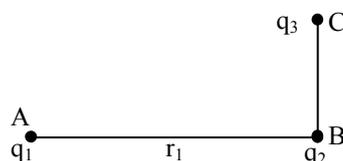
$F(P) = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$



Figure

Exercice :

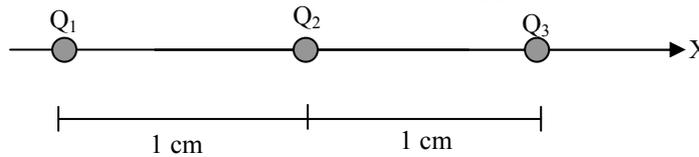
Etant donné la disposition des charges de la figure, trouver la force résultante appliquée sur la charge q_3 .



Figure

Exercice :

Deux charges ponctuelles sont situées sur l'axe des abscisses comme suit (voir figure). On donne $Q_1 = 8 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, $Q_2 = -10^{-9} \text{ C}$. Estimer la force suivant l'axe des x appliquée sur une troisième charge $Q_3 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$?



III. CHAMP ELECTRIQUE

1. Définition

Le champ électrique est une grandeur physique qui exerce une force électrique sur une particule chargée.

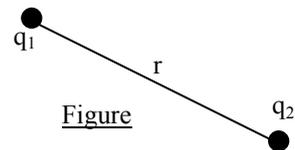
Remarque : à première vue, il peut sembler que le champ électrique n'a qu'une signification mathématique, en l'occurrence un vecteur qui permet de calculer aisément les forces. Mais le champ électrique a deux autres caractéristiques importantes. D'une part il sert à éliminer le concept d'action à distance, c'est l'entité qui de proche en proche transmet l'interaction d'une charge à une autre. Le champ électrique a, d'autre part, véritablement une signification physique, car il possède de l'énergie et de l'impulsion.

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} q_2 = q_2 E_1$$

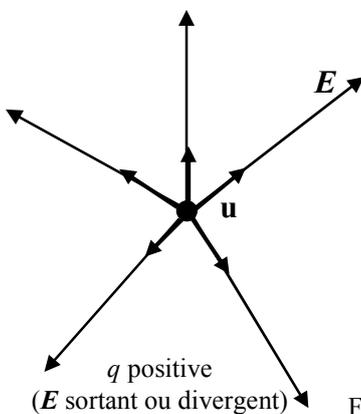
La grandeur $E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ est l'expression du champ électrique créé par q_1 .

De même, sachant que : $F_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} q_1 = q_1 E_2$

La grandeur $E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ est l'expression du champ électrique créé par q_2 .



Sens du champ électrique :



$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} u$$

u est un vecteur unitaire radial issu de la charge

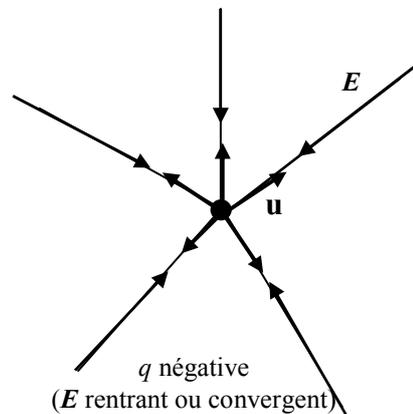


Figure : Le champ électrique est un vecteur

Unité de E :

Comme par définition nous avons $E = F / q$: donc $[E] = N / C$.

En général on utilise une autre unité :

Vu que $E = -dV / dx$: Alors $[E] = V / m$.

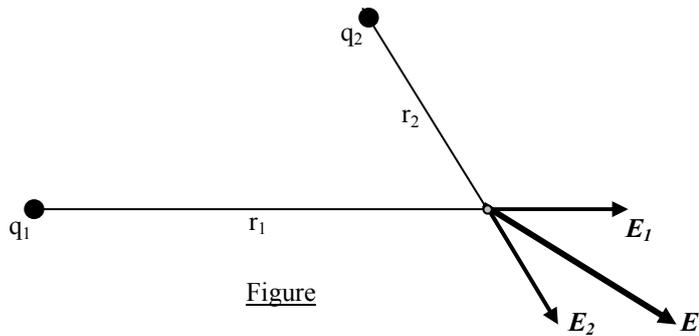
2. Champ d'un ensemble de charges

Le champ électrique produit par un ensemble de charges ponctuelles est égal à la somme vectorielle des champs produits par toutes les charges.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} u_i$$

Cas de 2 charges :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} \mathbf{u}_1 + \frac{q_2}{r_2} \mathbf{u}_2 \right)$$



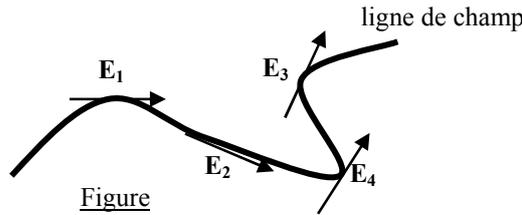
Figure

3. Lignes de champ

Définition

Une ligne de champ est une ligne qui est tangente en chacun de ses points au champ électrique en ce point.

Exemple

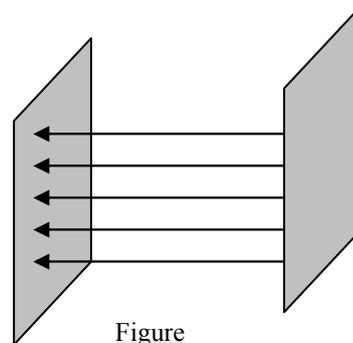


Figure

Ligne de champ uniforme :

C'est une ligne de champ où le module est partout le même en chacun de ses points et qui possède une seule direction.

Exemple: Le champ existant entre deux plans chargés est uniforme (sera démontré par la suite).



Figure

Déplacement électrique

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

Exercice :

Quatre charges sont arrangées sur les coins d'un carré comme montré dans les figures ci-dessous. Dans quel case(s) le champ électrique est-il égal à zéro au centre du rectangle ? Supposez que toutes les charges ont la même valeur et la seule différence est le signe.

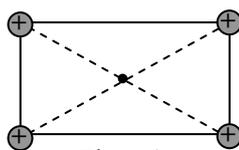


Figure 1

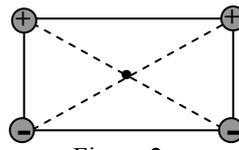


Figure 2

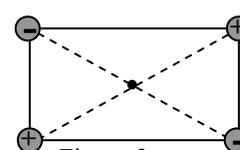


Figure 3

IV. REPARTITION DES CHARGES

1. Ligne chargée

$$dq = \rho dl \Rightarrow q = \int \rho dl$$

avec ρ densité de charge linéique (C/m)

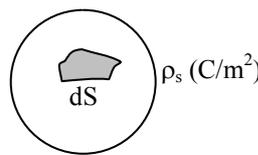


Figure 17

2. Surface chargée

$$dq = \rho_s ds \Rightarrow q = \int_S \rho_s ds$$

avec ρ_s densité de charge surfacique (C/m²)



(S) Figure 18

3. Volume chargé

$$dq = \rho_v dv \Rightarrow q = \int_V \rho_v dv$$

avec ρ_v densité de charge volumique (C/m³)

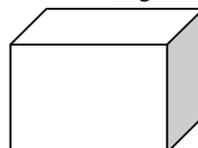


Figure 19

Exercice :

Calculer le champ et le potentiel électriques produits par un filament rectiligne, infiniment long, portant une charge ρ par unité de longueur.

Exercice :

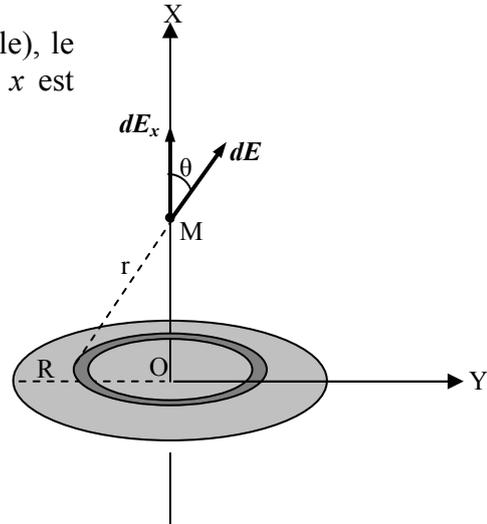
Soit un disque de rayon R chargé uniformément en surface avec une densité surfacique $\sigma > 0$.

- 1) Calculer le champ électrique $E(M)$ en un point quelconque M sur l'axe du disque.
- 2) On fait tendre R vers l'infini. En déduire l'expression du champ $E(M)$.

Solution :

1) On choisit comme élément de surface dS une couronne circulaire comprise entre les cercles de rayons y et $y+dy$. L'élément de surface dS porte une charge $dq = \sigma dS$

Par raison de symétrie (il s'agit d'une surface équipotentielle), le champ crée par cette couronne en un point M d'abscisse x est porté par Ox et a pour expression :



Figure

$$dE_x = dE \cos \theta$$

$$dE_x = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = k \frac{\sigma dS}{r^2} \cos \theta$$

avec

$$dS = 2\pi y \cdot dy$$

$$\cos \theta = x / r$$

et

$$r^2 = x^2 + y^2$$

D'où

$$dE_x = k \frac{\sigma 2\pi y dy \cdot x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Le champ total est donc également porté par Ox , et vaut :

$$E = \int dE_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[-(x^2 + y^2)^{-1/2} \right]_0^R$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right]$$

2) Si on fait tendre R vers l'infini, on déduit :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Autre solution :

Le disque porte une charge totale

$$q = \rho_s S = \rho_s \pi R^2$$

La couronne comprise entre les cercles de rayons

r et $r+dr$ porte une charge dq :

$$dq = \rho_s ds = \rho_s 2\pi r dr$$

et crée au point M un potentiel dV :

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_s 2\pi r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

Soit donc :

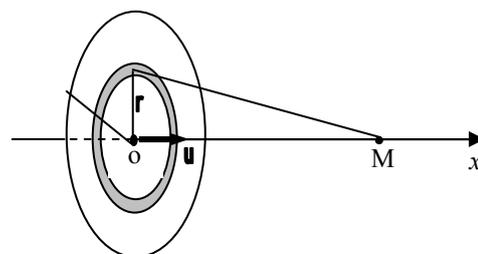


Figure 16

$$V(x) = \int_0^R \frac{\pi \rho_s}{4 \pi \epsilon_0} \frac{2r dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\rho_s}{4 \epsilon_0} \int_0^R \frac{d(r^2+x^2)}{\sqrt{r^2+x^2}} = \int_0^R d(\sqrt{r^2+x^2})$$

D'où

$$V(x) = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \left[\sqrt{r^2+x^2} \right]_0^R = V(x) = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} (\sqrt{R^2+x^2} \pm x)$$

Au centre du disque (x=0):

$$V(0) = \frac{\rho_s R}{2 \epsilon_0}$$

Ensuite, on calcule le champ

$$E = -\frac{dV}{dx} = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \frac{d\left[\left(R^2+x^2\right)^{1/2} \pm x\right]}{dx}$$

$$d'où E = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \mp 1 \right)$$

$$\text{Pour } x > 0, \quad E = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \right)$$

$$\text{Pour } x < 0, \quad E = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \left(-1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \right)$$

Exercice :

Calculer le champ créé par un anneau mince chargé uniformément, sur un point se trouvant sur l'axe.

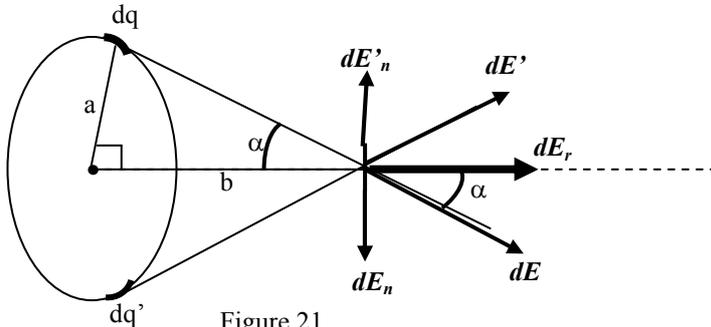


Figure 21

L'élément différentiel est dans ce cas un petit arc d'angle dθ, de longueur a dθ.

Sa charge vaut alors dq = λ a dθ .

$$\text{L'élément } dq \text{ produit un champ } dE = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda a d\theta}{4 \pi \epsilon_0 (a^2+b^2)}$$

A chaque charge dq lui correspond une charge dq' qui produit un champ dE'. Les composantes verticales de dE et dE' qui sont égales et opposées, s'annulent.

Le champ résultant produit par le cercle est donné par : dEr = dE cosα

$$\text{Soit, donc : } E = \int dE = \int \frac{\lambda a d\theta}{4 \pi \epsilon_0 (a^2+b^2)} \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{r} = \frac{b}{(a^2+b^2)^{1/2}}$$

$$E = \int \frac{\lambda a b d\theta}{4 \pi \epsilon_0 (a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{\lambda a b}{4 \pi \epsilon_0 (a^2+b^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\lambda a b}{4 \pi \epsilon_0 (a^2+b^2)^{3/2}} 2\pi a$$

Comme $Q = \lambda 2\pi a$ représente la charge totale de l'anneau :

$$E = \frac{Qb}{4\pi\epsilon_0(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

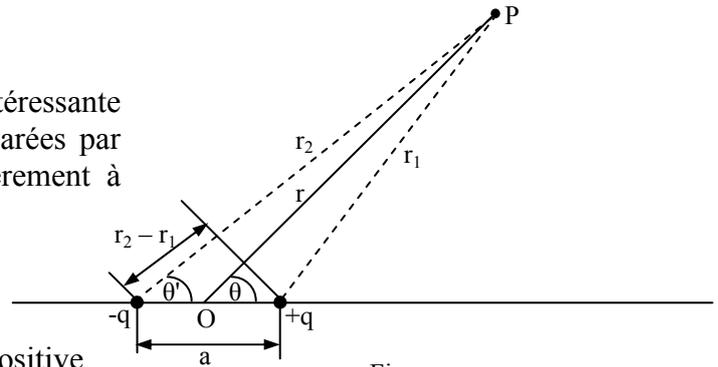
V. DIPOLE ELECTRIQUE

Le dipôle électrique est une disposition très intéressante constituée de deux charges égales et opposées séparées par une très petite distance, qu'on retrouve particulièrement à l'échelle atomique.

Le moment électrique dipolaire est donné par :

$$p = q a,$$

où a est dirigé de la charge négative vers la charge positive.



Figure

Le potentiel crée par le dipôle au point P est :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}$$

On peut écrire d'après la figure : $r_2 - r_1 = a \cos\theta$

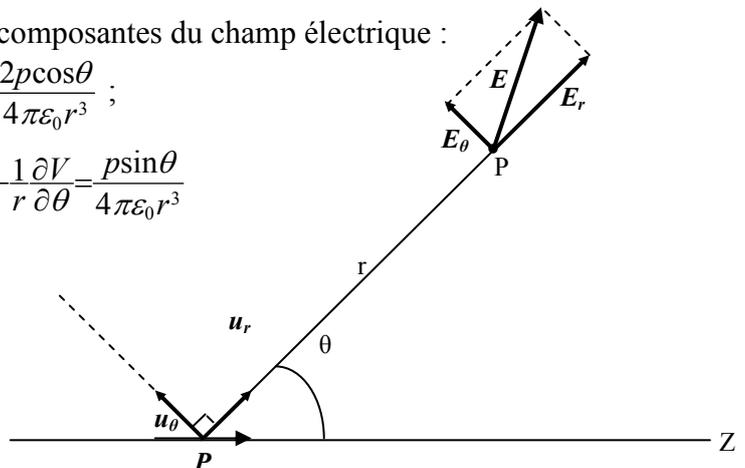
Si la distance a est très petite par rapport à r, on peut poser:

$$r_2 - r_1 = a \cos\theta \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = r^2$$

Ce qui donne : $V = \frac{q a \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

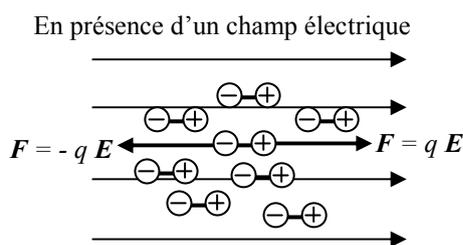
Le calcul en coordonnées polaires donne deux composantes du champ électrique :

- Une composante radiale E_r : $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$;
- Une composante transversale E_θ : $E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

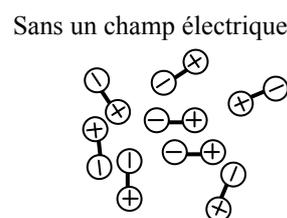


Figure

Un dipôle placé dans un champ électrique est soumis à un couple qui tend à l'aligner suivant la ligne de ce champ.



Figure

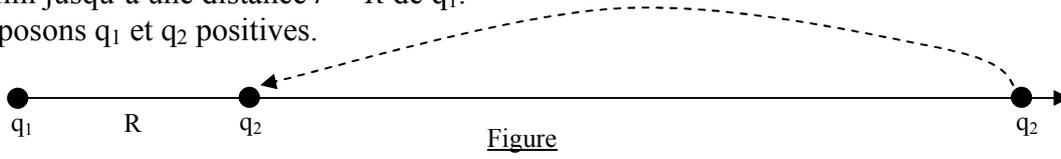


Figure

VI. POTENTIEL ELECTRIQUE

On considère une charge q_1 placée à l'origine d'un repère. On apporte une autre charge q_2 de l'infini jusqu'à une distance $r = R$ de q_1 .

Supposons q_1 et q_2 positives.



Figure

Le travail fourni W pour vaincre la force de répulsion de q_1 est

$$W = -\int_{\infty}^R \mathbf{F} d\mathbf{r} = -\int_{\infty}^R F dr = -\int_{\infty}^R q_2 E_1 dr$$

avec $E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$W = -\int_{\infty}^R \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{1}{r^2} dr = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^R = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Suivant le principe de conservation de l'énergie, le travail fourni W est emmagasiné par la charge q_0 sous forme d'énergie potentielle E_p ,

Soit $W = E_p$.

On pose donc : $E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R} = q_1 V_2$

avec $V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R}$ potentiel crée par q_2

On peut également écrire : $E_p = q_2 V_1$

avec $V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R}$ potentiel crée par q_1

$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ est donc l'expression du potentiel crée par une charge q

et $E_p = qV$ est l'énergie potentielle d'une charge q soumise à un potentiel V .

Unité

soit en J/C car par définition $V = E_p / q$

ou bien en Volt, qui est l'unité la plus utilisée.

Le potentiel crée par plusieurs charges en un point P peut être déterminé à partir de l'expression suivante :

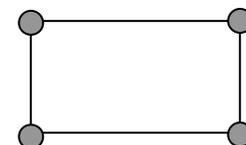
$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_3} + \dots = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}$$

Conclusion : Une charge ponctuelle produit :

- Un champ (vectoriel) $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}$.
- Un potentiel (scalaire) $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Exercice :

Les charges $Q_1 = +4 \mu\text{C}$, $Q_2 = -4 \mu\text{C}$, $Q_3 = +5 \mu\text{C}$, et $Q_4 = -7 \mu\text{C}$ sont placées sur un rectangle de longueur 5cm et de largeur 3cm, comme représenté à la figure. Calculer l'énergie potentielle de cette configuration de charges.



Figure

Exercice :

Trois charges ponctuelles sont apportés de l'infini aux positions suivantes sur l'axe des abscisses: $Q_1 = 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ à $x = -1 \text{ m}$, $Q_2 = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ à $x = 0 \text{ m}$, et $Q_3 = 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ à $x = 1 \text{ m}$. Quelle est l'énergie potentielle de cette configuration de charges?

Exercice :

Deux charges $Q_1 = 1 \text{ C}$ et $Q_2 = -1 \text{ C}$ sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral, de 4 cm de côté.

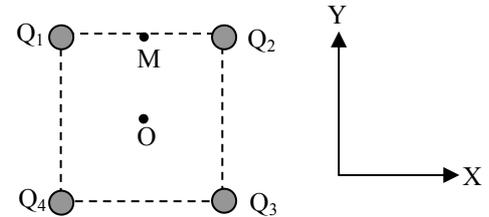
1. Calculer le potentiel au point P.
2. Quelle est la direction du champ électrique au point P?

Exercice :

Aux sommets d'un carré ABCD de côté 2m sont placées les charges suivantes :

$Q_1 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$; $Q_2 = -8 \cdot 10^{-8} \text{ C}$; $Q_3 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$; $Q_4 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C}$;

1. Calculer le champ et le potentiel électriques au centre O du carré.
2. Calculer le potentiel au point M milieu de AB.



Figure

VII. RELATION ENTRE E et V

Pour placer une charge q en un point où règne un potentiel V, il faut fournir un travail W :

$$W = -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Ce travail est emmagasiné par la charge q sous forme d'énergie potentielle E_p :

$$E_p = qV$$

$$W = E_p \Rightarrow dW = dE_p \Rightarrow -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q dV \Rightarrow -q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = q dV \Rightarrow dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (1)$$

D'autre part, on peut poser que :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) (dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y + dz \mathbf{u}_z) = \mathbf{grad} V \cdot d\mathbf{r} \quad (2)$$

D'après les équations 1 et 2, on obtient:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V$$

Conclusions:

$$1) \mathbf{E} = -\mathbf{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

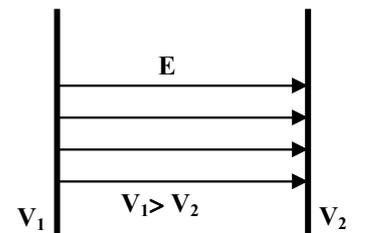
Le champ électrostatique a le sens des potentiels décroissants.

Suivant l'axe des x, nous avons : $\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{u}_x$.

