Théorie de champ

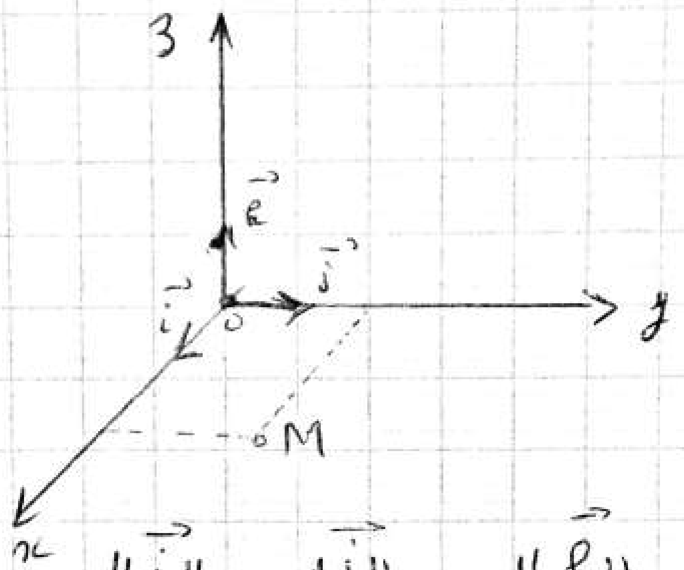
Mazighi Sid Ali

02

les Opérateur vectorielle

I - 1 Opérateur natbla $\vec{\nabla}$

Système de coordonnées cartésiennes



$$OM \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$$

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$$

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \quad \cdot f(x, y, z) \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

L'operateur $\vec{\nabla}$ "Nabla" est un operateur aux derivées partilles Il permet de déterminer le gradient, la divergence, le rotationnel et laplacien

I. 1 - Le gradient

f : fonction scalaire

$f(x, y, z)$

par exemple : $f(x, y, z) = x^2 + y + z^2$

la définition de gradient

$$\boxed{\overrightarrow{grad} = \vec{\nabla} \cdot f}$$

$$\overrightarrow{grad}\, f = \begin{cases} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \end{cases}$$

I. 3 La divergence

La divergence

soit un vecteur $\vec{A}$ $\left| \begin{array}{l} a_x \cdot \vec{i} \\ a_y \cdot \vec{j} \\ a_z \cdot \vec{k} \end{array} \right.$

$$div\, \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Rappel

$\vec{A} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ $\vec{B} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases} \cdot \begin{cases} a_x \\ a_y \\ a_z \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial a_x}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \vec{k}$$

Le rotationnel

La définition :

Soit le vecteur $\vec{A} \begin{cases} a_x \\ a_y \\ a_z \end{cases}$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} \quad \begin{array}{ccc} \vec{i} & \dfrac{\partial}{\partial x} & a_x \\ \vec{j} & \dfrac{\partial}{\partial y} & a_y \\ \vec{k} & \dfrac{\partial}{\partial z} & a_z \end{array}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{cases} \dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z} \cdot \vec{i} \\ \dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x} \cdot \vec{j} \\ \dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y} \cdot \vec{k} \end{cases}$$

Exemple :

Ex 1

Démonter que :

$$Rot\,(\overrightarrow{grad}\,G) = \vec{0}$$

Sachant que :

G. est une fonctions scalaire

$$\overrightarrow{grad}\,G = \vec{\nabla}\,G$$

$$\overrightarrow{grad}\,G = \begin{cases} \dfrac{\partial G(x,y,z)}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial G(x,y,z)}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial G(x,y,z)}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{grad}\,G) = \left| \begin{array}{ccc} i & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial x} \\[2mm] j & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \\[2mm] k & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{array} \right.$$

$$Rot\,(\overrightarrow{grad}\,G) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial G}{\partial z}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial G}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} - \dfrac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} = 0 \\[4mm] \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial G}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial G}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial^2 G}{\partial z \partial x} - \dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial z} = 0 \\[4mm] \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial G}{\partial y}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial G}{\partial x}\right) = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