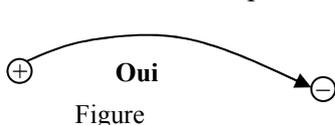
Le champ électrique est toujours dirigé du potentiel le plus élevé au potentiel le plus bas.

$$2) \text{rot} \mathbf{E} = \text{rot}(-\mathbf{grad} V) = 0$$

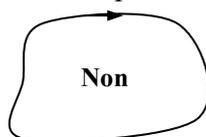
D'après cette relation mathématique, on déduit que le champ électrostatique est non tourbillonnant. C'est-à-dire que la ligne de champ électrique ne se referme jamais sur elle-même. Les lignes de champ électrique ne se referment que sur des charges électriques.



Figure



Figure



Figure

$$3) \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\text{En effet, nous avons : } \text{rot} \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \int \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Le long d'un contour fermé quelconque, dans le quel on définit deux points A et B :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (V_A - V_B) + (V_B - V_A) = 0$$

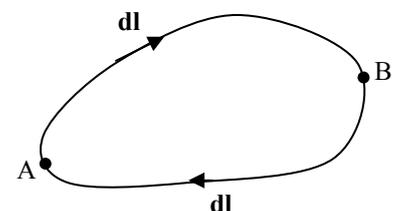


Figure 34

VIII. SURFACE EQUIPOTENTIELLE

Définition :

C'est une surface où le potentiel est constant et partout le même.

Exemple: charge ponctuelle q

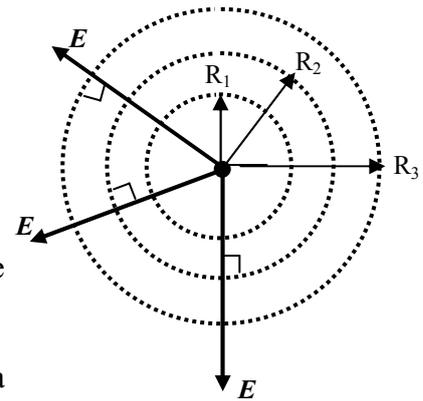
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Le potentiel est constant si on pose $r = R = \text{constante}$;

Chaque sphère de rayon R constant (R_1, R_2, R_3) représente donc une surface équipotentielle.

Règle de base : le champ électrique est toujours perpendiculaire à la surface équipotentielle.

Sens de parcours de la boucle = sens de $d\mathbf{l}$



Figure

Exercice :

Montrer que le champ électrique est perpendiculaire à la surface équipotentielle.

Solution :

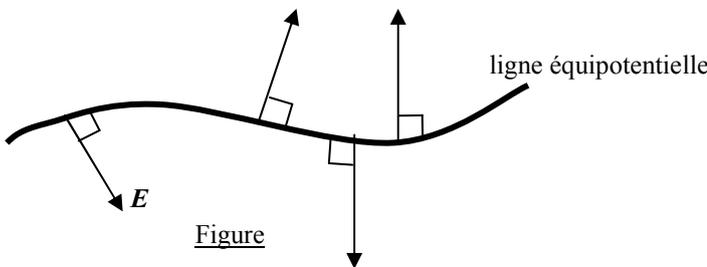
Soit OPQR un plan uniformément chargé, c'est donc une surface équipotentielle située dans le plan XOY

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

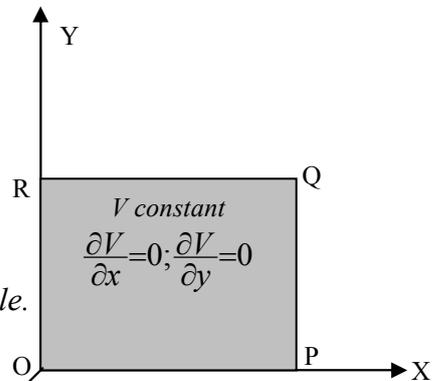
Comme $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ donc $\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{u}_z$

Le champ électrostatique est perpendiculaire à la surface équipotentielle.

Ligne équipotentielle :



Figure



Figure

IX. THEOREME DE GAUSS

1. Flux électrique

Flux électrique : $\Phi_e = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$

Flux magnétique : $\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$

Surface non fermée

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int E ds \cos\theta$$

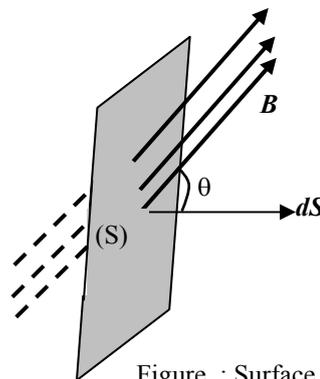


Figure : Surface non fermée

Surface fermée

Surface globale = surface S_1 (base supérieure) + surface S_2 (base inférieure) + surface latérale S_3 .

$$\Phi_e = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_2 + \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_3$$

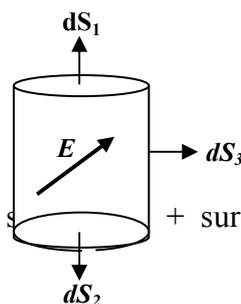


Figure : Surface fermée

Remarques:

- Les vecteurs $d\mathbf{S}$ relatifs à la surface fermée sont perpendiculaires à la surface considérée et sortants.
- Quand le flux est positif, il est « sortant ». Quand il est négatif, le flux est « entrant ».
- La notion de « flux » ne signifie pas vraiment qu'il y a un mouvement de quelque chose à travers la surface.

2. Théorème de Gauss

$$\Phi_e = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint E dS \cos \theta = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \cos \theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega$$

$d\Omega$: Angle solide sous lequel on voit dS à partir de q (cône).

Pour une surface fermée $\oint d\Omega = 4\pi$

On obtient alors

$$\Phi_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Donc $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{\epsilon}$

Théorème de Gauss:

Le flux électrique à travers une surface fermée quelconque est égal au rapport q/ϵ_0 , où q représente la somme des charges se trouvant à l'intérieur de cette surface.

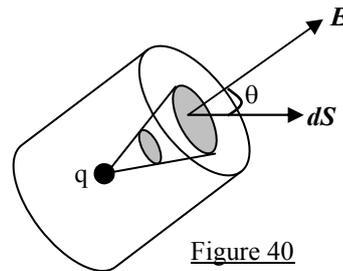


Figure 40

Autre démonstration (plus simple) :

On considère comme surface fermée une sphère de rayon r .

les vecteurs \mathbf{E} et $d\mathbf{S}$ sont tous les deux radiaux

Donc : $\varphi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint E dS = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS$

comme r est constant sur toute la surface de la sphère :

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

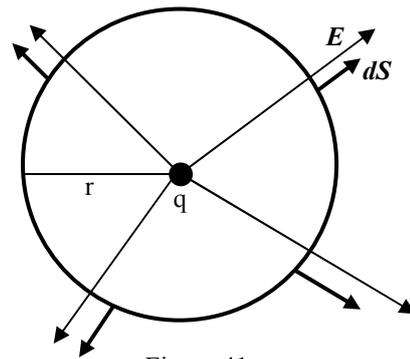


Figure 41

Cas général :

Les charges se trouvant à l'extérieur de la surface fermée ne sont pas considérées dans le théorème de Gauss.

$$\varphi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + \dots + \frac{q_n}{\epsilon_0} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Forme différentielle :

$$\Phi_e = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \text{div} \mathbf{E} \, dv ;$$

si la charge est uniformément répartie dans un volume V on pose :

$$q = \int_V \rho_v \, dv$$

où ρ_v densité de charge volumique

D'où $\int_V \text{div} \mathbf{E} \, dv = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v \, dv$

Soit donc, $\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$

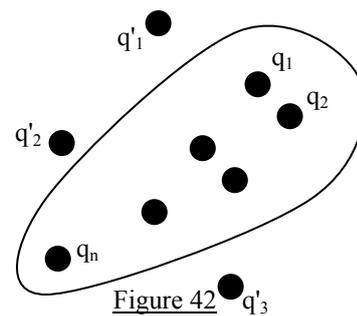


Figure 42

Exercice : Champ d'une charge ponctuelle

On choisit comme surface fermée une sphère de rayon r. La surface de Gauss doit respecter la symétrie du problème, le champ en tout point de la surface doit être constant.

Exercice :

On considère une sphère de rayon R possédant une charge superficielle q de densité ρ_s. Déterminer le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

Exercice :

Déterminer le champ électrique produit par un filament rectiligne possédant une charge uniforme de densité ρ, en utilisant le théorème de Gauss.

3. Equations de Laplace et de Poisson

$$\text{div}E = \text{div}(-\text{grad}V) = -\Delta V = -\Delta V = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

Soit $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$ (Relation de Poisson)

Si $\rho_v = 0$: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ (Equation de Laplace)

Exercice :

Utiliser l'équation de Laplace pour déterminer la distribution du potentiel et le champ électrostatique dans la région située entre deux plans parallèles portés aux potentiels V₁ et V₂ (V₁>V₂).

Exercice :

Résoudre l'exercice précédent, en considérant qu'il existe une charge volumique de densité ρ_v entre les deux plans.

X. CAPACITE- CONDENSATEUR

1. Conducteur unique

$$C = q / V$$

C : capacité du conducteur ; q: charge du conducteur ; V: potentiel du conducteur

Unité : [C] = C / V ;

En général on utilise comme unité le Farad et ses sous multiples

[C]=Farad F

Exemple: Sphère chargée (que ce soit en volume ou en surface)

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 R$$

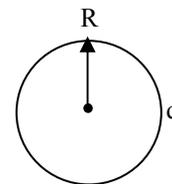


Figure 47

2. Deux conducteurs (condensateur) :

Si V₁ et V₂ sont les potentiels de ces conducteurs, la capacité du système est définie par : $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$.

Tout système constitué de deux conducteurs quelconques séparés par un isolant est un condensateur.

La capacité du condensateur est $C = q / U$.

où U = V₁ - V₂ représente la d.d.p entre les deux conducteurs.

V₁, V₂ potentiels des deux conducteurs.

Les condensateurs les plus connus sont :

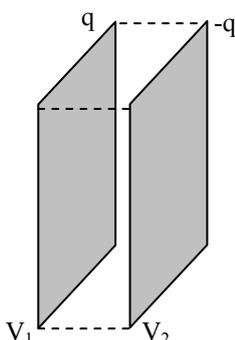


Figure : Condensateur plan

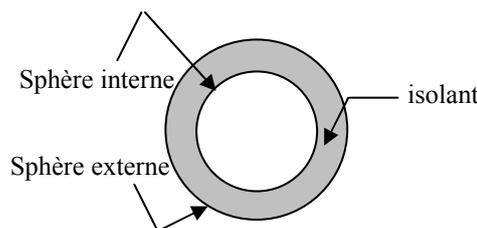


Figure : Condensateur sphérique

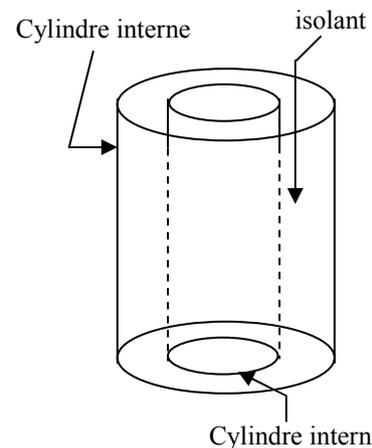


Figure : Condensateur cylindrique

Remarques :

- Les deux armatures portent des charges Q égales mais opposées. Q est la charge du condensateur.
- La capacité est indépendante de la tension et de la charge : elle constitue seulement le facteur de proportionnalité (constant) entre les deux. Elle dépend des paramètres géométriques du condensateur.

Exercice : Déterminer la capacité d'un condensateur plan.

Exercice : Calculer la capacité d'un condensateur sphérique de charge Q , constitué de deux armatures sphériques concentriques de rayons R_1 et R_2 .

XI. ENERGIE ELECTROSTATIQUE

Soient

q, V : charge et potentiel du condensateur à un instant t .

Pour amener une charge supplémentaire dq au condensateur, on doit fournir un travail dW , afin de vaincre la répulsion des charges existantes.

$$\text{Rappel } W = -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = qV$$

Si nous apportons une charge supplémentaire dq , le travail effectué est :

$$dW = V dq$$

$$dW = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V dq \Rightarrow W = \int_0^{q_m} V dq = \int_0^{q_m} \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \left(\frac{q^2}{2} \right)_0^{q_m} = \frac{q_m^2}{2C}$$

avec q_m : charge maximale

soit en général :

$$W = \frac{q^2}{2C},$$

ou bien comme $V = q/C$:

$$W = \frac{1}{2} qV.$$

Remarques :

- $W = \frac{1}{2} qV$ est l'énergie emmagasinée par un système (condensateur, ensemble de charges...) suite à un travail fourni.
- $W = qV$ est l'énergie potentielle que possède une charge q dans un potentiel V .

Comme $E = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$ et $q = \rho_s S$, il vient :

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(\rho_s S)^2}{\epsilon_0 \frac{S}{d}} = \frac{1}{2} \frac{\rho_s^2}{\epsilon_0} S d = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \right)^2 V = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V$$

avec V volume du condensateur.

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V$$

Conclusion: le champ électrique emmagasine de l'énergie électrique de densité $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$.

Autre démonstration :

Considérons une sphère de rayon R qu'on se propose de charger. A un instant donné, supposons que la charge de la sphère est q . Le fait de charger la sphère exige un travail dW , car pour apporter une charge supplémentaire dq il faut vaincre la répulsion de la charge q .

$$dW = V dq ;$$

Comme $V = q / C$,

$$dW = \frac{q}{C} dq .$$

Le travail fourni pour porter la charge de la sphère de 0 à q_m est :

$$W = \frac{1}{C} \int_0^{q_m} q dq = \frac{q_m^2}{2C}$$

étant donné que $C = 4 \pi \epsilon_0 R$, on obtient :

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 R} \right) \quad (1)$$

Calculons l'intégrale suivante : $\int_R^\infty E^2 dV$

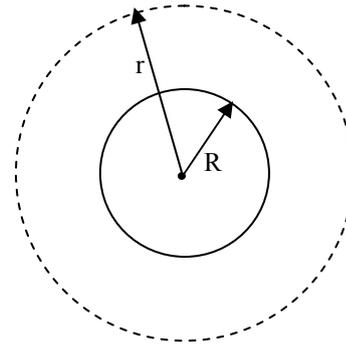
Le volume d'une sphère de rayon r est : $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Par conséquent : $dV = 4 \pi r^2 dr$

$$\int_R^\infty E^2 dV = \int_R^\infty \left(\frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \right) (4 \pi r^2 dr) = \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0^2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0^2 R}$$

en substituant ce résultat dans l'équation (1), on obtient :

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_R^\infty E^2 dV .$$

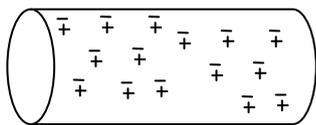


Figure

XII. INTERACTION ENTRE LE CHAMP ELECTRIQUE ET LA MATIERE

1. Conducteur :

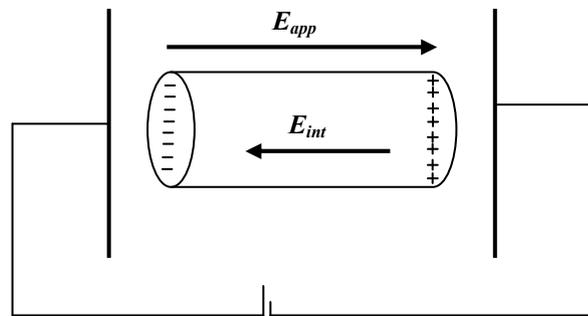
Considérons un conducteur cylindrique placé entre deux plaques métalliques soumises à une tension U . le conducteur est en équilibre électrostatique, c'est-à-dire qu'il ne touche pas les deux électrodes. Autrement, les charges seront mises en mouvement et naîtra un courant. Le conducteur n'est plus en équilibre électrostatique.



pas de champ appliqué

$$E_{int} = 0$$

Figure



Figure

$$E_r = E_{app} - E_{int} = 0$$

E_{app} : champ appliqué externe;

E_{int} : champ interne créée par la nouvelle répartition de charges ;

E_r : champ résultant

Dans un conducteur les électrons sont libres de mouvement. Dès qu'on applique un champ électrique, les électrons se déplacent sous l'action de ce champ, il en résulte une nouvelle distribution de charges qui donne naissance à un champ interne qui annule le champ appliqué.

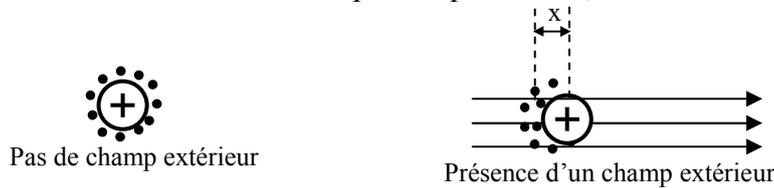
Conclusion : le champ électrique dans un conducteur en équilibre est nul.

2. Isolant (diélectrique) :

Polarisation électrique :

Dans un atome, les centres de gravité du noyau et des électrons coïncident, par conséquent le moment dipolaire moyen de l'atome est nul (Figure). Par contre après l'application d'un champ électrique externe, le centre de gravité des électrons est déplacé d'une certaine distance x par rapport au noyau : l'atome est alors polarisé et devient un dipôle électrique de moment p (Figure 61). Dans chaque atome est créé un champ E_p de sens opposé au champ appliqué.

Les molécules peuvent avoir un moment dipolaire permanent, de telles molécules sont dites *polaires*.



Figure

Les électrons dans l'isolant sont liés aux atomes. Quand on applique un champ électrique, les électrons ne se libèrent pas mais sont légèrement déplacés par rapport au centre de gravité de l'atome, c'est la polarisation.

E_p est appelé champ de polarisation ($E_p \ll E$)

$$E_r = E_{app} - \sum E_p \text{ diminue légèrement mais ne s'annule pas.}$$

Conclusion

Le champ électrique passe à travers un isolant et s'annule dans le conducteur.

Dans le vide $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Dans un diélectrique matériel : $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 r^2}$

La polarisation fait diminuer E dans le diélectrique matériel car $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 > \epsilon_0$

$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} > 1$: permittivité relative ; ϵ permittivité du verre.

FORMULAIRE D'ELECTROSTATIQUE

- Charges :
 Ponctuelles : Q [C] ; linéiques : λ [C/m]
 Surfaiques : σ [C/m²] ; volumiques : ρ [C/m³]
- Champs : \mathbf{D} Déplacement ou Induction électrique [C/m²]
 \mathbf{E} Champ électrique [V/m].
 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$
- Loi de Coulomb :
 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$;
 Charge ponctuelle : $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}$ et $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$
- Lois de base :
 $\text{div} \mathbf{D} = \rho$ ou $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$
 $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ ou $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$
- Potentiel :
 $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$; $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$; $\mathbf{E} = -\text{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{u}_z$
- Tension :
 $U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$
- Travail :
 $W_{BA} = qU_{AB}$
- Capacité :
 $C = \frac{q}{U}$
- Densité d'énergie électrique : $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$.

CHAPITRE II

MAGNETOSTATIQUE

- Une charge électrique immobile crée un champ électrique seulement;
- Une charge en mouvement (un courant) crée un champ électrique et un champ magnétique.

Définition : la magnétostatique est l'étude des phénomènes magnétiques statiques, générés par des courants constants uniquement (courant continu).

I. LOI D'AMPERE

Le physicien danois Hans C. Oersted (1777 – 1851), en remarquant la déviation d'une boussole placée près d'un conducteur traversé par un courant, fut le premier à observer le magnétisme créé par un courant électrique.

Conducteur rectiligne

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dl \wedge u_r}{4\pi r^2} ;$$

H : champ magnétique
 $r = OP$; u_r : vecteur unitaire de r

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I dl \wedge u_r}{4\pi r^2}$$

B : Induction magnétique

Remarque : La loi d'Ampère est valable si l'on suppose que le conducteur est infiniment long, donc les bornes de l'intégrale sont de $-\infty$ à $+\infty$.

Conducteur fermé :

$$B = \oint \frac{\mu_0 I dl \wedge u_r}{4\pi r^2}$$

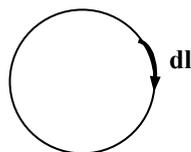


Figure : Courant circulaire

Avec

μ_0 perméabilité magnétique (vide, air...) : $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

$$B = \mu_0 H$$

Unités

$$[B] = \text{Tesla } T ; \quad [H] = \frac{A}{m}$$

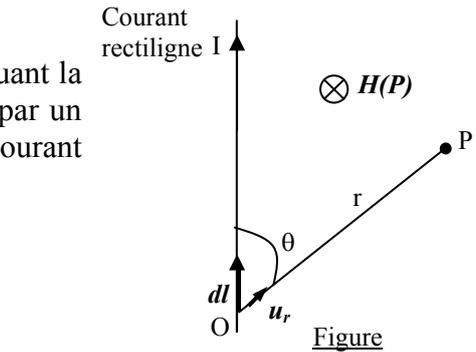
Cas d'un courant volumique :

J densité de courant (A/m^2) ;

$$J = I / S,$$

soit $I = J S,$

ou bien plus généralement :



Figure

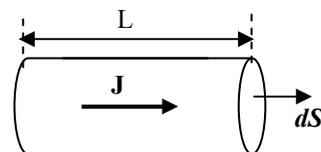


Figure : Conducteur volumique

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow |dI| = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} dl = JS dl = JdV$$

Le champ magnétique d'un courant cylindrique (volumique) est donné par :

$$\mathbf{H} = \int \frac{\mathbf{J} \wedge \mathbf{u}_r}{4\pi r^2} dv$$

soit donc : $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_0 \int \frac{\mathbf{J} \wedge \mathbf{u}_r}{4\pi r^2} dv$

EXERCICE (Champ magnétique crée par un courant rectiligne)

Calculer le champ magnétique \mathbf{H} produit par un courant rectiligne infiniment long.

EXERCICE (Champ magnétique crée par une spire)

Soit une spire circulaire de rayon « a » traversée par un courant I .

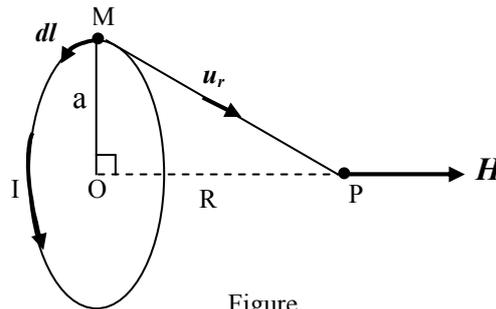
Déterminer le champ magnétique \mathbf{H} dans un point P situé sur l'axe de la spire.

Solution :

On obtient :

$$\mathbf{H} = \frac{Ia^2}{2(a^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{u}$$

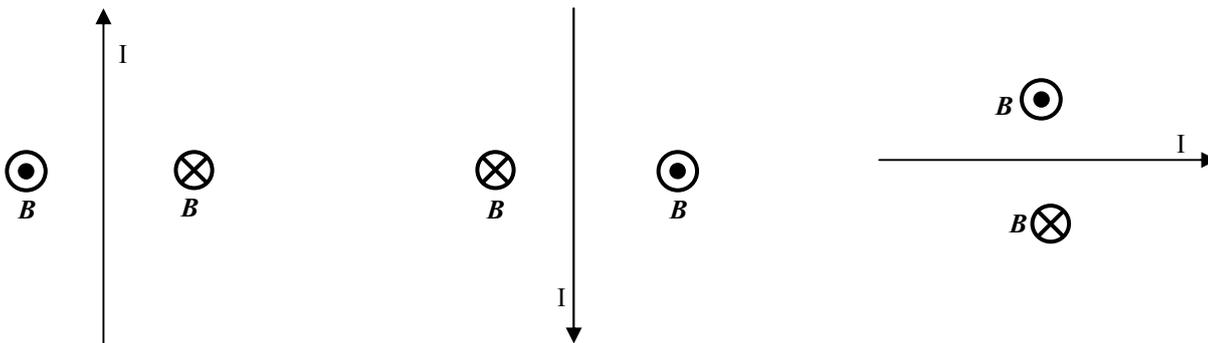
$$H_{\max}(R=0) = \frac{I}{2a}$$



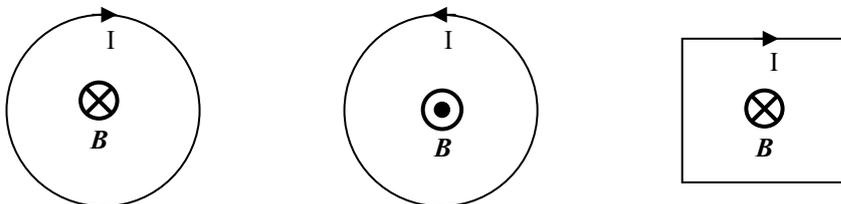
Figure

II. DIRECTION DU CHAMP MAGNETIQUE (Règle de la main droite)

a) Fil rectiligne : (Règle de la main droite)



b) Spire : (Règle du tournevis)



EXERCICE

Un solénoïde est un courant formé de plusieurs spires circulaires coaxiales, de même rayon traversé par un même courant.

Solution :

Le champ sur l'axe du solénoïde peut être calculé en additionnant le champ créé par chaque spire.

A la figure ci-dessous est représentée une coupe longitudinale dans le solénoïde.

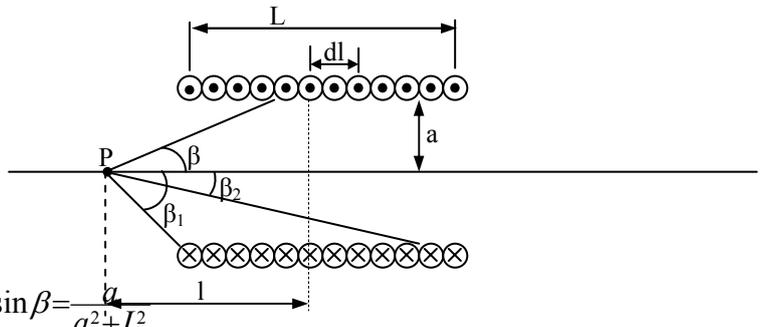
Si N est le nombre total des spires, le nombre des spires d'une partie dl est égal à $\frac{N}{L} dl$.

Rappelons que le champ produit au point P par une spire est :

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + L^2)^{3/2}}$$

$\frac{N}{L} dl$ Spires produisent l'induction

$$dB = \left[\frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + L^2)^{3/2}} \right] \frac{N}{L} dl = \frac{\mu_0 I N}{2L} \frac{a^2 dl}{(a^2 + L^2)^{3/2}}$$



Figure

D'après la figure, on peut écrire : $\frac{a}{L} = \text{tg} \beta$ et $\sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + L^2}}$

soit, $L = \frac{a}{\text{tg} \beta} \Rightarrow dl = -\frac{a}{\sin^2 \beta} d\beta$

en substituant ces équations dans l'expression de dB , on obtient :

$$dB = \frac{\mu_0 I N}{2L} (-\sin \beta d\beta)$$

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2L} \int_{\beta_1}^{\beta_2} (-\sin \beta d\beta) = \frac{\mu_0 I N}{2L} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

Si le solénoïde est très long, nous avons en un point du centre $\beta_1 \approx \pi$ et, soit :

$$B = \frac{\mu_0 I N}{L}$$

Pour un point situé à l'extérieur, sur l'une des extrémités, $\beta \approx \pi/2$ et $\beta_2 \approx 0$ ou $\beta_1 \approx \pi$ et $\beta_2 \approx \pi/2$,

soit : $B = \frac{\mu_0 I N}{2L}$

soit la moitié de la valeur au centre.

Remarque : le solénoïde est utilisé pour produire un champ magnétique passablement homogène dans une région limitée de son centre.

III. POTENTIEL MAGNETIQUE

Comme q est un scalaire, qui produit un potentiel électrique scalaire V ;

Par analogie avec l'électrostatique :

L'élément $I dl$ est un vecteur, produit un potentiel magnétique vectoriel A .

$$B = \text{rot} A$$

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J}{r} dV$$

qui représente l'expression du potentiel A .

IV. THEOREME D'AMPERE

1. Théorème d'Ampère :

$$\oint H \cdot dl = ?$$

$$H = \frac{I}{2\pi r} u$$

$$\oint H \cdot dl = \oint \frac{I}{2\pi r} u \cdot dl$$

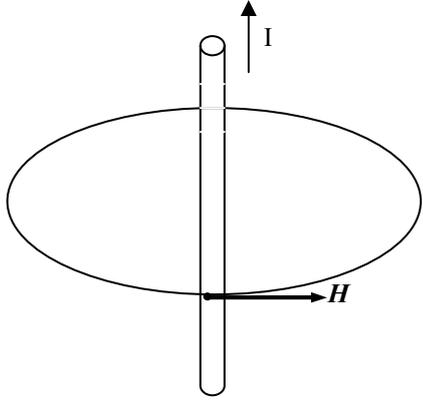
Rappel :

$$A \cdot u_x = (A_x u_x + A_y u_y + A_z u_z) \cdot u_x = A_x$$

soit donc, la composante de A suivant l'axe des x . Par analogie : $dl \cdot u = dl'$ est la composante de dl suivant u .

Comme par ailleurs, $u \perp u_r$, soit $u \perp r$, donc aussi $dl' \perp r$;

dl' représente donc un arc de cercle de rayon $r \Rightarrow dl' = r d\theta$



Figure

Par conséquent :

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint H dl = \frac{I}{2\pi} \int \frac{r d\theta}{r} = \frac{I}{2\pi} \int d\theta = \frac{I}{2\pi} \theta \Big|_0^{2\pi} = I$$

Donc $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$

qui représente le théorème d'Ampère.

Remarque importante : I est un courant circulant à l'intérieur du contour fermé.

2. Forme différentielle :

$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ est la forme intégrale du théorème d'Ampère.

Comme $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$

et que $I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$,

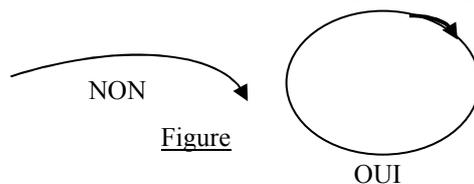
On peut écrire : $\int_S \text{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$

Soit donc :

$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$

qui représente la forme différentielle du théorème d'Ampère.

Conclusion : $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ implique que le champ magnétique est rotationnel, c'est à dire que les lignes de champ sont fermées, contrairement aux lignes de champ électrique.

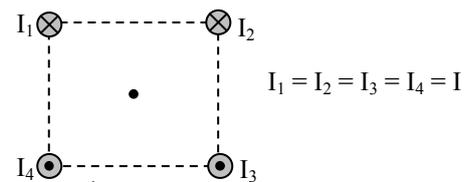


Remarque :

- Les lignes de champ magnétique sont des courbes fermées car contrairement au champ électrique qui a pour source des charges électriques (part de la charge positive et arrive à la charge négative), il n'y a pas de charges magnétiques.

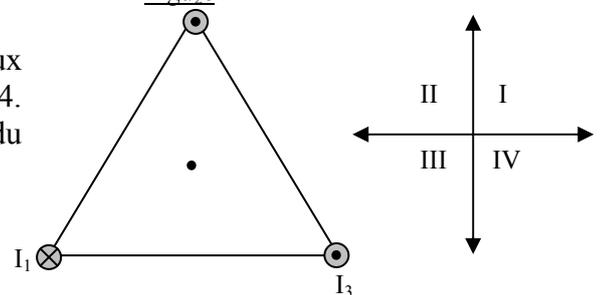
EXERCICE

On considère quatre conducteurs traversés chacun par un même courant I (figure). Quelle est la direction du champ magnétique au point P, centre du carré de côté d.



EXERCICE

Trois fils conducteurs portant un même courant, sont situés aux coins d'un triangle équilatéral, comme montré à la figure 14. Dans quel cadran trigonométrique se trouve la direction du champ magnétique résultant au centre de la triangle?



EXERCICE

Déterminer le champ magnétique \mathbf{H} à l'intérieur et à l'extérieur d'un conducteur cylindrique plein traversé par un courant I, de densité uniforme J.

EXERCICE

Utiliser le théorème d'Ampère pour calculer le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde comprenant n_0 spires par unité de longueur et parcouru par un courant I_0 .

Solution :

Pratiquement une bobine formée d'un fil conducteur enroulé suivant une hélice de petit pas est un solénoïde. Par conséquent, à l'intérieur loin des extrémités de la bobine, les lignes d'induction sont sensiblement parallèles à l'axe (le champ crée par chaque spire étant perpendiculaire à son plan) ; le champ est donc uniforme.

Choisissons un contour fermé MNPQ pour pouvoir appliquer le théorème d'Ampère.

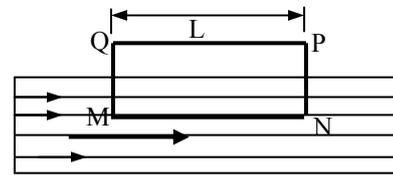
L'application du théorème d'Ampère sur ce contour donne :

$$\oint H \cdot dl = \sum I$$

$$\oint H \cdot dl = H \cdot MN + H \cdot NP + H \cdot PQ + H \cdot QM = H \cdot MN = HL$$

$$H \cdot QM = 0 \text{ et } H \cdot PN = 0 \text{ car } H \perp QM \text{ et } H \perp PN$$

$$H \cdot QP = 0 \text{ car à l'extérieur } H \approx 0.$$



Figure

D'autre part, $\sum I = n_0 L I_0$

n_0 : nombre de spires / mètre.

d'où $H = n_0 I_0$

$B = \mu_0 n_0 I_0$ est l'induction à l'intérieur du solénoïde.

EXERCICE

On considère une bobine torique de n spires traversée par un courant statique I. Déterminer le sens, la direction et la valeur du champ magnétique créée à l'intérieur de la bobine.

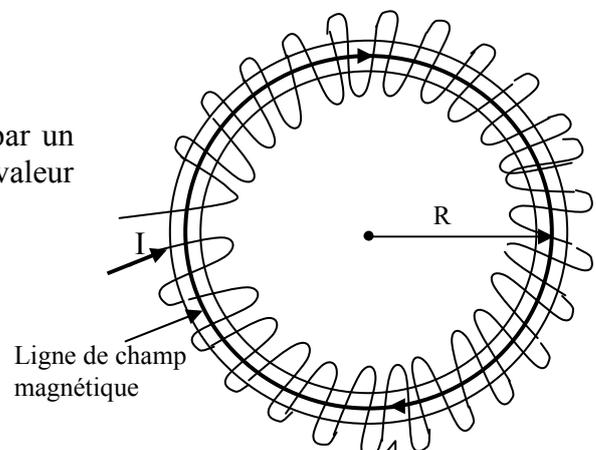
Solution :

Le champ étant perpendiculaire aux spires, c'est donc un cercle passant par le centre de chaque spire, dont le centre coïncide avec celui de la bobine.

$$\oint H dl = nI \Rightarrow$$

$$H \oint dl = H 2\pi r = HL = nI \text{ avec } L = 2\pi r$$

d'où $H = \frac{nI}{L}$



Figure

IV. FLUX MAGNETIQUE

$$\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} ;$$

Unité $[\Phi_m] = \text{Weber } Wb ;$

a) Surface non fermée

Flux: représente la quantité de lignes de champ passant à travers la surface.

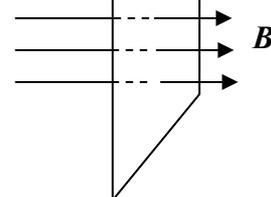


Figure : Surface non fermée

b) Surface fermée

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \text{div} \mathbf{B} dV = \int \text{div}(\text{rot} \mathbf{A}) dV = 0 ; \text{ car } \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

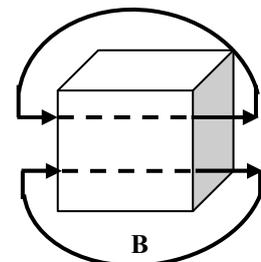


Figure : Surface fermée

Forme différentielle :

$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ est la forme intégrale de cette loi.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \text{div} \mathbf{B} \, dv = 0 \Rightarrow \text{div} \mathbf{B} = 0$$

$\text{div} \mathbf{B} = 0$ est la forme différentielle.

V. FORCE MAGNETIQUE

1. Force de Lorentz :

Une charge électrique animée d'une vitesse \mathbf{v} et placée dans un champ électrique et magnétique, subit la force suivante :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) ;$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$$

avec :

$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ est la Force électrique;

Si $q=0 \Rightarrow \mathbf{F}_e = 0$

La force électrique s'annule si la charge est nulle.

$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$ est la Force magnétique.

La force magnétique s'annule si la charge est nulle ou immobile.

L'induction magnétique n'exerce de force que sur une particule chargée en mouvement (ou un courant).

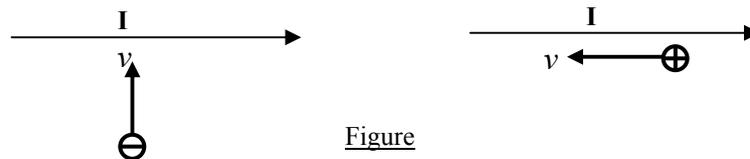
Conclusion:

La force magnétique n'agit que sur une charge en mouvement, ou un conducteur traversé par un courant.

EXERCICE

Un fil conducteur est traversé par un courant (figure 5). Quelle est la direction de la force appliquée sur :

- un électron se déplaçant vers le fil ;
- un proton se déplaçant parallèlement au fil (fig. a). Supposez que l'électron et le proton se déplacent dans le plan du papier.



Figure

2. Force de Laplace :

Considérons un conducteur cylindrique traversé par un courant I.

Soient :

n' : nombre de particules chargées traversant le conducteur;

e : charge élémentaire d'une particule.

La charge traversant le conducteur vaut alors :

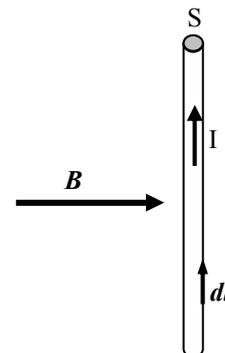
$$q = n'e$$

En posant $n = \frac{n'}{V}$

n : nombre de particules/unité de volume ;

V : volume du conducteur.

On obtient :



Figure

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d(n'e)}{dt} = \frac{d(neV)}{dt} = ne \frac{dV}{dt} = neS \frac{dl}{dt} = neSv ;$$

avec

v : vitesse de déplacement des particules.

Par conséquent :

$$J = \frac{I}{S} = \frac{neSv}{S} = nev \Rightarrow J = nev$$

Cette égalité est également valable en notation vectorielle :

$$\boxed{J = nev}$$

D'un autre côté, en reportant dans la loi de Lorentz la charge par unité de volume $q = ne$, on obtient :

$$F_m = q(v \wedge B) = nev \wedge B = J \wedge B$$

Pour un volume élémentaire dV :

$$dF_m = (J \wedge B) dV$$

pour tout le volume V :

$$F_m = \int (J \wedge B) dV = \int (J dV \wedge B)$$

Comme $J dV = Idl$, on aboutit à l'expression de la Force de Laplace:

$$\boxed{F_m = \int Idl \wedge B}$$

Remarque :

Si $I = 0 \Rightarrow F_m = 0$

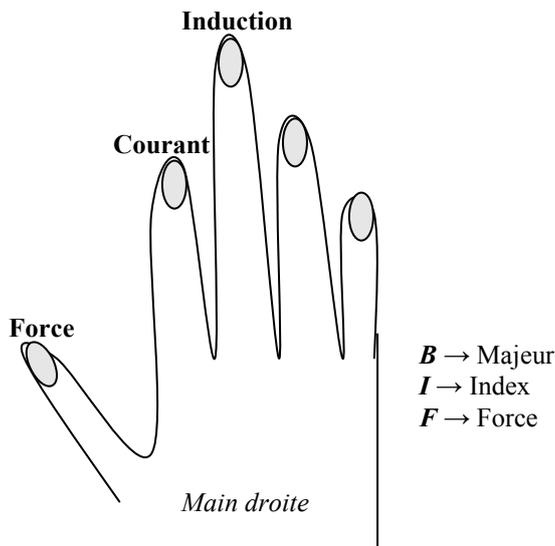
La force magnétique n'agit donc que sur un conducteur traversé par un courant.

EXERCICE

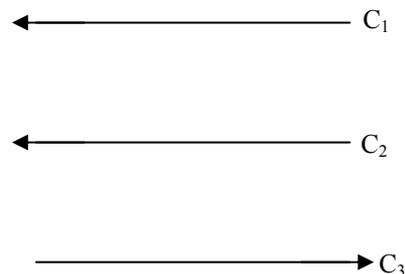
Soient deux (2) conducteurs rectilignes identiques, parallèles et traversés par les courants I_1 et I_2 ($I_1 = 10 \text{ A}$; $I_2 = 5 \text{ A}$).

Calculer la force magnétique F_1 exercée sur le conducteur 1 et F_2 exercée sur le conducteur 2.

Remarque : Le sens de la force est déterminé grâce à la règle de la main droite :



Figure



EXERCICE

Si chacun des trois fils de la figure 8 porte le même courant, quelle est la direction de la force appliquée sur chacun des 3 conducteurs par les deux autres (sans calculs).

Conducteur C_1 :

Figure

EXERCICE

Une spire carrée de côté a parcourue par un courant I est placée dans une induction magnétique B perpendiculaire (Figure 14). La spire peut tourner autour d'un axe Δ .

- 1) Calculer et représenter les forces agissant sur les côtés MN, PQ, MQ et NP de la spire.
- 2) En déduire le couple magnétique agissant sur la spire.

VII. ENERGIE MAGNETIQUE W_m

On considère l'exemple d'une bobine torique comprenant n spires.

Déterminer l'énergie emmagasinée quand le courant dans la bobine croit de 0 à I .

Considérons un circuit formé par une inductance.

A l'instant t nous avons : $U = L \frac{dI}{dt}$

En multipliant les deux membres par $i dt$ de façon à faire apparaître les énergies mises en jeu pendant dt :

$$U i dt = L i di = d\left(\frac{1}{2} L i^2\right)$$

Le terme $U i dt$ représente l'énergie fournie par le générateur, le terme $dW = d\left(\frac{1}{2} L i^2\right)$ correspond à l'énergie fournie pour établir le courant i , énergie emmagasinée dans l'inductance.

Démonstration :

Par analogie avec l'électrostatique où la densité de l'énergie électrostatique $w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$, démontrer que la densité de l'énergie magnétique est $w_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$.

Considérons pour cela un tube élémentaire d'induction

Posons

$$dV = S dl$$

L'énergie magnétique localisée dans l'élément de volume dV est :

$$dW = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 dV = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 S dl$$

En tenant compte que le flux d'induction est constant dans le tube : $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B \cdot S$

et du théorème d'Ampère : $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$,

on obtient :

$$W = \frac{1}{2\pi_0} B^2 S dl = \frac{1}{2\pi_0} BS \int B dl = \frac{1}{2} BS \int H dl = \frac{1}{2} \Phi I$$

Comme

$$\Phi = L I$$

$$W = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{1}{2} L I^2$$

Conclusion : le champ magnétique emmagasine bien une énergie de densité $w_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$.

Autre démonstration :

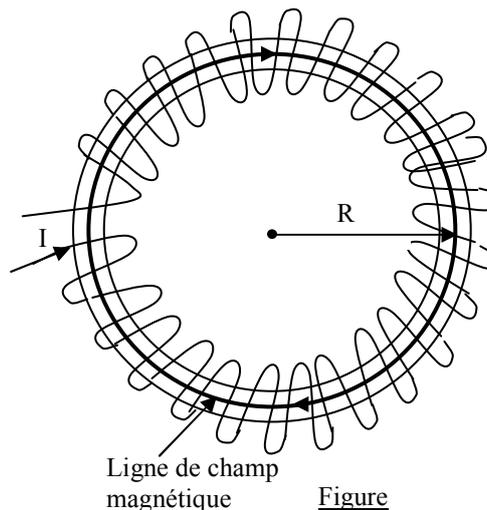
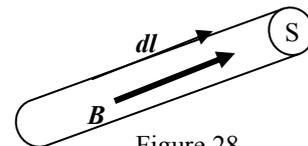
Soit U la tension appliquée,

Le travail fourni

$$W = - \int U I dt ;$$

$$\text{Or } U = -n \frac{d\phi}{dt}$$

$$U = -n \frac{d\phi}{dt} = -nS \frac{dB}{dt} = -nB \frac{ds}{dt} \quad \text{---} \rightarrow =0$$



Soit $W = -\int -n \frac{d\varphi}{dt} Idt = n \int Id\varphi$

$W = \int_0^B nIS dB = nIS \int_0^H \mu_0 dH = nIS\mu_0 \int_0^H dH$

Comme $H = \frac{nI}{L} \Rightarrow I = \frac{LH}{n}$ (Exercice P6).

d'où $W = nS\mu_0 \int_0^H \frac{LH}{n} dH = S\mu_0 L \int_0^H H dH = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 SL$

avec $V = SL$ volume de la bobine où règne H, on obtient :

$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 V$ [J],

est l'énergie totale emmagasinée dans le champ magnétique **H**.