. $\operatorname{div}(\vec{Rot}\ \vec{A}) = 0$

. $\operatorname{div}(G.\vec{A}) = G \operatorname{div}\vec{A} + \vec{A} \operatorname{grad} G$

. $\operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot}\vec{B}$

$$\vec{rot}\ \vec{A} = \begin{array}{ccc} i & \frac{\delta}{\delta x} & ax \\ j & \frac{\delta}{\delta y} & ay \\ k & \frac{\delta}{\delta z} & az \end{array}$$

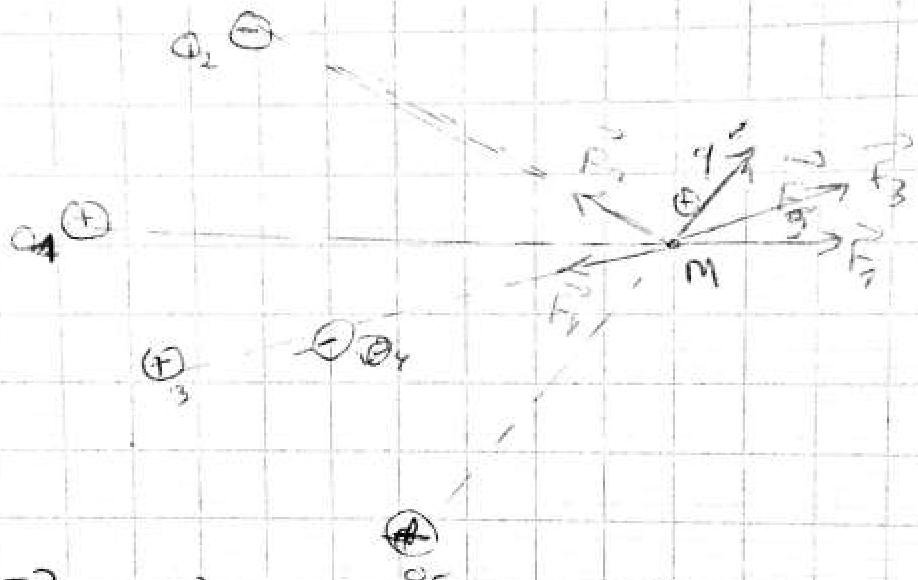
$$\vec{rot}\ \vec{A} = \begin{cases} \frac{\delta az}{\delta y} - \frac{\delta ay}{\delta z} \\ \frac{\delta ax}{\delta z} - \frac{\delta az}{\delta x} \\ \frac{\delta ay}{\delta x} - \frac{\delta ax}{\delta y} \end{cases}$$

$$\operatorname{div}(\vec{rot}\ \vec{A}) = \frac{\delta}{\delta x}\left[\frac{\delta az}{\delta y} - \frac{\delta ay}{\delta z}\right] + \frac{\delta}{\delta y}\left[\frac{\delta ax}{\delta z} - \frac{\delta az}{\delta x}\right] + \frac{\delta}{\delta z}\left[\frac{\delta ay}{\delta x} - \frac{\delta ax}{\delta y}\right]$$

$$= \frac{\delta^2 az}{\delta x \delta y} - \frac{\delta^2 ay}{\delta x \delta z} + \frac{\delta^2 ax}{\delta y \delta z} - \frac{\delta az^2}{\delta y \delta x} + \frac{\delta^2 ay}{\delta z \delta x} - \frac{\delta^2 ax}{\delta z \delta y}$$