$w_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$ [J/m³]

est la densité d'énergie magnétique.

VIII. RESUME DES LOIS DU REGIME STATIONNAIRE

1. Théorème de Gauss

$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$; $div \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

2. $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$; $rot \mathbf{E} = 0$

3. Théorème d'Ampère

$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$; $rot \mathbf{H} = \mathbf{J}$

4. Théorème du Flux Magnétique

$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$; $div \mathbf{B} = 0$

ANALOGIE ENTRE L'ELECTROSTATIQUE ET LA MAGNETOSTATIQUE

ELECTROSTATIQUE

MAGNETOSTATIQUE

Loi de Coulomb (champ électrique)

Loi de Biot & Savart (champ magnétique)

$q \rightarrow \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{u}$

$I d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{H} = \oint \frac{I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u}_r}{4\pi r^2}$

Déplacement électrique

Induction magnétique

$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

Potentiel électrique

Potentiel magnétique

$V = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$

$A = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}}{r} dv$

$\mathbf{E} = -grad V$

$\mathbf{B} = rot A$

$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$

$rot \mathbf{E} = 0$

$rot \mathbf{H} = \mathbf{J}$

$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon}$

$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

$div \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon}$

$div \mathbf{B} = 0$

$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2$

$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$

$E = 0$ dans un conducteur

$H \neq 0$ dans le conducteur

CHAPITRE III

PHENOMENES DEPENDANT DU TEMPS

(Régime quasi-stationnaire)

Le Régime Quasi-Stationnaire ne concerne que les phénomènes variant avec le temps.

Exemple

$$i = i_0 \sin \omega t = i_0 \sin 2\pi ft$$

$$E = E_0 e^{j\omega t} = E_0 e^{j2\pi ft}$$

I. LOI DE FARADAY

Loi de Faraday : Quand un *flux magnétique variable* traverse un circuit conducteur fermé, il génère (crée) un courant induit (ou une f.e.m) dans le conducteur. C'est le principe des générateurs.

Remarque : le fonctionnement des générateurs d'électricité (générateurs à courant continu, alternateurs) est basé sur le principe de la loi de Faraday.

1) Induction B variable :

Supposons I variable [$I = I_0 \sin(\omega t)$ par exemple].

L'induction **B** au point quelconque M est
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi x}$$

Comme l'induction est variable, le flux $\Phi = \int B.dS$ est également variable et génère un courant induit *i* dans la spire.

$$i = e/R \text{ [A];}$$

R : résistance de la spire [Ω];

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} : \text{Force électromotrice (f.e.m) induite [Volt]}$$

Loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$

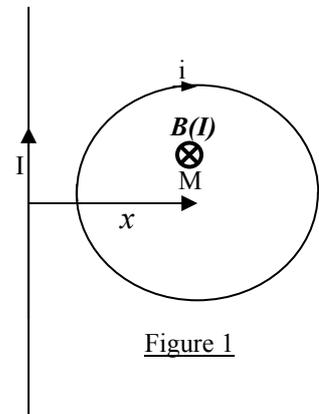


Figure 1

Remarque : *e* est appelée f.e.m et non tension, car en électricité la tension apparaît entre deux points différents. On ne peut pas parler de Tension dans une spire fermée.

2) Induction B constante :

- Si le courant I est constant, alors l'induction B est constante :

$$B(I) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} ; \Phi = \int B.dS$$

$\Phi = 0$ et donc pas de courant induit ($e = 0 ; i = 0$)

- Si le courant I constant, mais la spire se déplace à une vitesse *v* :

En se déplaçant, puisque la spire s'éloigne du courant I l'induction **B** diminue est donc variable. Le flux magnétique qui devient variable induit un courant *i* dans la spire.

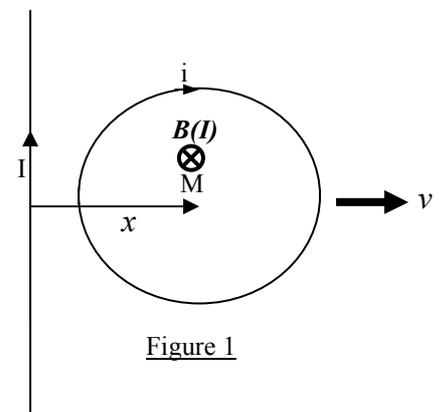
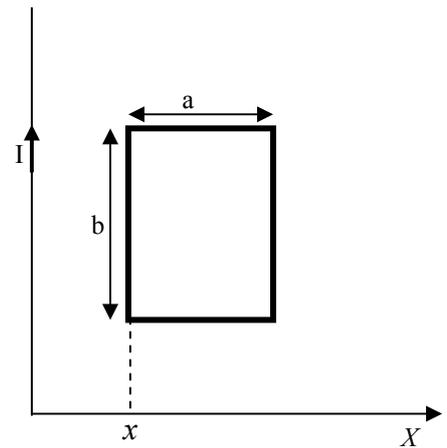


Figure 1

EXERCICE 1

Un cadre plan comportant N spires, chacune de surface S, est placé devant un fil rectiligne traversé par un courant variable $I = I_0 \sin \omega t$. Calculer le courant induit dans le cadre.



Solution :

$$\phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int B \, dS$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_0 \sin \omega t}{2\pi x}$$

Le flux traversant le cadre est :

$$\Phi = \int B \cdot dS = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b \, dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_x^{x+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$$

Pour N spires : $\Phi = N \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$

La f.e.m induite dans le cadre est :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(N \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x} \right) = -N \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x} \frac{dI}{dt} = -N \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x} I_0 \omega \cos \omega t$$

$$i_1 = \frac{e}{R} = -N \frac{\mu_0 b I_0 \omega}{2\pi R} \ln \frac{x+a}{x} \cos \omega t$$

EXERCICE 2

Le même cadre est placé devant un courant I constant, mais se déplaçant vers la droite avec une vitesse constante v.

Déterminer le courant induit dans le cadre.

Solution :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} ; dS = b \, dx$$

Remarque : $dS = dx \, dy$, mais comme l'induction B varie seulement suivant x, on pose $dS = b \, dx$.

Le flux traversant le cadre est

$$\Phi = N \int B \cdot dS = N \int \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b \, dx = N \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_x^{x+a} \frac{dx}{x} = N \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$$

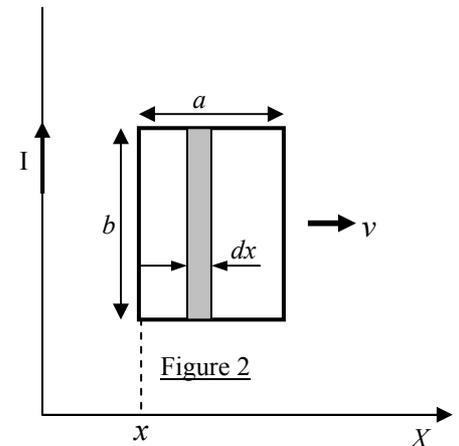
La f.e.m est donnée par :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx} \frac{dx}{dt} = -v \frac{d\Phi}{dx}$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = N \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} \right) = -N \frac{\mu_0 I b a}{2\pi x(x+a)}$$

$$e = N \frac{\mu_0 I b a v}{2\pi x(x+a)}$$

$$i_2 = \frac{e}{R} = N \frac{\mu_0 I b a v}{2\pi x(x+a)R}$$



EXERCICE 3

Le même cadre est placé devant un fil rectiligne traversé par un courant variable qui se déplace vers la droite avec une vitesse v constante. Calculer le courant induit dans le cadre.

Solution :

$$i = i_1 + i_2 = -N \frac{\mu_0 b I_0 \omega}{2\pi R} \ln \frac{x+a}{x} \cos \omega t + N \frac{\mu_0 I b a v}{2\pi x(x+a)R}$$

Exemples de la loi de Faraday :

- L'énergie électrique dans les centrales est produite par. Dans les alternateurs, la tension est produite suivant le principe de la loi de Faraday. Le principe est de placer les conducteurs dans un flux magnétique variable.
- Le transformateur ne fonctionne qu'en courant alternatif car pour induire un courant dans l'enroulement secondaire il faut un flux variable.
- Les noyaux de fer utilisés dans les machines à courant alternatif sont constitués de tôles isolées les unes des autres. En effet, le flux étant variable il induit un courant dans le noyau lui-même (courant de Foucault). L'isolant entre les tôles sert à augmenter la résistance pour atténuer le courant. Par contre, les noyaux des machines à courant continu sont des masses compactes, car il n'y a pas de courant induit dans ce cas.
- La foudre peut détériorer des équipements situés à plusieurs km du point d'impact. En effet, le champ magnétique généré par la foudre se propage et induit dans les installations des surtensions pouvant endommager les appareils fragiles.

II. LOI DE LENZ : (signification du signe "moins")

Loi de Lenz : "L'induction magnétique propre du courant induit s'oppose à la variation du flux principal".

Exemple : soit un cadre qui se déplace vers la droite à une vitesse v constante. Déterminer le sens de circulation du courant induit dans ce cadre.

L'induction principale $B(I)$ a un sens entrant dans le cadre. En s'éloignant du courant I le flux qui traverse le cadre diminue (variation = diminution de Φ).

Loi de Lenz : L'induction propre $B(i)$ du courant induit s'oppose à cette variation (diminution de Φ) et aura le même sens que l'induction principale $B(I)$ pour augmenter le flux (car l'induction résultante dans le cadre augmente $B_r = B(I) + B(i)$).

Résultat : puisque $B(i)$ a un sens entrant, le courant i circule dans le sens ABCD (Règle du tire-bouchon).

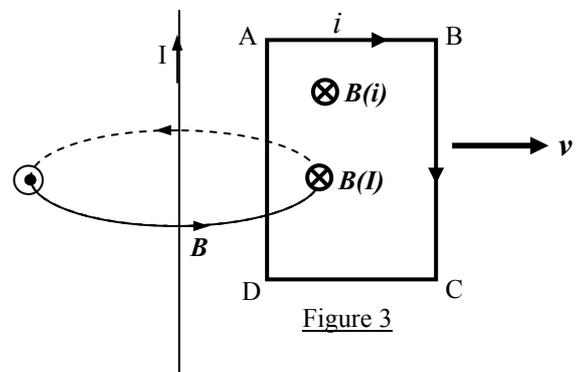


Figure 3

Remarque : Si le cadre se déplace vers le courant le flux cette-fois ci augmente.

Loi de Lenz : L'induction propre $B(i)$ du courant induit s'oppose à cette variation (augmentation de Φ) et aura le sens opposé à l'induction principale $B(I)$ pour diminuer le flux (car l'induction résultante dans le cadre diminue $B_r = B(I) - B(i)$).

Résultat : puisque $B(i)$ a un sens sortant, le courant i circule dans le sens ADCB.

EXERCICE 3

Soit une spire placée près d'un fil rectiligne traversé par un courant I (figure 4). Déterminer le sens du courant induit dans la spire dans chaque région du courant.

Solution :

L'induction principale $B(I)$ a un sens sortant.

a) entre 0 et t_0

$I=0 \Rightarrow B=0 \Rightarrow \Phi=0 \Rightarrow$ pas de courant induit $i=0$.

b) entre t_0 et t_1

I augmente $\Rightarrow B(I)$ augmente \Rightarrow augmentation de Φ .

Le courant induit i s'oppose à cette augmentation $\Rightarrow B(i)$ opposé à $B(I) \Rightarrow B(i)$ entrant, donc i circule dans le sens ABCD.

c) entre t_1 et t_2

I constant $\Rightarrow B$ constante $\Rightarrow \Phi$ constant \Rightarrow

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = 0 \Rightarrow i = 0.$$

d) entre t_2 et t_3

I diminue $\Rightarrow B$ diminue \Rightarrow diminution de Φ ;

Le courant induit i s'oppose à cette diminution \Rightarrow

$B(i)$ même sens que $B(I) \Rightarrow B(i)$ sortant, donc i circule dans le sens ADCB.

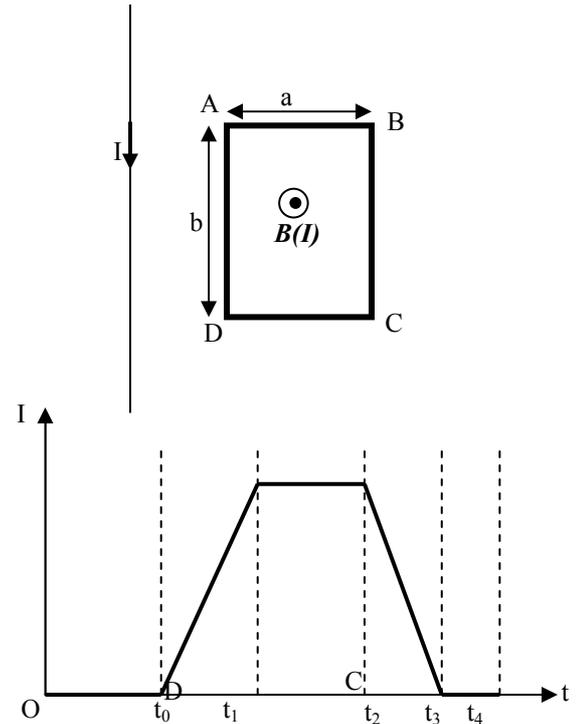


Figure 4

III. FORMES INTEGRALE ET DIFFERENTIELLE

1. Forme intégrale :

Rappel

- Conducteur rectiligne :

La différence de potentiel U entre deux points d'un conducteur rectiligne est donnée par l'expression suivante :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{L_1}^{L_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{voir chapitre 1})$$

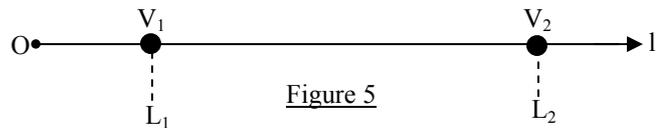


Figure 5

- Spire non fermée :

La différence de potentiel d'une spire non fermée est :

$$U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

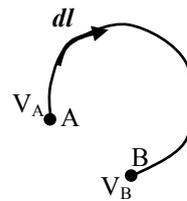


Figure 6

- Spire fermée :

$$U = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

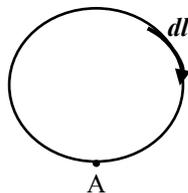


Figure 7

En conséquence, la loi de Faraday peut être mise sous la forme suivante :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Comme $\phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Remarque: S'il n'y a pas de f.e.m produite par la loi de Faraday, $U = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_A - V_a = 0$. La tension dans une spire fermée est nulle. Pour cette raison, on ne dit pas tension induite dans une spire fermée, mais plutôt une f.e.m induite. En effet, la tension dans une spire fermée doit être obligatoirement nulle, sauf dans le cas d'une f.e.m induite par la loi de Faraday.

2. Forme différentielle :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_s -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

L'intégrale fermée $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ peut être transposée en une intégrale surfacique (voir rappel mathématique) :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

On obtient :

$$\int_s \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_s -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

La forme différentielle de la loi de Faraday est donc :

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Remarque : d'après cette équation on peut conclure qu'un champ magnétique variable ($\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$) crée un champ électrique \mathbf{E} . Ce champ électrique est à l'origine du courant induit. En effet, c'est ce champ qui produit déplacement des charges dans le conducteur et qui est à l'origine du courant induit.

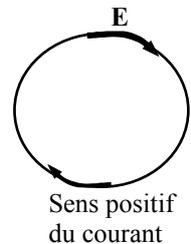


Figure 8

- Régime stationnaire: $\text{rot} \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}$ est non rotationnel. (le champ \mathbf{E} ne se referme pas)
- Régime dépendant du temps RQS : $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E}$ est rotationnel (le champ \mathbf{E} se referme).

Remarque :

C'est dans le cas seulement de la f.e.m induite par induction magnétique où l'on rencontre un champ électrique fermé.

EXERCICE

En régime stationnaire $\mathbf{E} = -\text{grad} V$, démontrer qu'en RQS $\mathbf{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$.

Solution :

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Comme $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$, il vient que

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{A} = -\text{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

soit

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Par analogie avec le RS

$\text{rot} \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\text{grad} V$, on pose :

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad}V$$

Donc

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

IV. COMPARAISON ENTRE R.S et R.Q.S

R.S et R.Q.S :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon} ; \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I ; \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

RS seulement $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ soit $\text{rot} \mathbf{E} = 0$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V$$

R.Q.S seulement : $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ soit $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}V$$

CHAPITRE IV

REGIME VARIABLE

Equations de Maxwell

I. PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA CHARGE : (Régime variable)

Supposons une surface fermée comprenant une charge q à l'intérieur, et un courant I sortant.

Principe de conservation de la charge :

Courant sortant de $S \Leftrightarrow$ diminution de q dans S ;

$$\text{d'où } I = -\frac{dq}{dt} ;$$

$$\text{Comme } I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}$$

$$\text{vu que (théorème de Gauss) } \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon} \Rightarrow q = \epsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{donc } \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \left(\epsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \right)$$

$$\text{soit } \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \oint \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\text{ou bien } \oint \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Cette expression représente l'équation de conservation de la charge.

1. Forme intégrale

$\oint \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$ est la forme intégrale de l'équation de conservation de la charge.

2. Forme différentielle

L'intégrale de surface fermée $\oint \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$ peut être transposée en une intégrale de volume

$$\oint \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dv = 0$$

$$\text{Par conséquent, } \text{div} \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\text{ou bien autrement, sachant que } \text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} :$$

$$\text{div} \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \mathbf{E}) = 0 ;$$

$$\text{On déduit alors : } \text{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

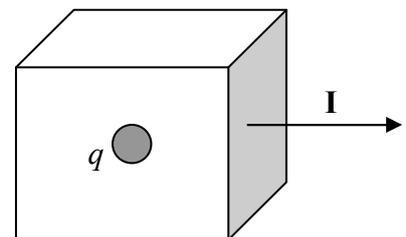


Figure 1 : Surface fermée S

Remarque :

Les termes $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ et $\frac{\partial E}{\partial t}$ ne sont considérés que dans le cas du régime variable, ils sont négligeables dans les autres régimes. C'est-à-dire que :

en RS et RQS : $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ et $\frac{\partial E}{\partial t} \approx 0$ (négligeables)

Donc, l'équation de conservation de la charge dans ces cas devient : $\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ou $div \mathbf{J} = 0$

Remarque :

La conservation de la charge est respectée, car lorsqu'un électron sort par la borne négative, il prend la place d'un électron libre dans la matière qui relie les deux bornes (car les bornes doivent être reliées par un conducteur pour que le courant circule), l'électron ainsi chassé va voler à son tour la place d'un électron situé un peu plus proche de la borne positive, et ainsi de suite jusqu'à la borne positive, dans laquelle le dernier électron de la 'chaîne' va rentrer.

Donc, lorsqu'un électron sort de la borne négative, au même moment, un électron rentre dans la borne positive. La batterie ainsi que le conducteur ne se sont donc pas chargés, ils sont toujours neutres, bien que le courant circule !

II. LOI DE MAXWELL-AMPERE

D'après le théorème d'Ampère $rot \mathbf{H} = \mathbf{J}$.

On peut écrire :

$$rot \mathbf{H} = \mathbf{J} \Rightarrow div(rot \mathbf{H}) = div \mathbf{J}$$

Comme $div rot = 0$, on obtient :

$$div \mathbf{J} = 0$$

Mais en régime variable nous avons $div \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ et non pas $div \mathbf{J} = 0$!

Par conséquent, le théorème d'Ampère $rot \mathbf{H} = \mathbf{J}$ n'est plus valable dans le régime variable.

- Question : que devient le théorème d'Ampère dans ce cas ?
- Réponse :

Nous connaissons que (en R.S et R.Q.S) :

$$div \mathbf{J} = 0 \Leftrightarrow rot \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1)$$

Par analogie en régime variable nous pouvons poser :

$$div \left(\mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 \Leftrightarrow rot \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Conclusion : Maxwell a transformé le théorème d'Ampère en régime variable et a ajouté le terme $\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Le théorème d'Ampère devient dans ce cas : $rot \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (forme différentielle)

Forme intégrale :

$$rot \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \int_S rot \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(\mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

L'intégrale de surface $\int_S rot \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$ peut être transposée en une intégrale linéique fermée :

$$\int_S rot \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

On arrive alors à l'expression différentielle suivante :

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{Forme intégrale})$$

III. EQUATIONS DE MAXWELL

Maxwell a établi quatre équations fondamentales de l'électromagnétisme et qui sont :

1. Equation de Maxwell-Gauss (MG) :

Forme intégrale : $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon}$

Le flux électrique passant à travers une surface fermée est égal au rapport $\frac{q}{\epsilon}$.

Forme différentielle : $\text{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$

C'est la charge électrique qui est à l'origine (source) du champ électrique.

2. Equation de Maxwell-flux magnétique (MΦ) :

Forme intégrale : $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

Le flux magnétique passant à travers une surface fermée est nul.

Forme différentielle : $\text{div}\mathbf{B} = 0$

Par analogie avec l'équation MG, il n'existe pas de "charge magnétique" dans la nature.

3. Equation de Maxwell-Faraday (MF) :

Forme intégrale : $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$

Un conducteur traversé par un flux magnétique variable est le siège d'une f.e.m induite.

Forme différentielle : $\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Un champ magnétique variable crée un champ électrique variable.

4. Equation de Maxwell-Ampère (MA) :

Forme intégrale : $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Forme différentielle : $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Un champ électrique variable ($\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$) crée au même titre qu'un courant (\mathbf{J}) un champ magnétique variable.

Remarques :

- Les équations de Maxwell sont valables dans les trois régimes.
- Pour obtenir les équations dans le régime stationnaire, il suffit de poser $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.
- Pour obtenir les équations dans le régime dépendant du temps (quasi-stationnaire), il suffit de poser : $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx 0$ et $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$.
- Les équations de MA et MF montrent que les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont liés entre eux \Rightarrow C'est le champ électromagnétique.

EXERCICE

1. On considère dans le vide un champ électrique $\mathbf{E} = E_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{u}_y$.

Déterminer le champ magnétique \mathbf{H} associé à \mathbf{E} .

2. On considère dans le vide un champ magnétique $\mathbf{H} = H_m \exp j(\omega t + \beta z) \mathbf{u}_x$

Déterminer le champ électrique \mathbf{E} associé à \mathbf{H} .

3. Que peut-on conclure ?

Solution :

$$1) \text{ M.A : } \text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_x \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} \right)$$

$$\text{Soit } \text{rot}\mathbf{E} = \beta E_m \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{u}_x + 0 = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\text{d'où } \mathbf{H} = -\frac{\beta E_m}{\mu_0} \int \cos(\omega t - \beta z) dt \mathbf{u}_x = -\frac{\beta E_m}{\mu_0 \omega} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{u}_x + Cte$$

$$2) \mathbf{H} = H_m \exp j(\omega t + \beta z) \mathbf{u}_x$$

$$\text{M.A : } \text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

dans le vide : $\mathbf{J} = 0$

$$\text{d'où } \text{rot}\mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\text{soit } \text{rot}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ H_x & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \Rightarrow$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = j\beta H_m \exp j(\omega t + \beta z) \mathbf{u}_y = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{j\beta H_m}{\varepsilon_0} \int \exp j(\omega t + \beta z) dt \mathbf{u}_y = \frac{j\beta H_m}{\varepsilon_0} \frac{1}{j\omega} \exp j(\omega t + \beta z) \mathbf{u}_y$$

$$\text{Donc } \mathbf{E} = \frac{\beta H_m}{\varepsilon_0 \omega} \exp j(\omega t + \beta z) \mathbf{u}_y + Cte$$

3) On peut conclure que :

- Un champ électrique \mathbf{E} variable crée un champ magnétique \mathbf{H} variable ;
- Un champ magnétique \mathbf{H} variable crée un champ électrique \mathbf{E} variable ;
- $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$.

IV. LOI D'OHM LOCALISEE

La loi d'Ohm localisée est exprimée par la relation suivante :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

où σ conductivité électrique ($1/\Omega m$)

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

avec ρ résistivité (Ωm)

Exemples :

- Cuivre : $\sigma = 5,81 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$; $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega m$
- Aluminium : $\sigma = 3,54 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$; $\rho = 2,8 \cdot 10^{-9} \Omega m$
- Silicium (semi-conducteur) : $\sigma = 1,6 \cdot 10^{-5} \Omega^{-1} m^{-1}$; $\rho = 6,25 \cdot 10^3 \Omega m$
- Verre : $\sigma \approx 10^{-12} \Omega^{-1} m^{-1}$; $\rho \approx 10^{12} \Omega m$

Démonstration :

Soit un conducteur cylindrique de section S et de longueur L, soumis à une tension U

La loi d'Ohm généralisée s'écrit comme suit :

$$U=RI \quad (1)$$

R : résistance du conducteur

Comme

$$R=\int_S \frac{\rho}{S} dl, \quad I=\int J dS, \quad \text{et } U=\int E dl$$

nous obtenons en substituant dans l'équation 1 :

$$\int E dl = \int_S \frac{\rho}{S} dl \int J dS \Rightarrow E = \frac{\rho}{S} J$$

$$\text{Soit } J = \frac{E}{\rho}$$

$$\text{Ou bien } J = \sigma E$$

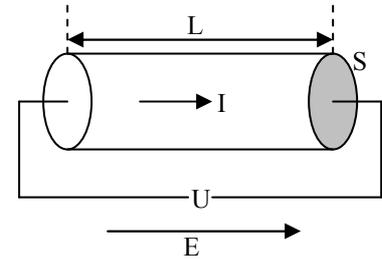


Figure 2

Cette égalité est également valable en notation vectorielle : $J = \sigma E$

V. CONDITIONS LIMITES

Soient deux milieux diélectriques différents (air et verre par exemple) séparés par une interface –frontière fictive de séparation- située dans le plan YOZ par exemple.

Question : Que devient le champ électromagnétique quand il passe d'un milieu à un autre ?

$$\text{Posons } E = E_t + E_n$$

E_t : composante tangentielle par rapport à la surface de séparation (plan YOZ).

E_n : composante perpendiculaire par rapport à la surface de séparation.

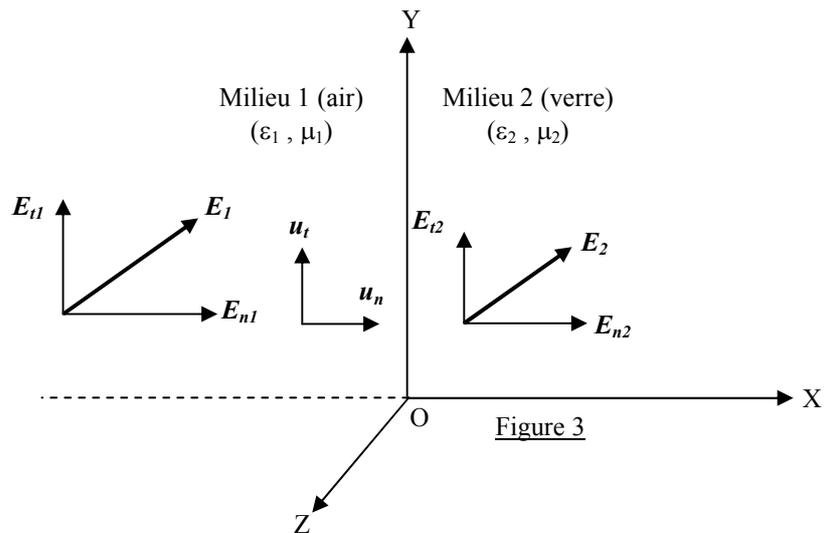


Figure 3

1. CHAMP ELECTRIQUE

a) Composantes tangentielles :

La forme intégrale de l'équation de MF est :

$$\oint E \cdot dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int B \cdot dS$$

Le contour fermé considéré est un rectangle ABCD situé de part et d'autre de la frontière.

$$\oint_{ABCD} E \cdot dl = \int E \cdot dl = E_{n1} \cdot DN + E_{n2} \cdot NC + E_{t2} \cdot CB + E_{n2} \cdot BM + E_{n1} \cdot MA + E_{t1} \cdot AD$$

Etant donné qu'on veut étudier le champ à la frontière des deux matériaux, c'est-à-dire les conditions limites du champ électrique, on pose :

$$AM=MB=DN=NC \approx 0,$$

On obtient alors :

$$\int_{ABCD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{t2} \cdot CB + E_{t1} \cdot AD = CB(E_{t2} - E_{t1}),$$

Par ailleurs, vu que :

$$AB \approx 0, \text{ donc } S = AB \times BC \approx 0$$

On déduit que :

$$-\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \approx 0$$

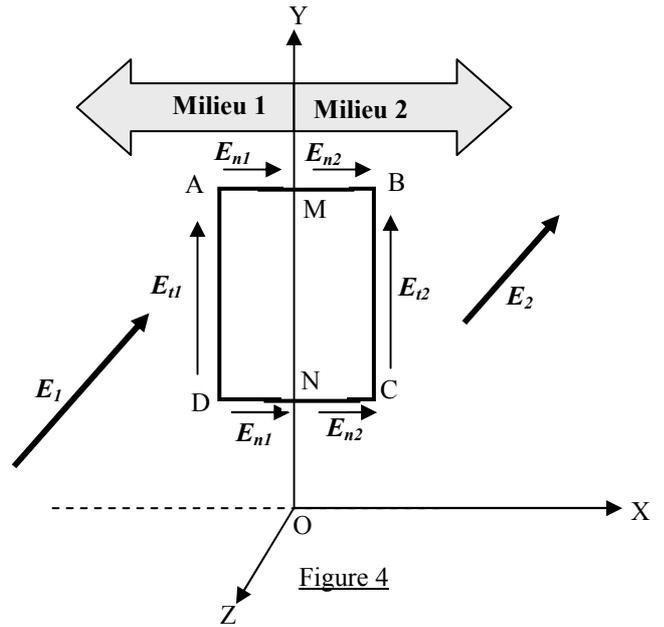
En outre sachant que :

$$AD = -CB$$

on arrive à

$$\int_{ABCD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = CB(E_{t2} - E_{t1}) = 0$$

Soit donc $E_{t2} = E_{t1}$



Conclusion : les composantes tangentielles du champ électrique sont égales.

b) Composantes normales :

La forme intégrale de l'équation de MG est :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon}$$

On considère comme surface fermée un cylindre de longueur L.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon} \Rightarrow \oint \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q \Rightarrow \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

$$\text{Soit } \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int D_{n1} \cdot dS_1 + \int D_{n2} \cdot dS_2 + \int D_{n3} \cdot dS_3$$

On suppose le cas général où la surface de séparation porte une charge $q = \rho_s S$.

Par ailleurs, vu que l'on étudie les conditions limites, on pose alors $L \approx 0$, soit donc $S_3 \approx 0$.

D'où :

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int D_{n1} \cdot dS_1 + \int D_{n2} \cdot dS_2 = -D_{n1} S_1 + D_{n2} S_2$$

Comme $S_1 = S_2 = S$:

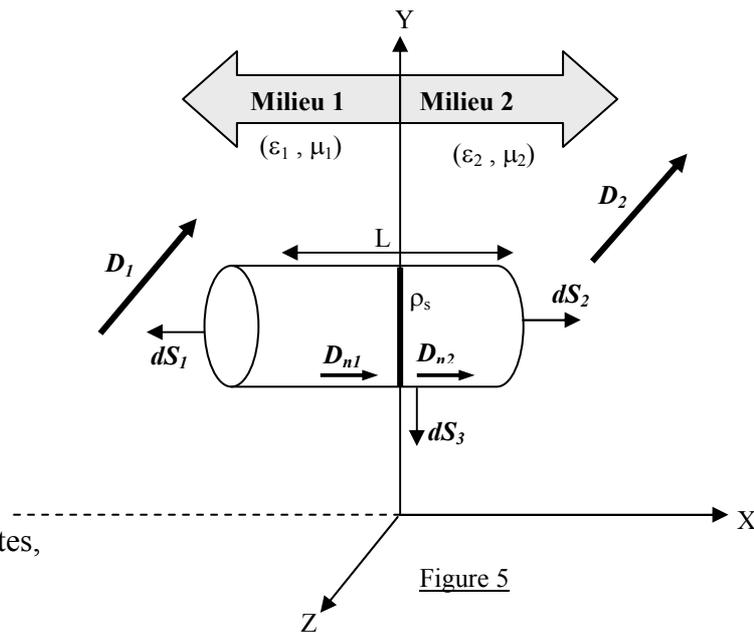
$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = S[D_{n2} - D_{n1}] = \rho_s S$$

Soit donc $D_{n2} - D_{n1} = \rho_s$

$$D_{n2} = D_{n1}$$

Si $\rho_s = 0$ qui est le cas le plus fréquent, on aboutit alors à :

$$\text{Ou bien } \epsilon_2 E_{n2} = \epsilon_1 E_{n1} \Rightarrow E_{n2} = E_{n1} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$



2. CHAMP MAGNETIQUE

a) Composantes perpendiculaires :

La forme intégrale de l'équation de MΦ est :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Considérons comme pour le cas précédent une surface cylindrique de longueur L.

L'application de cette équation à cette surface donne :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{B}_{n1} \cdot d\mathbf{S}_1 + \int \mathbf{B}_{n2} \cdot d\mathbf{S}_2 + \int \mathbf{B}_{n3} \cdot d\mathbf{S}_3 = 0$$

À la frontière entre les deux milieux (conditions limites) on doit poser :

$$L \approx 0 \quad , \text{ soit donc } S_3 \approx 0 .$$

On obtient alors :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{B}_{n1} \cdot d\mathbf{S}_1 + \int \mathbf{B}_{n2} \cdot d\mathbf{S}_2 = -B_{n1} S_1 + B_{n2} S_2 = 0$$

Comme $S_1 = S_2 = S$:

$$S(B_{n2} - B_{n1}) = 0$$

Soit $B_{n2} = B_{n1}$

$$\text{Ou bien : } \mu_2 H_{n2} = \mu_1 H_{n1} \Rightarrow H_{n2} = H_{n1} \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Conclusion : les composantes perpendiculaires de l'induction B sont égales.

b) Composantes tangentielles

La forme intégrale de l'équation de MA est :

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Choisissons comme contour fermé un cadre ABCD situé de part et d'autre de la frontière entre les deux milieux.

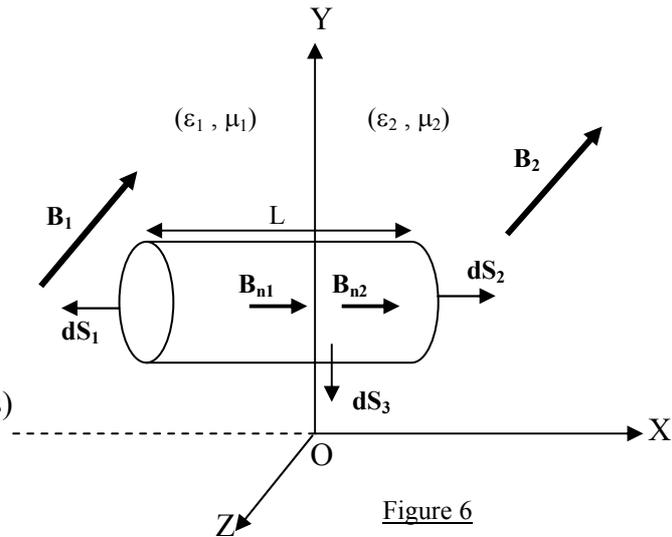


Figure 6

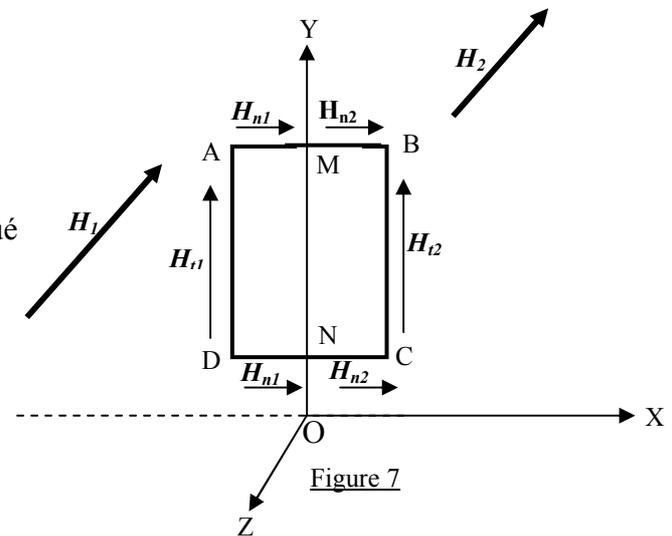


Figure 7

L'application de l'équation de M.A à ce cadre donne :

$$\oint_{ABCD} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{n1} \cdot DN + H_{n2} \cdot NC + H_{t2} \cdot CB + H_{n2} \cdot BM + H_{n1} \cdot MA + H_{t1} \cdot AD$$

A la frontière entre les deux milieux (conditions limites), on doit poser :

$$AM = MB = DN = NC \approx 0 .$$

On obtient alors :

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{t2} \cdot CB + H_{t1} \cdot AD$$

Par ailleurs, vu que :

$$AD = -CB$$

On peut écrire:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = CB \cdot (\mathbf{H}_{t2} - \mathbf{H}_{t1}) \quad (1)$$

D'autre part, comme $AB \approx 0$,

$$\Rightarrow S = AB \times BC \approx 0 \Rightarrow \varepsilon \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \approx 0$$

Calculons maintenant $\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$.

On considérera le cas général où la surface de séparation entre les deux milieux est une nappe de courant, quoi que ce cas est peu probable en pratique.

Courant volumique: le courant I circule dans un conducteur volumique de section S (figure 8).

La densité de courant dans ce cas est :

$$J_s = \frac{I}{S}$$

C'est une densité de courant surfacique.

Nappe de courant :

Le courant I circule dans une nappe (plan) de largeur L (figure 9).

La densité de courant dans ce cas est :

$$J_l = \frac{I}{L}$$

C'est une densité de courant linéique.

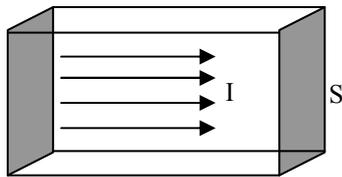


Figure 8 : Courant volumique

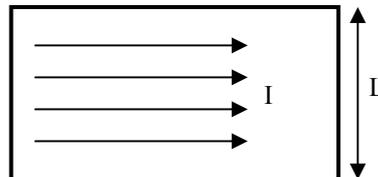


Figure 9 : Nappe de courant

Par conséquent

$$I = J_l L$$

Dans le cas donc où un courant surfacique circule dans la surface de séparation, le courant qui passe à travers le cadre ABCD est :

$$I = J_n BC$$

On ne considère que la partie du courant traversant le cadre, c'est-à-dire la composante perpendiculaire au cadre. Cette condition est dictée par le théorème d'Ampère lui même.

Comme $J_n = J_z$ et que $J_z = \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_z$, on obtient ce qui suit :

$$I = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_z) BC = \mathbf{J} \cdot (\mathbf{u}_x \wedge \mathbf{u}_y) BC = \mathbf{u}_y \cdot (\mathbf{J} \wedge \mathbf{u}_x) BC = (\mathbf{J} \wedge \mathbf{u}_x) \cdot BC \mathbf{u}_y$$

$$\text{soit } I = (\mathbf{J} \wedge \mathbf{u}_x) \cdot \mathbf{CB} \quad (2).$$

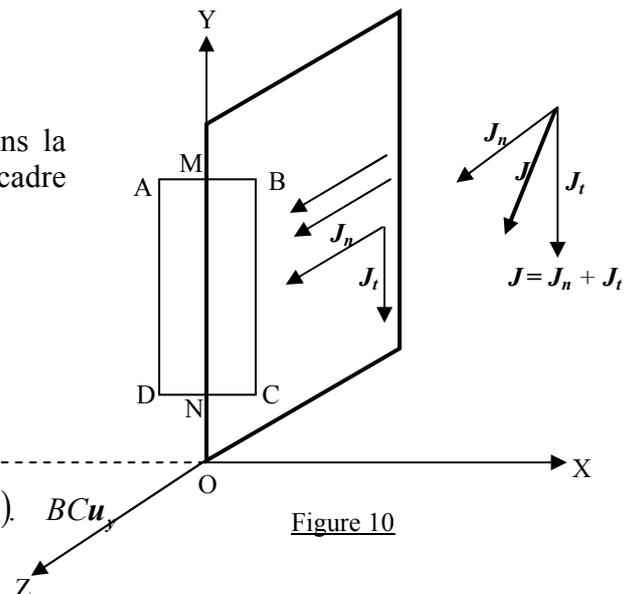


Figure 10

En établissant l'égalité des équations (1) et (2), on obtient :

$$CB \cdot (\mathbf{H}_{t2} - \mathbf{H}_{t1}) = CB \cdot (\mathbf{J} \wedge \mathbf{u}_x)$$

Soit $H_{t2} - H_{t1} = J \wedge u_x$

En posant n_{12} comme étant le vecteur unitaire dirigé du milieu 1 vers le milieu 2, on arrive à :

$$H_{t2} - H_{t1} = J \wedge n_{12}$$

RESUME :

$$E_{t2} = E_{t1} ;$$

$$\varepsilon_2 E_{n2} - \varepsilon_1 E_{n1} = \rho_s \text{ (en général } \rho_s = 0 \text{)} ;$$

$$\mu_2 H_{n2} = \mu_1 H_{n1} ;$$

$$H_{t2} - H_{t1} = J \wedge n_{12} \text{ (en général } J = 0 \text{)}.$$

EXERCICE

Soient deux milieux isolants différents. La surface de séparation entre les deux milieux est située dans le plan XOY.

On donne $B_1 = 1,2u_x + 0,8u_y + 0,4u_z$.

Déterminer l'induction B_2 régnant dans le milieu 2.