I-2. Théorème de superposition

Distribution de charge ponctuelles



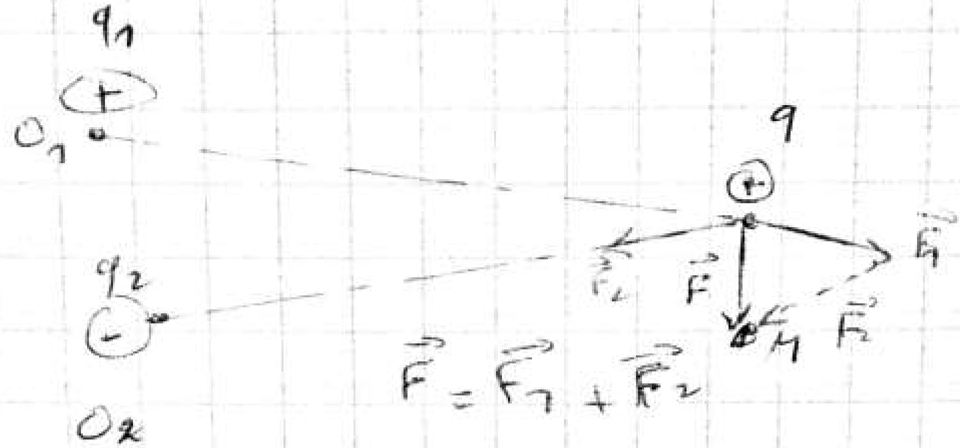
$$\vec{F_M} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} + \vec{F_5}$$

$$\vec{F_M} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q q_1}{r_1^2} + \frac{q q_2}{r_2^2} + \cdots + \frac{q \cdot q_5}{r_5^2}\right]$$

$$\vec{F_M} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left[\frac{q_1}{r_1^2} \cdots + \frac{q_5}{r_5^2}\right]$$

$$\vec{F_M} = q'\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sum \frac{q_i}{r_i^2}\right]\right]$$

Considerons 3 points de l'espace.



appliquant le theoréme de superposition
- la charge q_1 exerce une force F_1 sur la charge q (en absence de q_2).
et la charge q_2 exerce une force F_2 sur la charge q (en absence de q_1)
la force totale exercée sur la charge q est la somme de $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q}{r_1^2} + \frac{q_2 q}{r_2^2}\right] \cdot \vec{u}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \left[\frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{r_2^2}\right] \vec{u} .$$

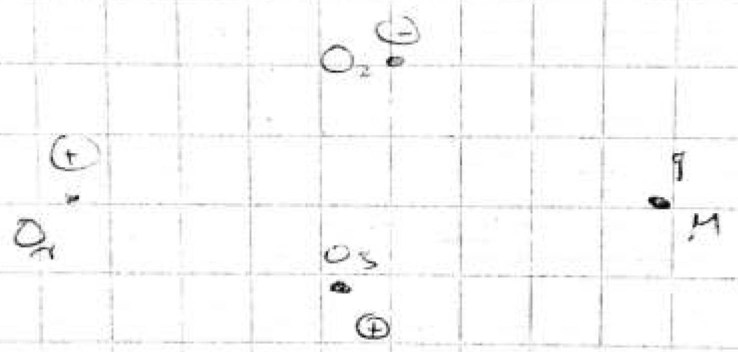
$[\vec{F}]$ = coulomb

En cas d'une distribution de charge

$$\vec{F} = q \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\right]\cdot\vec{u}$$

I.3 Notion du champ électrique $\vec{E}$

soit la distribution de charge ponctuelle suivante :



$$\vec{F} = q \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{r_2^2} + \frac{q_3}{r_3^2}\right]\cdot\vec{u}$$

si on changerai la valeur de charge q en M par exemple q'

$$\vec{F}' = q' \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{r_2^2} + \frac{q_3}{r_3^2}\right]\cdot\vec{u}$$

le remplacement de q par q'

Me modifie par l'expression vectoriel qui est entre —> arenthèse :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{r_2^2} + \frac{q_3}{r_3^2} \right] \cdot \vec{u}$$