Solution :

$$B_1 = 1,2u_x + 0,8u_y + 0,4u_z \Rightarrow$$

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1,2}{15} u_x + \frac{0,8}{15} u_y + \frac{0,4}{15} u_z \right)$$

$$\text{soit } H_1 = \frac{1}{\mu_0} (0,08u_x + 0,05u_y + 0,03u_z)$$

D'autre part, nous avons $H_{t2} - H_{t1} = J \wedge n_{12}$
comme $J=0$ on pose

$$H_{t2} = H_{t1}$$

Les composantes tangentielles sont : u_x et u_y .

$$\text{d'où } H_{t2} = H_{t1} = \frac{1}{\mu_0} (0,08u_x + 0,05u_y)$$

$$\text{et donc } B_{t2} = \mu_2 H_{t2} = \mu_0 H_{t2} = 0,08u_x + 0,05u_y$$

La composante normale étant suivant u_z , alors :

$$B_{n1} = 0,4u_z$$

vu que $B_{n2} = B_{n1}$, il vient:

$$B_{n2} = 0,4u_z$$

$$\text{d'où } B_2 = B_{t2} + B_{n2} = 0,08u_x + 0,05u_y + 0,4u_z$$

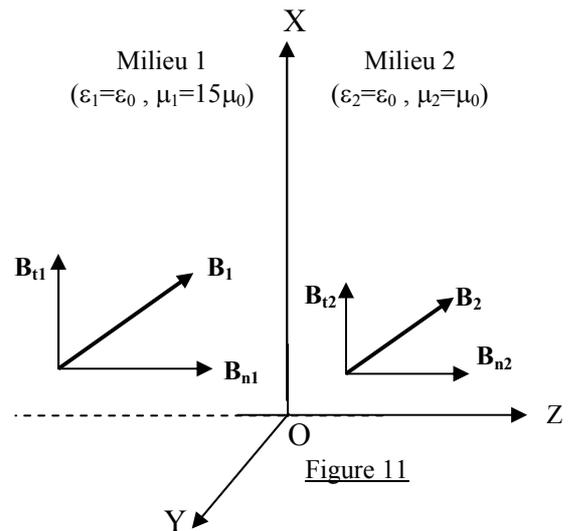


Figure 11

CHAPITRE V

PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE ONDES ELECTROMAGNETIQUES

I. DESCRIPTION MATHEMATIQUE DE LA PROPAGATION

Considérons une fonction physique $\zeta = f(x)$ représentée graphiquement par la courbe en trait plein, qui se propage dans le sens des x positifs. A la distance $x = x_0$, nous obtenons la fonction $\zeta = f(x-x_0)$, la courbe a été déplacée vers la droite d'une quantité x_0 . de même $\zeta = f(x+ x_0)$ correspond à un déplacement vers la gauche.

De toute évidence, la forme de la courbe n'a pas été modifiée ; les mêmes valeurs de ζ se retrouvent.

Si on pose $x = v t$, où v représente la vitesse de propagation de la courbe, on obtient une courbe « voyageuse » ; c'est à dire que $\zeta = f(x-vt)$ représente une courbe se déplaçant vers la droite et $\zeta = f(x+ vt)$ représente une courbe se déplaçant vers la gauche.

Nous concluons qu'une expression mathématique de la forme $\zeta = f(x \pm vt)$ est suffisante pour décrire un phénomène physique qui se propage sans déformation, suivant le sens positif ou négatif de l'axe des x .

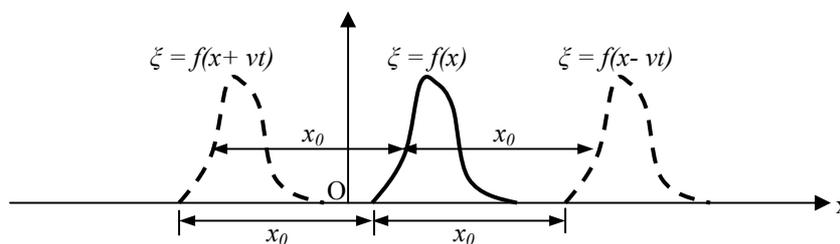


Figure 1 : Translation sans déformation de la fonction $\zeta = f(x \pm vt)$

Fonction sinusoïdale :

Un cas spécialement intéressant est dans lequel $\zeta = f(x, t)$ est une fonction sinusoïdale :

$$\zeta = f(x, t) = \zeta_0 \sin \beta(x - vt).$$

En remplaçant x par $(x + 2\pi / \beta)$, on obtient la même valeur, soit :

$$\zeta\left(x + \frac{2\pi}{\beta} - vt\right) = \zeta_0 \sin \beta\left(x + \frac{2\pi}{\beta} - vt\right) = \zeta_0 \sin[\beta(x - vt) + 2\pi] = \zeta(x - vt)$$

donc

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

représente la « période dans l'espace », c'est à dire que la courbe se reproduit égale à elle même tous les λ , qui est appelée *longueur d'onde*. La quantité $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ représente alors le nombre de longueurs d'onde dans la distance 2π et est appelé *nombre d'onde*.

Par conséquent, on peut écrire :

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(\beta x - \omega t)$$

où

$$\omega = \beta v = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

est la pulsation de l'onde.

Puisque

$$\omega = 2\pi f$$

on a la relation importante :

$$\lambda f = v.$$

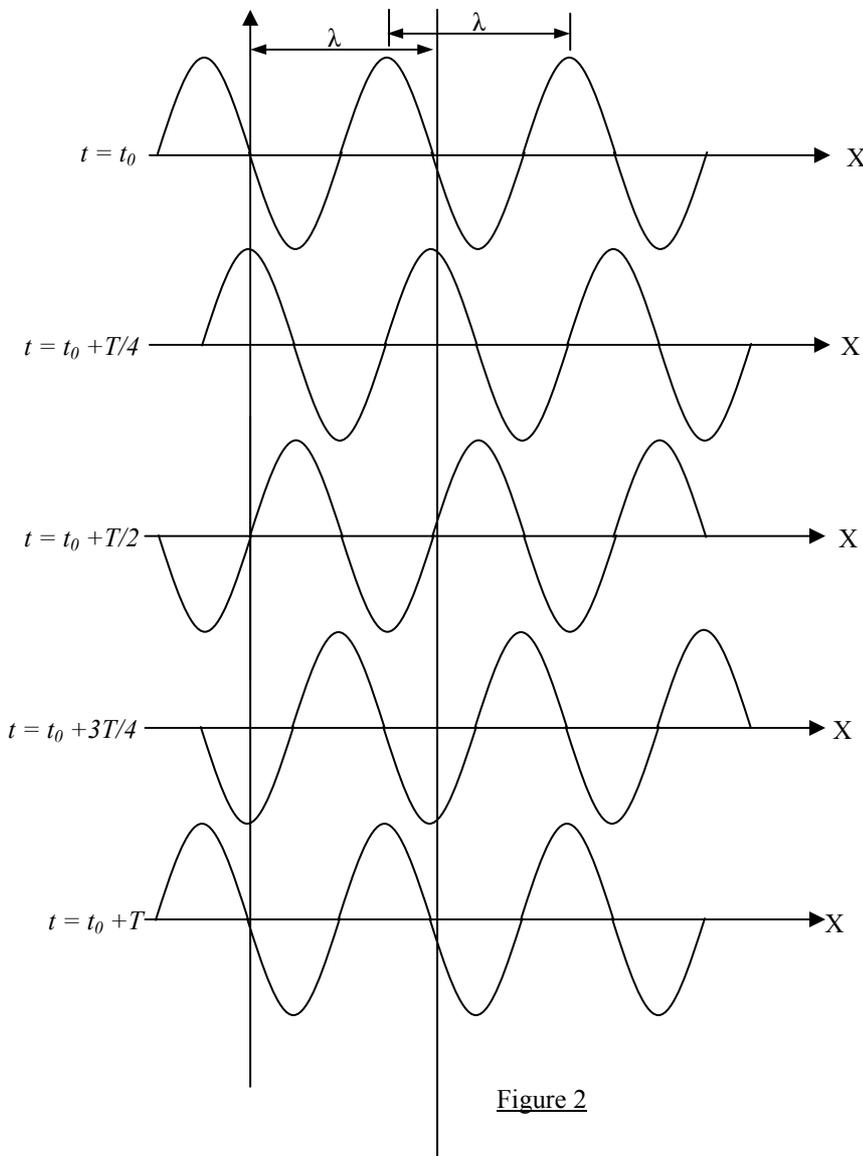


Figure 2

Nous pouvons remarquer que, tandis que la situation physique se propage vers la droite, elle se reproduit identique à elle-même dans l'espace avec une période : la longueur d'onde λ est la distance que progresse l'onde en une période T .

On a donc deux périodes :

l'une dans le temps T et l'autre dans l'espace λ , liées par la relation

$$\lambda = \frac{v}{f} = vT.$$

EXERCICE

Montrer que l'expression d'une onde progressive $\xi = f(x \pm vt)$ peut s'écrire sous une autre forme $\xi = f(t \pm x/v)$.

$$x \pm vt = \frac{v}{v}(x \pm vt) = v\left(\frac{x \pm vt}{v}\right) = v\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$$

donc $\xi(x \pm vt) \Leftrightarrow \xi\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$.

Par conséquent, pour l'onde sinusoïdale, on peut écrire :

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin \beta(x \pm vt) = \xi_0 \sin \beta v \left(\frac{x \pm vt}{v}\right)$$

comme $\beta v = \omega$,

$$\xi_0 \sin \beta(x \pm vt) = \xi_0 \sin \omega \left(t \pm \frac{x}{v}\right) = \xi_0 \sin(\omega t \pm \beta x)$$

II. EQUATION DE PROPAGATION D'UNE ONDE QUELCONQUE

Exemple : Onde de vibration sur une corde.

Une vibration créée en "m" progresse vers "p" en gardant la même forme, il s'agit donc d'une onde progressive.

Si la propagation se fait vers les $x > 0$, on pose :

$$r_p(t) = r_m(t - \tau)$$

Propagation vers les $x < 0$, on pose :

$$r_p(t) = r_m(t + \tau)$$

avec

$\tau = x/v$: retard ou temps de propagation ;

où

v : vitesse de propagation de l'onde.

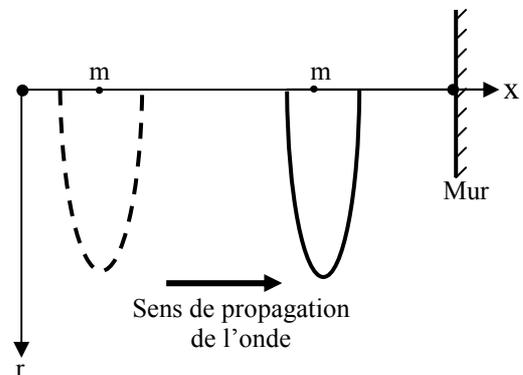


Figure 3

1. Equation de propagation

On supposera une propagation vers les $x > 0$, on pose donc :

$$r_p(t) = r_m(t - \tau)$$

posons

$$r_p(t) = f(t) \text{ et}$$

$$r_m(t - \tau) = f(t - \tau) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) = f(u)$$

avec

$$u = t - \frac{x}{v}$$

Calculons les dérivées première et seconde de r par rapport au temps t

$$\frac{\partial r_m(t-\tau)}{\partial t} = \frac{\partial f(u)}{\partial t} = \frac{\partial f(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = f'(u)$$

$$\frac{\partial^2 r_m(t-\tau)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f(u)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f(u)}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} f'(u) = \frac{\partial f'(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = f''(u)$$

soit $\frac{\partial^2 r_m}{\partial t^2} = f''(u)$ (1)

Calculons les dérivées première et seconde de r par rapport à x

$$\frac{\partial r_m}{\partial x} = \frac{\partial r_m(t-\tau)}{\partial x} = \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\partial f(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{v} f'(u)$$

$$\frac{\partial^2 r_m(t-\tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_m(t-\tau)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{v} f'(u) \right) = -\frac{1}{v} \frac{\partial f'(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{v^2} f''(u)$$

soit $\frac{\partial^2 r_m(t-\tau)}{\partial x^2} = -\frac{1}{v^2} f''(u)$ (2)

En combinant les équations (1) et (2), on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 r_m}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 r_m}{\partial t^2}}$$

Cette équation représente l'expression mathématique de l'équation de propagation de la grandeur r_m suivant l'axe des x .

Propagation suivant une direction quelconque

$$\frac{\partial^2 r_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r_m}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 r_m}{\partial t^2}$$

soit $\nabla^2 r_m = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 r_m}{\partial t^2}$ (4)

Equation différentielle de la propagation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

est l'équation différentielle de propagation de la grandeur ξ suivant l'axe des x .

La solution de cette équation est de la forme :

$$\xi(x,t) = f_1(x-vt) + f_2(x+vt)$$

Cette solution peut alors s'exprimer comme la superposition de deux ondes se propageant en sens opposés. Evidemment, pour une onde se propageant dans un seul sens, seule l'une des deux fonctions de l'équation est nécessaire.

Exercice : montrer que l'équation précédente est bien la solution de l'équation de propagation.

$$\xi(x,t) = f_1(x \pm vt) = f_1(u)$$

avec $u = x \pm vt$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\xi}{du} ; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \frac{d\xi}{du}$$

Ensuite en calculant les dérivées secondes on obtient :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\xi}{du} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{d\xi}{du} \right) = \frac{d^2 \xi}{du^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\xi}{du} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{d\xi}{du} \right) = \frac{\partial}{\partial u} (\pm v) (\pm v) \frac{d\xi}{du} = v^2 \frac{d^2 \xi}{du^2}$$

en combinant ces deux équations pour éliminer $d^2 \xi / du^2$, nous obtenons l'équation de

$$\text{propagation : } \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Exercice : montrer que l'équation sinusoïdale est bien la solution de l'équation de propagation.

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t - \beta x)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\beta \xi_0 \cos(\omega t - \beta x) ; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\beta^2 \xi_0 \sin(\omega t - \beta x) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega \xi_0 \cos(\omega t - \beta x) ; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi_0 \sin(\omega t - \beta x) \quad (2)$$

par conséquent, en éliminant $\xi_0 \sin(\omega t - \beta x)$ entre les équations (1) et (2), on obtient :

$$\frac{1}{-\beta^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{-\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\beta^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

III. EQUATION DE PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS LE VIDE

1. Equation de propagation de E

Les équations de Maxwell sont :

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} ; \quad \text{div} \mathbf{B} = 0 ; \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} ; \quad \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

En posant dans vide que :

- $J=0 ; \rho=0$ (milieu neutre).
- $\epsilon = \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} ; \mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$

on obtient

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot}(\text{rot} \mathbf{E}) = \text{rot} \left(-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \mathbf{H})$$

$$\text{d'où } \text{rot}(\text{rot} \mathbf{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (5)$$

d'autre part, nous avons

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = \text{grad}(\text{div}\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}$$

comme $\text{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$, on a :

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = -\nabla^2\mathbf{E}$$

soit donc, en tenant compte de l'équation (5) :

$$\nabla^2\mathbf{E} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6) ;$$

En comparant celle-ci avec l'équation (4), à savoir $\nabla^2 r_m = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 r_m}{\partial t^2}$, on déduit :

$$\boxed{\frac{1}{v^2} = \epsilon_0\mu_0}$$

soit

$$v = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{1}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Conclusion : *Le champ électrique \mathbf{E} se propage dans le vide avec une vitesse $v = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.*

2. Equation de propagation de \mathbf{H}

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{H}) = \text{rot}\left(\epsilon_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\mathbf{E})$$

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0 \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (7)$$

d'autre part

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{H}) = \text{grad}(\text{div}\mathbf{H}) - \nabla^2\mathbf{H}$$

comme $\text{div}\mathbf{B} = 0$,

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{H}) = -\nabla^2\mathbf{H}$$

soit donc, en tenant compte de l'équation (7) :

$$\nabla^2\mathbf{H} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (8) ;$$

En comparant celle-ci avec l'équation (4), à savoir $\nabla^2 r_m = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 r_m}{\partial t^2}$, on déduit également que :

$$v = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Conclusion : *Le champ magnétique \mathbf{H} se propage également dans le vide avec une vitesse $v = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.*

IV. VERIFICATION EXPERIMENTALE

Contrairement à la majorité des découvertes scientifiques qui commencent par des essais expérimentaux avant d'établir des lois théoriques (Loi de Coulomb, loi de Faraday), la démonstration mathématique (théorique) de la propagation du champ électromagnétique était réalisée bien avant que l'expérience ne vienne confirmer la théorie de propagation du champ électromagnétique.

Expérience de Hertz

Vers la fin du dix-neuvième siècle, le physicien allemand Heinrich Hertz (1857 – 1894) a prouvé de manière indiscutable que le champ électromagnétique se propage bien dans le vide. L'accumulation d'informations des ondes électromagnétiques concernant leur production, leur propagation et leur absorption a ouvert la porte au monde merveilleux des communications tel que nous le connaissons aujourd'hui. Avant que Hertz n'ait effectué ses expériences, l'existence des ondes électromagnétiques avait été prédite par Maxwell à la suite d'une analyse détaillée des équations du champ électromagnétique.

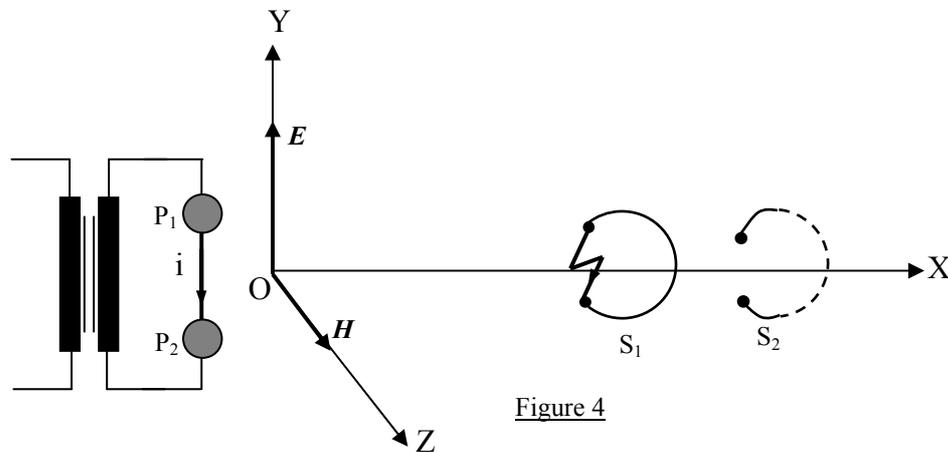


Figure 4

Le système formé par les deux boules sphériques P_1 et P_2 alimenté par une tension est un oscillateur, à chaque étincelle (arc) qui apparaît entre les deux sphères circule un courant i brusque et donc variable. Ce courant génère un champ électrique et un champ magnétique.

Résultat de l'expérience :

Il apparaît une étincelle aux bornes de la spire S_1

Interprétation :

L'apparition de l'étincelle montre qu'il existe une tension aux bornes de la spire S_1 , en fait c'est une f.e.m induite par le champ magnétique H crée par l'oscillateur, et qui s'est propagé jusqu'à S_1 . La spire S_2 étant parallèle au champ H , le flux magnétique est nul et ne peut pas induire une f.e.m.

Conclusion :

Quand le champ électromagnétique est variable, il devient une onde qui se propage dans l'air.

V. ONDE PLANE

L'expression $\xi = f(\omega t - \beta x)$ signifie qu'à un instant donné t , la fonction prend la même valeur en tout point ayant une même coordonnée x . Mais $x = \text{const}$ représente un plan perpendiculaire à l'axe des x (Figure). Par conséquent, $\xi = f(\omega t - \beta x)$ décrit dans l'espace une onde plane se propageant parallèlement à l'axe des x .

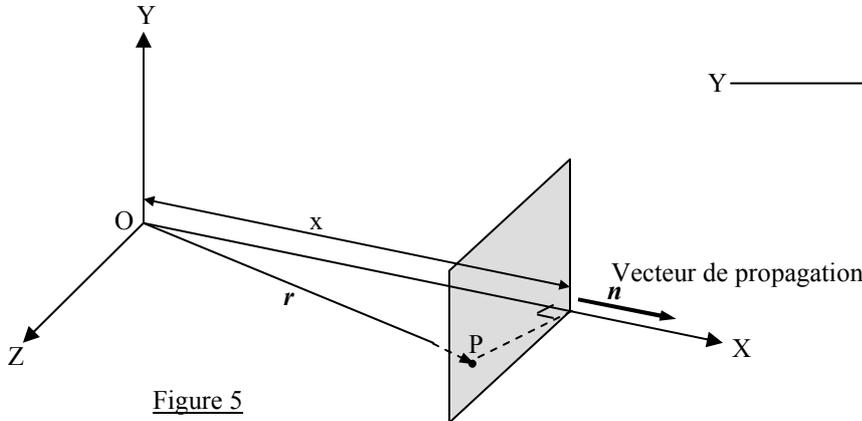


Figure 5

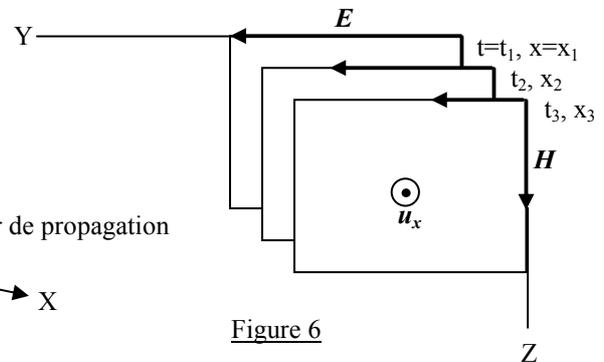


Figure 6

n est un vecteur unitaire dirigé suivant l'axe de propagation, appelé vecteur de propagation.

L'onde électromagnétique est plane lorsque E et H forment un plan qui se propage dans une seule direction.

Remarque :

Les ondes électromagnétiques sont soit des ondes planes soit une combinaison d'ondes planes.

Si r est le vecteur position d'un point quelconque P du front d'onde, on a $x = n \cdot r$ et l'on peut donc écrire :

$$\xi = f(\omega t - \beta n \cdot r).$$

Cette forme reste valable quelque soit la direction de n :

$$n = n_x u_x + n_y u_y + n_z u_z.$$

Dans le cas d'une onde sinusoïdale se propageant dans une direction n quelconque, on écrit :

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t - \beta n \cdot r)$$

Il est commode de définir un vecteur $\beta = \beta n$. il est habituellement nommé *vecteur d'onde*.

Remarque : si la propagation a lieu dans l'espace à trois dimensions l'équation d'onde doit être modifiée en conséquence. Elle devient alors

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1)$$

Dans ce cas, on pose également :

$$\beta = \beta_x u_x + \beta_y u_y + \beta_z u_z.$$

Pour une onde sinusoïdale, on obtient :

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t - \beta n_x x - \beta n_y y - \beta n_z z) \quad (2)$$

et,

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2} .$$

Remarque : en plus des ondes planes, il existe des ondes cylindriques, sphériques...

- Les ondes planes se propagent dans une seule direction (Figure 7).
- Les ondes cylindriques se propagent perpendiculairement à l'axe d'un cylindre (Figure 8).
- Les ondes circulaires qui se propagent dans toutes les directions suivant un plan (Figure 9).
- Les ondes sphériques se propagent dans toutes les directions (Figure 9).

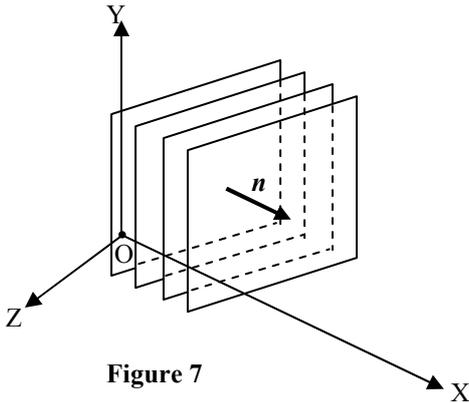


Figure 7

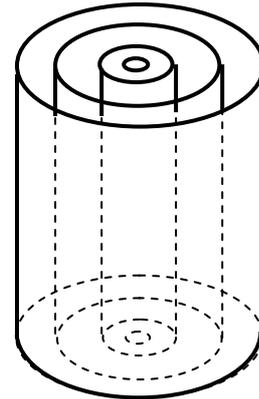


Figure 8

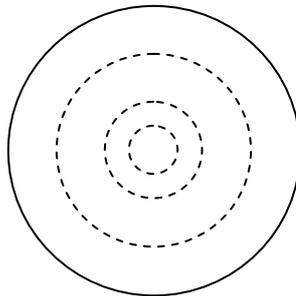


Figure 9

Remarque : l'onde circulaire qui se propage sur un plan est bi-dimensionnelle qui demande seulement deux coordonnées d'espace. L'équation pour cette onde est donc :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} .$$

EXERCICE

Montrer que l'équation (2) vérifie l'équation différentielle de propagation (1).

Solution :

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t - \beta n_x x - \beta n_y y - \beta n_z z)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega \xi_0 \cos(\omega t - \beta x) ; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi_0 \sin(\omega t - \beta x) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\beta n_x \xi_0 \cos(\omega t - \beta n_x x - \beta n_y y - \beta n_z z) ; \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\beta^2 (n_x^2) \xi_0 \sin(\omega t - \beta n_x x - \beta n_y y - \beta n_z z) \quad (3)$$

par analogie avec l'équation (3), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -\beta^2 (n_y^2) \xi_0 \sin(\omega t - \beta n_x x - \beta n_y y - \beta n_z z) \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\beta^2 (n_z^2) \xi_0 \sin(\omega t - \beta n_x x - \beta n_y y - \beta n_z z) \quad (5)$$

En remplaçant les expressions (3), (4) et (5) dans l'équation différentielle de propagation, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\beta^2 \xi_0 \sin(\omega t - \beta n_x x - \beta n_y y - \beta n_z z) [(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)]$$

comme $(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = 1$,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\beta^2 \xi_0 \sin(\omega t - \beta n_x x - \beta n_y y - \beta n_z z)$$

comme par ailleurs,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega \xi_0 \cos(\omega t - \beta n_x x - \beta n_y y - \beta n_z z) ; \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi_0 \sin(\omega t - \beta n_x x - \beta n_y y - \beta n_z z)$$

on aboutit à :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

EXERCICE

Soit un champ sinusoïdal $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u} \cos(\omega t)$ qui se propage suivant l'axe des x. Réécrire les équations de Maxwell et l'équation de propagation en utilisant la forme exponentielle.

Solution :

Considérons le champ $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u} \cos(\omega t)$,

Écrit sous forme exponentielle, il devient :

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u} \exp j \omega t$$

Calculons les dérivées première et seconde par rapport au temps

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j \omega E_0 \mathbf{u} \exp j \omega t = j \omega \mathbf{E} ;$$

et

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = (j \omega)^2 \mathbf{E} = -\omega^2 \mathbf{E}$$

donc on peut remplacer $\frac{\partial}{\partial t}$ par $j \omega$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{ par } -\omega^2 .$$

En tenant compte de ces remplacements, les équations de Maxwell deviennent :

$$\text{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\sigma\mathbf{E}+j\varepsilon_0\omega\mathbf{E} \ ; \ \text{rot}\mathbf{E}=-\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=-j\mu_0\omega\mathbf{H}$$
$$\text{div}\mathbf{B}=0 \ ; \ \text{div}\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

et l'équation de propagation devient :

$$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0\Rightarrow\nabla^2\mathbf{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0\Rightarrow\nabla^2\mathbf{E}-\varepsilon_0\mu_0(-\omega^2)\mathbf{E}=0$$

soit $\nabla^2\mathbf{E}+\varepsilon_0\mu_0\omega^2\mathbf{E}=0$

En posant $\beta^2=\varepsilon_0\mu_0\omega^2$, on obtient :

$$\nabla^2\mathbf{E}+\beta^2\mathbf{E}=0.$$

Remarque

Si l'on considère une propagation suivant l'axe des x, l'équation précédente devient :

$$\nabla^2\mathbf{E}=\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2}\Rightarrow\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2}+\beta^2\mathbf{E}=0$$

C'est une équation différentielle dont la solution est de la forme suivante :

$$\mathbf{E}=E_0\mathbf{u}_1\exp j(\omega t-\beta x)+E_0\mathbf{u}_2\exp j(\omega t+\beta\varphi)$$

Où $E_0\mathbf{u}_1\exp j(\omega t-\beta x)$ est une onde se déplaçant vers les $x > 0$;

Et $E_0\mathbf{u}_2\exp j(\omega t+\beta\varphi)$ est une onde progressive vers les $x < 0$.

VI. CARACTERISTIQUES DES ONDES PLANES

Dans tout ce paragraphe on supposera une propagation des ondes suivant la direction des x positifs.

1. Onde transverse

l'équation de MG est : $\text{div}\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$

En général les milieux où se propagent les ondes sont électriquement neutres, on pose $\rho=0$:
Alors,

$$\text{div}\mathbf{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \ (1)$$

pour simplifier, considérons une propagation suivant un seul axe, celui des x.
par conséquent nous avons

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}=0$$

l'équation (1) devient

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0$$

on obtient par la suite que

$$E_x=Cte$$

donc $E_x(x)=Cte$

D'autre part,
l'équation de propagation de \mathbf{E} suivant x s'écrit

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

posons $\mathbf{E} = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y + E_z \mathbf{u}_z$

on peut écrire $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y + E_z \mathbf{u}_z) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y + E_z \mathbf{u}_z)$

Suivant \mathbf{u}_x , on obtient :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (1)$$

Suivant \mathbf{u}_y , on obtient :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Suivant \mathbf{u}_z , on obtient :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

Vu que $E_x(x) = Cte$, l'équation (1) devient :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

soit $\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$

La solution de cette équation est

$$E_x(t) = At + B$$

ou bien $E_x(t) = Cte$

La première est une solution mathématiquement juste, mais physiquement impossible, car un champ qui croîtrait de lui même indéfiniment avec le temps sans raison n'existe pas.

Par conséquent, vu que $E_x(x) = Cte$ et $E_x(t) = Cte$, on peut établir que :

$$E_x(x, t) = Cte$$

Ou bien $E_x(x, t) = 0$.

Vu que dans la propagation des ondes les grandeurs constantes, donc statiques, sont négligées et posées égales à zéro.

Remarque :

on peut également démontrer que $H_x(x, t) = 0$

Conclusion :

La composante du champ électromagnétique suivant la direction de propagation (E_x, H_x) étant nulle, l'onde plane est située dans le plan YOZ et donc perpendiculaire à la direction de propagation OX :

l'onde plane est transverse.

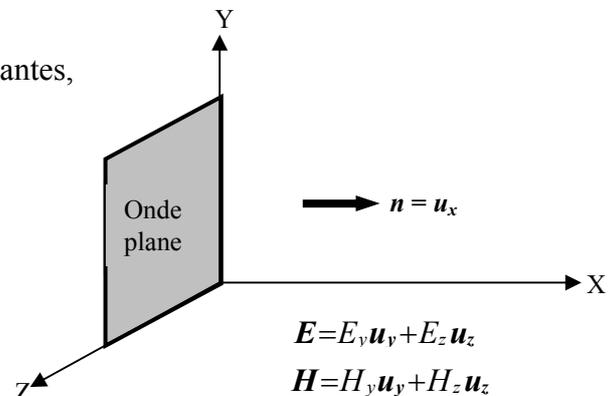


Figure 10

2. Impédance caractéristique

Pour simplifier, supposons toujours une propagation suivant l'axe des $x > 0$, on peut alors poser

$$\mathbf{E} = f\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad \mathbf{H} = g\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \text{et}$$

$$E_x = 0$$

l'équation de MF est :

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & E_y E_z & \end{pmatrix} = -\mathbf{u}_y \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \mathbf{u}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right)$$

d'autre part

$$-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \mathbf{u}_y - \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \mathbf{u}_z$$

on obtient alors

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (\text{a})$$

et

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (\text{b})$$

Par ailleurs

A partir de l'équation de MA $\text{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ nous obtenons ce qui suit :

$$\text{rot} \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & H_y H_z & \end{pmatrix} = -\mathbf{u}_y \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \mathbf{u}_z \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \mathbf{u}_y + \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \mathbf{u}_z$$

on a alors

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (\text{c})$$

et

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (\text{d})$$

Si on pose $E_y = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$, l'équation (c) donne :

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial f(u)}{\partial t} = \frac{\partial f(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = f_1'(u) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

donc

$$H_z = \int -\varepsilon_0 f_1'(u) dx$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{v} \Rightarrow dx = -v du$$

on arrive alors à

$$H_z = -\varepsilon_0(-v) \int f_1'(u) du = \varepsilon_0 v f_1(u) + Cte = \varepsilon_0 v f_1(u)$$

soit donc

$$H_z = \varepsilon_0 v E_y$$

et

$$\frac{E_y}{H_z} = \frac{E_y}{\varepsilon_0 v E_y} = \frac{1}{\varepsilon_0 v} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0$$

d'où

$$\frac{E_y}{H_z} = Z_0$$

Si on pose $E_z = f_2\left(t - \frac{x}{v}\right)$, l'équation (d) donne :

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial f_2(u)}{\partial t} = \frac{\partial f_2(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = f_2'(u) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$H_y = \int \varepsilon_0 f_2'(u) dx$$

comme $dx = -v du$

il vient

$$H_y = -\varepsilon_0 v \int f_2'(u) du = -\varepsilon_0 v f_2(u) + Cte = -\varepsilon_0 v f_2(u)$$

soit $H_y = -\varepsilon_0 v E_z$

et

$$\frac{E_z}{H_y} = \frac{E_z}{-\varepsilon_0 v E_z} = -\frac{1}{\varepsilon_0 v} = -\frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\varepsilon_0} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = -Z_0$$

$$\frac{E_z}{H_y} = -Z_0$$

Le rapport entre les modules de \mathbf{E} et \mathbf{H} vaut alors :

$$\frac{E}{H} = \frac{\sqrt{E_y^2 + E_z^2}}{\sqrt{H_y^2 + H_z^2}} = \frac{\sqrt{E_y^2 + E_z^2}}{\sqrt{\left(-E_z/Z_0\right)^2 + \left(E_y/Z_0\right)^2}}$$

$$\frac{E}{H} = \frac{\sqrt{E_y^2 + E_z^2}}{\sqrt{\frac{1}{Z_0^2}(E_y^2 + E_z^2)}} = \frac{1}{1/Z_0} = Z_0$$

Soit $\frac{E}{H} = Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$

Unité de Z_0

$$[Z_0] = \frac{[E]}{[H]} = \frac{V/m}{A/m} = \frac{V}{A} = \Omega$$

Z_0 est appelée "Impédance caractéristique" du milieu dans lequel se déroule la propagation des ondes.

Pour le vide, air : $Z_0 = 120\pi$

3. $E \perp H$

Considérons toujours une propagation suivant l'axe des x positifs, donc on a :

- vecteur de propagation $\mathbf{n} = \mathbf{u}_x$
- $E_x = 0$
- $\mathbf{E} = E_y \mathbf{u}_y + E_z \mathbf{u}_z$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = E_y H_y + E_z H_z = E_y \left(\frac{E_z}{-Z_0} \right) + E_z \left(\frac{E_y}{Z_0} \right) = 0$$

Conclusion: les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{H} sont perpendiculaires entre eux.

4. Direction de propagation

Calculons $\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ 0 & E_y & E_z \\ 0 & H_y & H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ Z_0 H_z & -Z_0 H_y & 0 \\ 0 & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

soit

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{H} = \mathbf{u}_x (Z_0 H_z^2 + Z_0 H_y^2) = Z_0 H^2 \mathbf{u}_x$$

comme $\mathbf{u}_x = \mathbf{n}$, on peut écrire :

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{H} = Z_0 H^2 \mathbf{n}$$

Conclusion : le produit vectoriel de \mathbf{E} par \mathbf{H} donne la direction de propagation.

VII. PROPAGATION DANS UNE DIRECTION QUELCONQUE

Quand la propagation se fait suivant l'axe des x, le champ \mathbf{E} de l'onde s'exprime par :

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u} \exp j(\omega t - \beta x)$$

Suivant OM, le champ \mathbf{E} s'écrit :

$$\mathbf{E}(M) = E_0 \mathbf{u} \exp j(\omega t - \beta OM) ;$$

comme il s'agit d'un même plan d'onde, le champ est le même sur tout le plan :

$$\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}(P)$$

Vu que

$$OM = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OP} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$$

soit donc

$$\mathbf{E}(P) = E_0 \mathbf{u} \exp j(\omega t - \beta \mathbf{n} \cdot \mathbf{r})$$

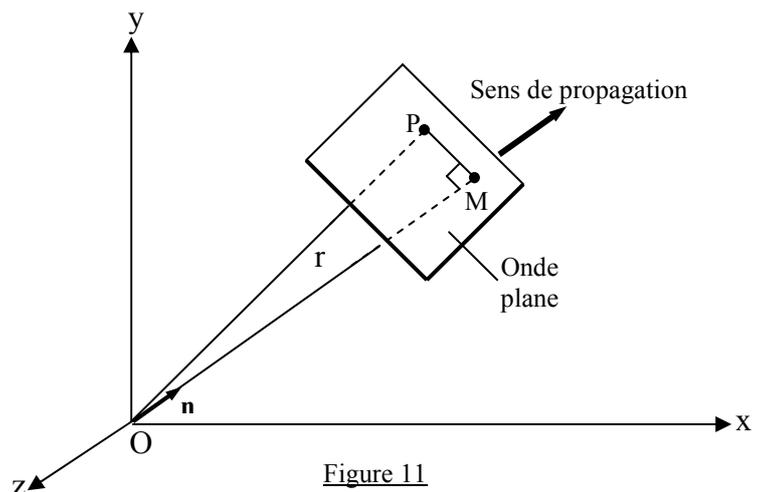


Figure 11

On déduit que l'expression du champ se propageant suivant une direction quelconque \mathbf{n} est :

$$\mathbf{E}(P) = E_0 \mathbf{u} \exp j(\omega t - \beta \mathbf{n} \cdot \mathbf{r})$$

VIII. VITESSE ET LONGUEUR D'ONDE

1. Vitesse de phase

Dans une onde plane considérée à un instant t , les modules de E et H ainsi que la phase φ sont constants ;

On peut donc poser que la phase φ est constante :

$$\varphi = \omega t - \beta x = Cte$$

soit

$$d(\omega t - \beta x) = 0 \Rightarrow \omega dt - \beta dx = 0$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{\beta}$$

Vitesse de groupe

La vitesse définie auparavant $v = \omega / \beta$ est appelée vitesse de phase. En réalité, l'onde qui possède une longueur d'onde et une fréquence unique n'est pas capable de transmettre un signal, car un signal implique quelque chose qui commence à un instant et qui se termine à un instant ultérieur, qu'on appelle *Pulse* (Figure).

La vitesse à laquelle le signal est transmis est la vitesse avec laquelle se propage la Pulse.

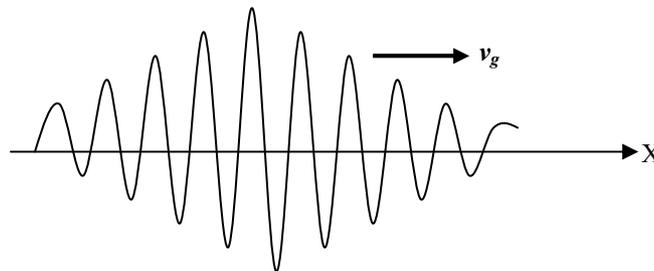


Figure 12

Le pulse n'est pas sinusoïdal puisque son amplitude n'est pas constante le long de l'axe des X. nous devons donc faire une analyse de Fourier et nous devons donc examiner la situation plus soigneusement.

2. Fréquence d'onde

$$\varphi = \omega t - \beta x$$

Phase dans le temps : $\varphi(t) = \omega t$

Pour $t = T$,

avec T période dans le temps

on écrit :

$$\omega T = 2\pi$$

soit

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1)$$

3. Longueur d'onde

Phase dans l'espace : $\varphi(x) = \beta x$

Pour $x = \lambda$

Avec λ période dans l'espace ou longueur d'onde

on écrit :

$$\beta\lambda = 2\pi$$

soit

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (2)$$

En combinant les équations (1) et (2), on obtient :

$$\omega T = \beta\lambda$$

d'où

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda}{T}$$

comme $\frac{\omega}{\beta} = v$ et $\frac{1}{T} = f$, on déduit la relation suivante :

$$v = \lambda f$$

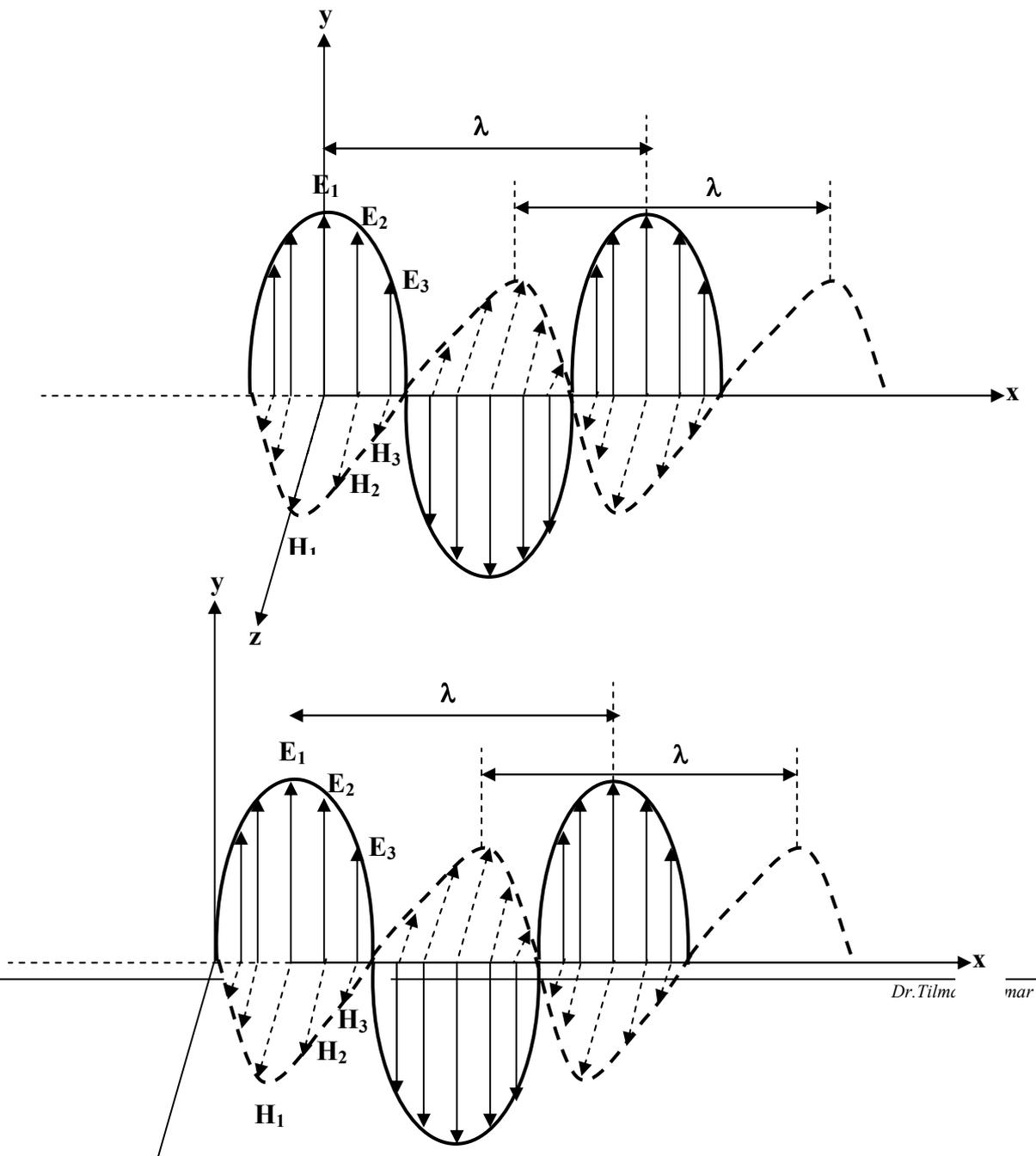
EXERCICE

On considère dans le vide une onde plane, dont le champ électromagnétique est exprimé par :

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u}_y \cos(\omega t - \beta x) \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = H_0 \mathbf{u}_z \cos(\omega t - \beta x)$$

Tracer l'onde aux instants $\omega t = 0$ et $\omega t = \pi/2$.