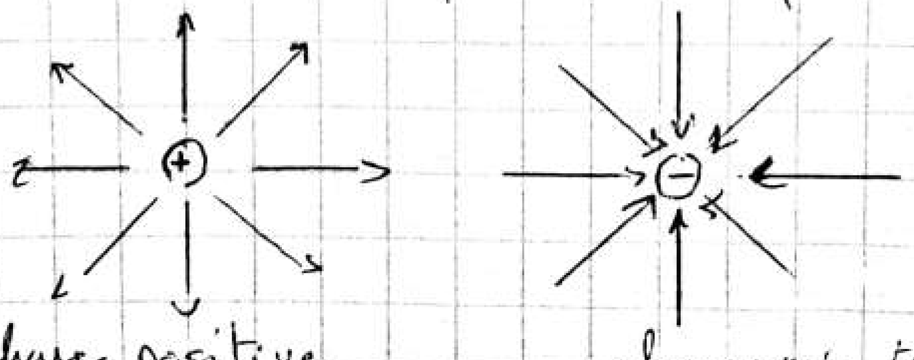
cette entité est appelée le champ électrique $\vec{E}$.

donc on peut mettre :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{r_2^2} + \frac{q_3}{r_3^2} \right] \cdot \vec{u}$$

$[E] = \text{volt}/\text{m}$ $\qquad \vec{F} = q \cdot \vec{E}$

I.4 caractéristiques du champ électrique $\vec{E}$



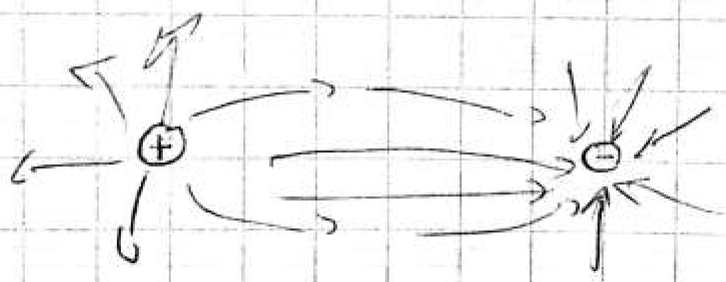
charge positive
le champ $\vec{E}$ est ~~ent~~ sortant

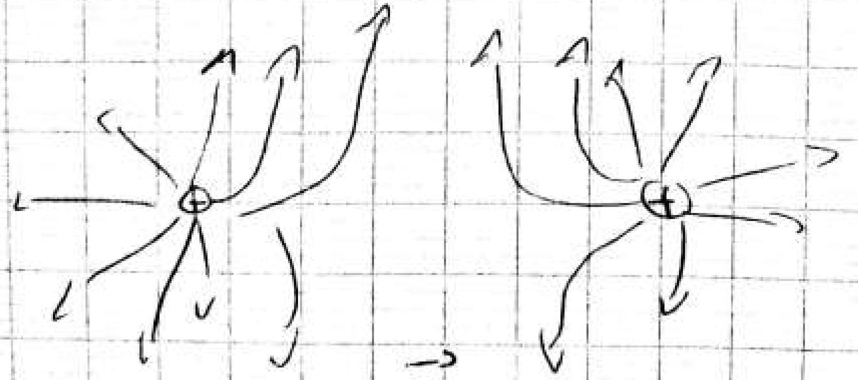
charge négative
le champ $\vec{E}$ est entrant

• Les lignes de champ électrostatique partent toujours d'une charge positive vers une charge négative

• Les lignes du $\vec{E}$ ne se croisent jamais.

• Les lignes du champ électrique ne sont pas fermées. Elles peuvent aller à l'infini ou d'une charge (+) vers une charge (−)



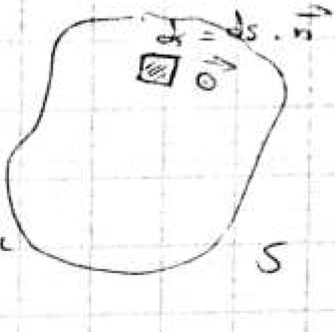


$\vec{E}$

I.5 – Le flux du champ électrique $\vec{E}$

Soit une surface élémentaire ds définie par son vecteur $\vec{ds} = ds.\vec{n}$

$\vec{n}$ étant le vecteur unitaire perpendiculaire à ds.