Solution



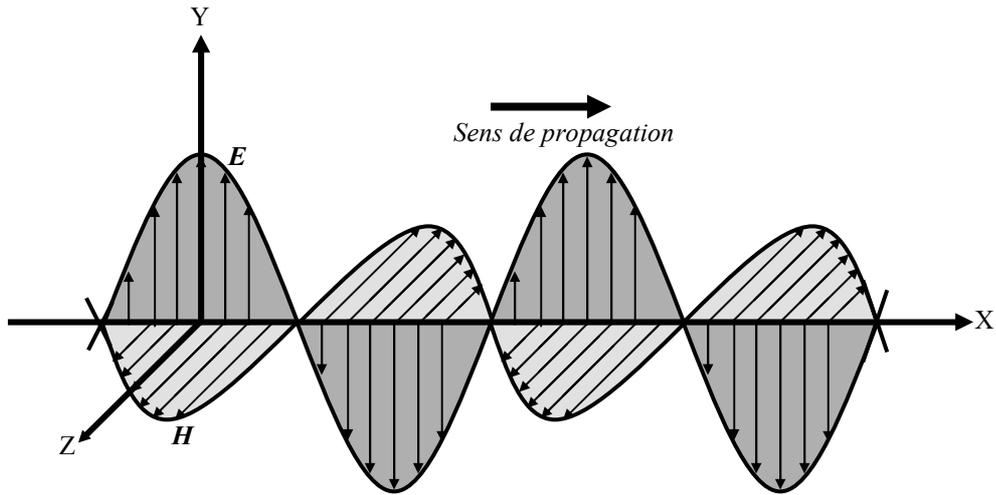


Figure 14

Le champ électrique oscille dans le plan XY et le champ magnétique dans le plan XZ. Ceci correspond à une onde polarisée *linéairement*, c'est à dire *dans un plan*. Le plan de polarisation est défini comme le plan dans lequel oscille le champ électrique, en ce cas le plan XY.

Remarque : il existe un autre type de polarisation : la polarisation circulaire.

Remarque : à côté des ondes planes, les équations de Maxwell admettent également pour solution des ondes électromagnétiques cylindriques ou sphériques. A grande distance de la source, une portion limitée de l'onde cylindrique ou sphérique peut pratiquement être considérée comme plane.

IX. PROPAGATION DE L'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE

Une onde électromagnétique transporte de l'énergie.

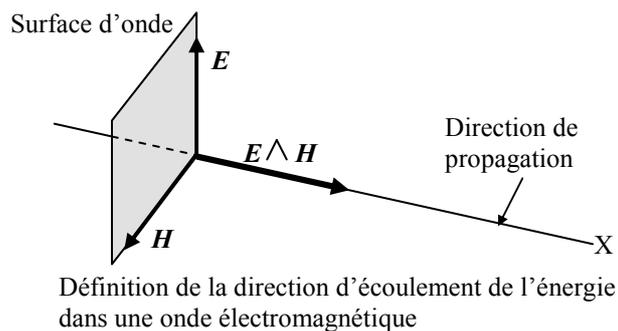


Figure 15

Rappel

Tout champ électrique \mathbf{E} possède une énergie de densité $w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$;

et tout champ magnétique \mathbf{H} possède une énergie de densité $w_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$.

Energie transportée par l'onde

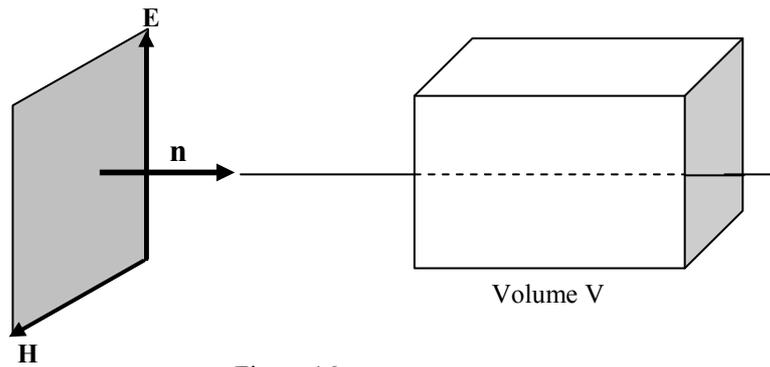


Figure 16

Considérons l'équation de M.A :

$$\text{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t};$$

dans le vide, on pose $J=0$:

$$\text{rot}\mathbf{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\Rightarrow$$

$$\mathbf{E}\text{rot}\mathbf{H}=\varepsilon_0\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\text{comme } \text{div}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})=\mathbf{H}\text{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\text{rot}\mathbf{H}$$

$$\text{vient } \mathbf{E}\text{rot}\mathbf{H}=\mathbf{H}\text{rot}\mathbf{E}-\text{div}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})$$

$$\text{soit } \mathbf{E}\left(\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)=\mathbf{H}\left(-\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right)-\text{div}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})$$

d'où

$$-\text{div}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})=\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t}+\frac{1}{2}\mu_0\frac{\partial H^2}{\partial t}$$

$$-\text{div}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})=\varepsilon_0\mathbf{E}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)+\mu_0\mathbf{H}\left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right)$$

$$\int-\text{div}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})dv=\int\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t}+\frac{1}{2}\mu_0\frac{\partial H^2}{\partial t}\right)dv$$

on obtient ensuite

$$\oint(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})ds=\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\mu_0H^2\right)dv$$

$$\oint(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})ds=\frac{\partial}{\partial t}(W_e+W_m)$$

Comme le terme $\frac{\partial}{\partial t}(W_e+W_m)$ représente l'augmentation de l'énergie électromagnétique dans le volume V.

$\oint(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})ds$ représente donc l'énergie électromagnétique transportée par l'onde entrant dans le volume V

Remarques

- $\mathbf{E}\wedge\mathbf{H}$ est appelé vecteur de *Poynting* (Flux d'énergie par unité de surface).
- $\oint(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})ds$ représente l'énergie sortant de V.

Rayonnement d'un dipôle électrique oscillant :

La source des ondes sonores est un certain corps vibrant tel que la membrane d'un tambour ou la corde d'un violon. Dans le cas des ondes électromagnétiques, les sources des ondes sont de toute évidence les mêmes que les sources du champ électromagnétique ; c'est-à-dire, les charges en mouvement.

La diffusion contribue à réduire l'intensité de l'onde incidente parce que l'énergie absorbée dans l'onde est réémise dans toutes les directions, ce qui produit une diminution effective de l'énergie du rayonnement.

EXERCICE

Un conducteur cylindrique de résistivité ρ , de diamètre $2R$ est parcouru par un courant I réparti uniformément dans la section. Comparer les pertes Joule et le flux du vecteur de Poynting à travers la surface latérale.

Solution

La puissance dissipée dans le conducteur (Pertes Joule) est

$$P = RI^2$$

avec

$$R = \rho \frac{L}{S} \text{ et}$$

$$I = \int J dS = JS = J \pi R^2$$

$$\text{soit } P = \rho \frac{L}{S} (I)^2 = \rho \frac{L}{\pi R^2} I^2$$

Le champ électrique dans le conducteur est celui de la loi locale d'Ohm qui assure le mouvement des électrons :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \rho \mathbf{J}$$

où

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \text{ est la conductivité du conducteur}$$

donc, le champ est uniforme, et vaut en tout point M de la surface latérale (S) du cylindre

$$\mathbf{E} = \frac{\rho I}{\pi R^2} \mathbf{i}$$

le champ magnétique est calculé par le théorème d'Ampère, en un point de (S) il vaut :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \mathbf{j}$$

le vecteur de Poynting sur la surface est

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} = \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$$

soit

$$\mathbf{P} = \frac{\rho I}{\pi R^2} \mathbf{i} \wedge \frac{I}{2\pi R} \mathbf{j} = -\frac{\rho I^2}{2\pi^2 R^3} \mathbf{k}$$

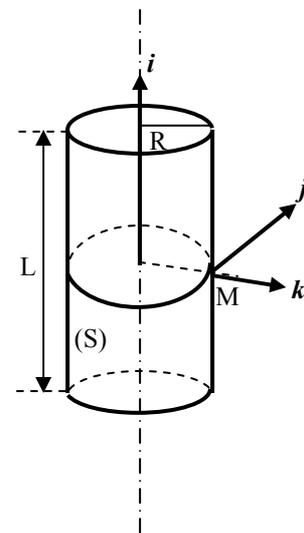
le flux de \mathbf{P} entrant dans le cylindre par la paroi latérale est

$$\phi = \mathbf{P} \cdot (-\mathbf{k}) 2\pi RL$$

soit

$$\phi = \rho \frac{L}{\pi R^2} I^2$$

Ce flux n'est autre que la puissance dissipée par effet Joule dans le volume du cylindre.



X. REFLEXION ET TRANSMISSION DES ONDES

1. Réflexion par un conducteur parfait

L'onde incidente est totalement réfléchi, il n'y a pas d'onde transmise à travers le conducteur, car le champ électrique dans le conducteur est nul.

2. Réflexion par un diélectrique

Vu que le champ électrique pénètre à l'intérieur d'un diélectrique, contrairement à un matériau conducteur, l'onde incidente donne naissance en plus de l'onde réfléchi à une onde transmise.

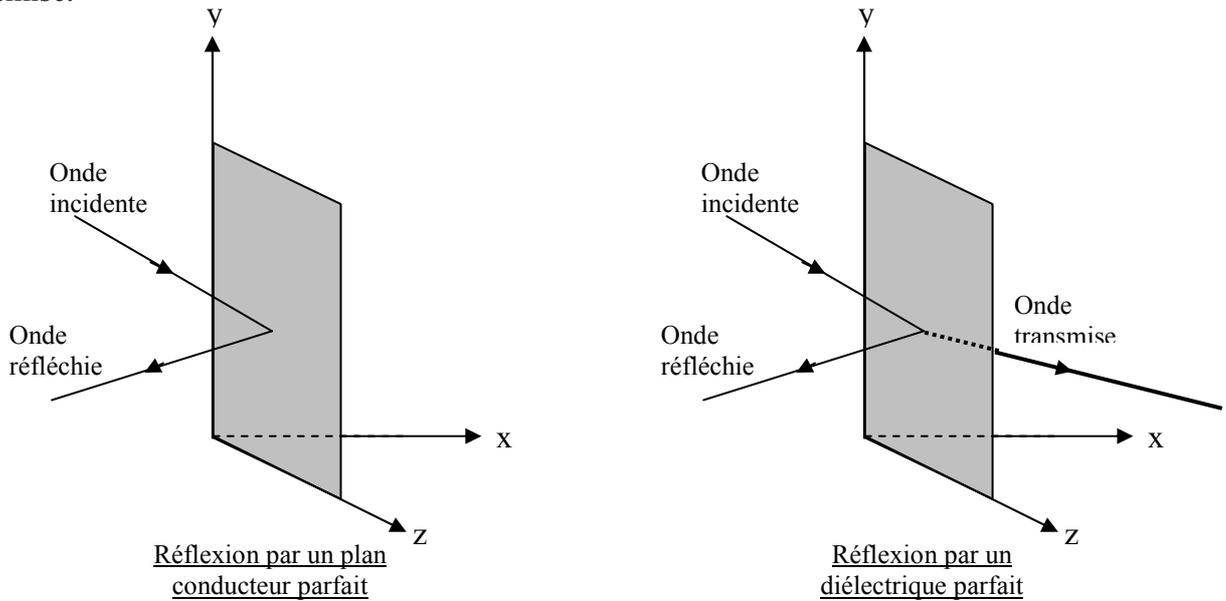


Figure 17

XI. ONDES GUIDEES

Soient P1 et P2 deux plans métalliques parallèles

L'onde qui entre à l'intérieur subit une succession de réflexions multiples puis sort de l'autre côté : on dit que l'onde est guidée.

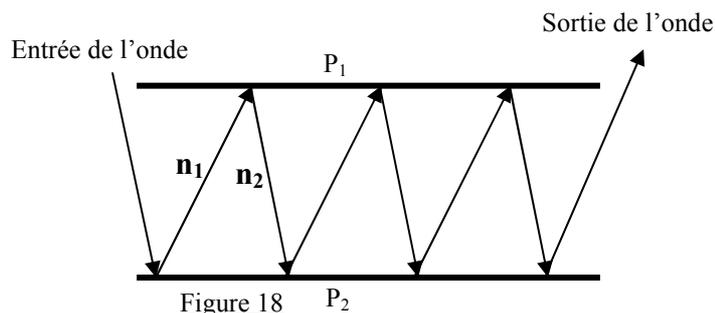


Figure 18

Exemples de guide d'onde

- fibre optique : c'est un tube métallique cylindrique

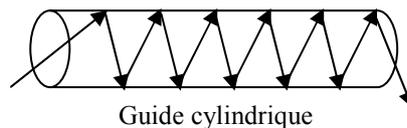


Figure 19

- Guide d'ondes radio :

Les ondes émises par la station radio sont réfléchies d'une part par la surface de la terre et d'autre part par la couche atmosphérique de l'ionosphère.

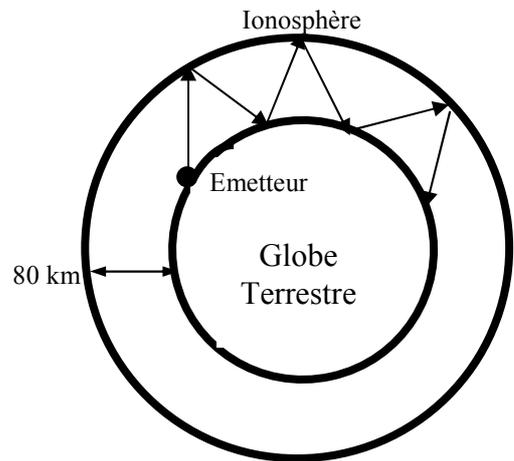


Figure 20

- Guide d'ondes TV par satellite :

Le satellite réfléchit vers la terre les ondes émises par la station TV.

Réflexion et transmission :

Les directions des trois vecteurs \mathbf{u}_i , \mathbf{u}_r et \mathbf{u}_t sont liées entre elles par les lois suivantes, vérifiées expérimentalement :

- 1) les directions d'incidence, de réflexion et de transmission sont contenues dans un même plan normal à la surface de séparation.
- 2) L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, c'est-à-dire :

$$\theta_i = \theta_r$$

$$3) \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_i}{v_r}$$

Supposons qu'une onde incidente soit écrite comme suit :

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} \sin(\omega t - \beta \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}),$$

les ondes réfléchies et transmises sont :

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r} \sin(\omega t - \beta \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{r})$$

et

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} \sin(\omega t - \beta \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{r})$$

dans le milieu (1) on trouve les ondes incidente et réfléchie, tandis que dans le milieu (2) n'existe que l'onde transmise. On a alors à la surface de séparation

$$\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_t \quad (*)$$

Pour que cette relation soit satisfaite à chaque instant en tout point de la surface de séparation, il faut que les phases soient identiques dans les équations (1), (2) et (3):

$$\omega t - \beta_i \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r} = \omega t - \beta_r \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{r} = \omega t - \beta_t \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{r} (**)$$

soit,

$$\beta_i \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r} = \beta_r \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{r} = \beta_t \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{r} \quad (4)$$

Comme l'indique la figure, la surface de séparation coïncide avec le plan XZ. L'égalité (4) sera donc vérifiée qu'en posant $y = 0$. Par conséquent

$$\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + z \mathbf{u}_z .$$

D'autre part, la direction d'incidence est contenue dans le plan XY, donc :

$$\mathbf{n}_i = n_{ix} \mathbf{u}_x + n_{iy} \mathbf{u}_y$$
$$\beta_1 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r} = \beta_1 x n_{ix} \quad (5)$$

Comme $\mathbf{n}_r = n_{rx} \mathbf{u}_x + n_{ry} \mathbf{u}_y + n_{rz} \mathbf{u}_z$

et

$$\mathbf{n}_t = n_{tx} \mathbf{u}_x + n_{ty} \mathbf{u}_y + n_{tz} \mathbf{u}_z$$

nous obtenons également

$$\beta_1 \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{r} = \beta_1 x n_{rx} + \beta_1 z n_{rz} \quad (6)$$

et

$$\beta_2 \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{r} = \beta_2 x n_{tx} + \beta_2 z n_{tz} \quad (7)$$

en remplaçant les équations 5, 6 et 7 dans l'équation 4, on obtient :

$$\beta_1 n_{ix} = \beta_1 n_{rx} = \beta_2 n_{tx} \quad \text{et} \quad \beta_1 n_{rz} = \beta_2 n_{tz} = 0$$

le second groupe d'équations indique que les vecteurs \mathbf{n}_r et \mathbf{n}_t n'ont pas de composante suivant l'axe des Z. les rayons incident, réfléchi et transmis sont donc dans un même plan. C'est la loi (1) énoncée précédemment.

Nous voyons ensuite sur la figure que :

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{u}_x \sin\theta_i + \dots ; \quad \mathbf{n}_r = \mathbf{u}_x \sin\theta_r + \dots ; \quad \mathbf{n}_t = \mathbf{u}_x \sin\theta_t + \dots$$

le premier groupe d'équations devient alors :

$$\beta_1 \sin\theta_i = \beta_1 \sin\theta_r = \beta_2 \sin\theta_t$$

et comme par ailleurs :

$$\beta_1 = \frac{\omega}{v_1} \quad \text{et} \quad \beta_2 = \frac{\omega}{v_2}$$

on obtient après simplification par ω

$$\frac{1}{v_1} \sin\theta_i = \frac{1}{v_1} \sin\theta_r = \frac{1}{v_2} \sin\theta_t$$

on déduit alors :

$$\sin\theta_i = \sin\theta_r, \text{ c'est-à-dire } \theta_i = \theta_r$$

et

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{v_1}{v_2}$$

nous retrouvons donc, sous une forme plus analytique, les lois (2) et (3) de la réflexion et la transmission.

Si l'équation (***) est satisfaite, l'équation (*) devient :

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$$

Qui est une relation entre les amplitudes des trois ondes.

XII. SPECTRE DU RAYONNEMENT ELECTROMAGNETIQUE

Spectre du rayonnement électromagnétique

La classification usuelle du spectre électromagnétique est la suivante :

1) Ondes radio et TV

la fréquence f s'étend de quelques kHz à 10^9 Hz ;

la longueur d'onde λ s'étend de quelques km à 0,3m.

Energie des photons est comprise entre 0 et 10^{-5} eV.

Les ondes qui sont utilisées pour les transmissions radio et la télévision sont produites par des dispositifs électroniques, essentiellement des circuits oscillants.

2) Micro-ondes

f : de 10^9 à 3.10^{11} Hz ; λ : de 0,3 à 10^{-3} m;

W : de 10^{-5} à 10^{-3} eV.

Ces ondes sont utilisées dans les radars et d'autres systèmes de communication, mais aussi dans l'analyse de détails très fins des structures atomiques et moléculaires.

Cette région des micro-ondes est également désignée par le sigle UHF (Ultra - Haute-Fréquence par rapport aux fréquences Radio).

3) Le spectre infrarouge

f : de 3.10^{11} à 4.10^{14} Hz ; λ : de 10^{-3} à $7,8.10^{-7}$ m ;

W : de 10^{-3} à 1,6 eV.

Ces ondes sont produites par les molécules et les corps chauds. Elles ont de nombreuses applications dans l'industrie, la médecine, l'astronomie.

4) Spectre visible (lumière)

f : de 4.10^{14} à 8.10^{14} Hz ; λ : de $7,8.10^{-7}$ à $3,8.10^{-7}$ m;

W : de 1,6 à 3,2 eV.

C'est une bande étroite formée par les longueurs d'onde auxquelles notre rétine est sensible.

La lumière est produite par le mouvement des atomes et des molécules par suite des réajustements internes du mouvement des composants, principalement des électrons.

En raison des similitudes dans le comportement des régions infrarouge et ultra-violette du spectre, le domaine de l'optique les inclut également en plus du spectre visible.

Les différentes couleurs que la lumière produit sur l'œil, dépendent de la fréquence ou de la longueur d'onde du rayonnement :

Couleur	Longueur d'onde λ (m)	Fréquence f (Hz)
Violet	$3,90$ à $4,55. 10^{-7}$	$7,69$ à $6,59. 10^{14}$
Bleu	$4,55$ à $4,92. 10^{-7}$	$6,59$ à $6,10. 10^{14}$
Vert	$4,92$ à $5,77. 10^{-7}$	$6,10$ à $5,20. 10^{14}$
Jaune	$5,77$ à $5,97. 10^{-7}$	$5,20$ à $5,03. 10^{14}$
Orange	$5,97$ à $6,22. 10^{-7}$	$5,03$ à $4,82. 10^{14}$
Rouge	$6,22$ à $7,80. 10^{-7}$	$4,82$ à $3,84. 10^{14}$

5) Rayons Ultra-violets

f : de $8 \cdot 10^{14}$ à $3 \cdot 10^{17}$ Hz ; λ de $3,8 \cdot 10^{-7}$ à $6 \cdot 10^{-10}$ m ;
W : de 3 à $2 \cdot 10^3$ eV.

Ces ondes sont générées par des sources chaudes, mettant en jeu des énergies élevées, telles que le soleil ou les décharges électriques. Vu que certains micro-organismes qui absorbent le rayonnement UV sont détruits, ces ondes sont utilisées dans certaines applications médicales et certains procédés de stérilisation.

Le rayonnement ultra-violet du soleil interagit également avec les atomes de la haute atmosphère, produisant ainsi de nombreux ions. Ceci explique pourquoi la haute atmosphère à des altitudes supérieures à 80 km est fortement ionisée, on l'appelle pour cette raison *l'ionosphère*.

6) Rayons X

f : de $3 \cdot 10^{17}$ à $5 \cdot 10^{19}$ Hz ; λ : de 10^{-9} à $6 \cdot 10^{-12}$ m ;
W : de $1,2 \cdot 10^3$ à $2,4 \cdot 10^5$ eV..

La méthode la plus commune de production des rayons X consiste à accélérer un faisceau d'électrons par un potentiel de plusieurs kV et qui tombe sur une plaque métallique.

Sont dangereux, sont utilisées par exemple en radioscopie, mais pendant une durée très brève. L'absorption relativement plus grande des os par rapport au tissu permet une « photographie » précise. Les rayons X sont utilisés dans le traitement du cancer, dans la mesure où ils semblent avoir tendance à détruire les tissus malades plus rapidement que les tissus sains.

7) Rayons γ

f : de $3 \cdot 10^{18}$ à $5 \cdot 10^{22}$ Hz ; λ : de 10^{-10} à $6 \cdot 10^{-14}$ m ;
W : de 10^4 à 10^7 eV.

D'origine nucléaire, produits par les corps radio-actifs et sont présents dans les réacteurs nucléaires ; l'absorption des rayons γ peut donc produire des modifications à l'intérieur du noyau.