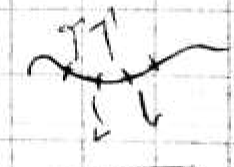
On appelle flux du champ électrique $\vec{E}$

$$d\phi = \vec{E}.\vec{ds} \quad \text{est} \quad \phi = \iint \vec{E}.\vec{n}.ds$$

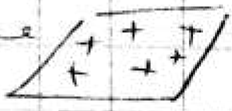
I.6 Théorème de Gauss.

Rappel

$\lambda = \dfrac{Q}{L}$ la densité linéique



$\sigma = \dfrac{Q}{S}$ " " " surfacique

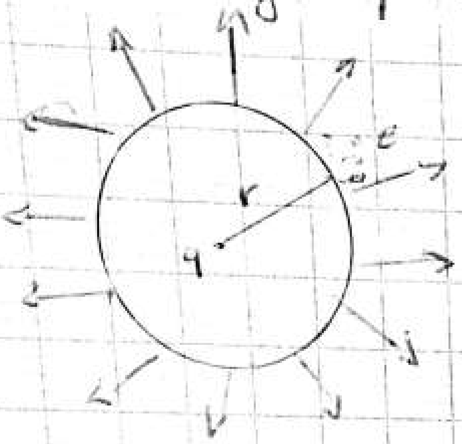


$\rho = \dfrac{Q}{V}$ volumique

$$\phi = \iint_S \vec{E}.\vec{ds}$$

$\phi = \dfrac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$ lorsque il y plusieurs charges

Dans le cas ou $\vec{E}$ est crée par une charge ponctuelle q, le flux traversant la sphère de rayon r englobant la charge q est donné par :



E est orthogonal à la surface de la sphère donc colinéaire au vecteur $\vec{ds}$

$$\phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

$$\phi = \oiint \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot ds$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \underbrace{\oiint_S ds}_{= 4\pi r^2}$$

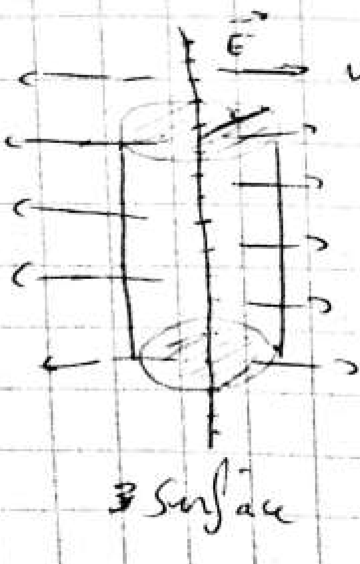
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \boxed{\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

On peut démontré que cette relation est généralisable avec une distribution de charge quelconque.

$$\boxed{\phi = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Énoncé grl du théorème gauss
le flux total du champ électrique sortant d'une surface imaginaire fermée (appelée surface de Gauss) est égale à la somme des charges intérieures divisées par ε_0

Exemple : champ électrique crée par un fil chargé uniformément



uniforme = λ est constant

$\lambda = \frac{Q}{L}$ → densité linéique

$[\lambda] = C.m^{-1}$

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

haut bas latéral

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0 \quad \text{car} \quad \vec{dS} \perp \vec{E}$$

$$\Phi_3 = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \vec{e_r} = \vec{n} \\ \vec{e_r}\cdot\vec{n} = 1 \end{array} \right.$$

$$= \oiint_S E \cdot dS$$

Th. de Gauss

$$= E \oiint_S dS = E \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\lambda \cdot h}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi r \cancel{h} = \frac{\lambda \cdot \cancel{h}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 \, 2\pi r} \; c^{te}$$

$$\boxed{E = c^{te} \cdot \frac{1}{r}} \qquad [E] = N/m$$

I.7 Potentiel électrique

Pour caractériser un champ électrique $\vec{E}$ nous définissons en chacun de ces pt un vecteur. (champ électrique)

- le champ électrique est aussi caractérisé en chacun de ces pts. par une grandeur scalaire appelée le potentiel électrique dans un repère orthonormé cartésien les composantes du champ électrique sont liées à ce potentiel électrique par trois relations :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

donc $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$

$V(x, y, z) \rightarrow$ fonction scalaire

le signe (-) signifie que le vecteur $\vec{E}$ est dirigé vers une ~~direction~~ décroissance de V

I.8. Potentiel électrique dû à une charge ponctuelle

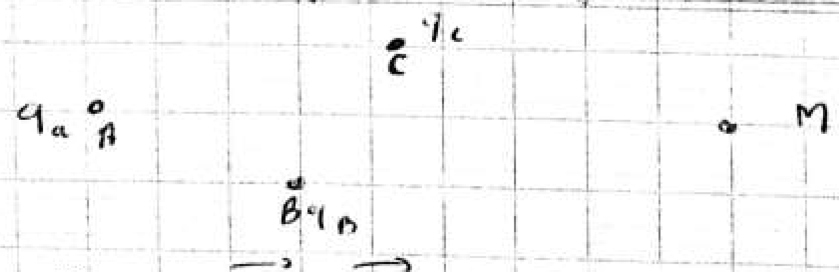
soit une charge électrique "q_a" placée en A. Soit la distance "r" qui sépare le pt "M" du pt "A"

le potentiel crée en pt "M" par la charge q_a est donnée par la relation

$$\boxed{V(M) = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 r} + V_0}$$

le potentiel est déterminer à une constante près V_0

I.9 Principe de superposition



$\vec{E}(M) = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$ (somme vectorielle)

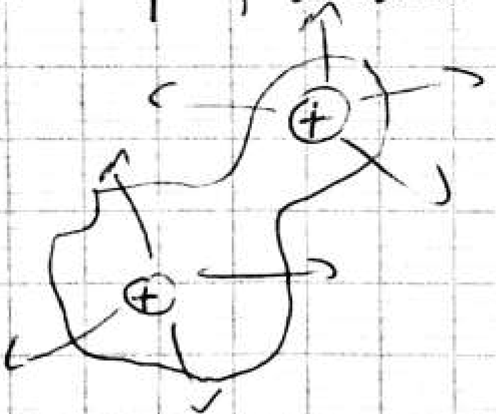
$V(M) = V_A + V_B + V_C$ (somme algébrique)

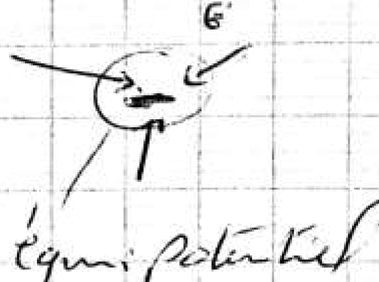
$$\boxed{V(M) = \sum \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} + V_0}$$

I - 9 Equipotentiels

- La topologie d'un champ vectoriel $\vec{E}$ est donné par les lignes de champs.
- la topologie du champ scalaire V est donné par des courbes de niveau

Ces courbes de niveau s'appellent les équipotentiels. Ce sont des courbes joignant les points du même potentiel. Propriétés des équipotentiels :





- les équipotentiels sont des lignes fermées
- " " " " entourent les charges.
- elles sont perpendiculaires aux lignes de champ $\vec{E}$.

I - 10 - Circulation du champ électrostatique $\vec{E}$

Définition : la circulation du champ électrostatique le long d'une courbe allant de A vers B est :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = V(A) - V(B)$$

En effet : nous avons : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$

$$\vec{E} = \begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \qquad \vec{dl} = \begin{cases} dx \\ dy \\ dz \end{cases}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz\right) = -dV$$

donc :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B)$$

Propriétés de la circulation du champ $\vec{E}$:

(A) la circulation du champ $\vec{E}$ est conservat...

elle ne dépond pas du chemin suivi.

(2) La circulation du champ $\vec{E}$ sur une courbe fermée est nulle.

(3) Les lignes de champ électrostatique $\vec{E}$ vont dans le sens du potentiel décroissant

I.11 - le travail des forces électrostatiques

nous avons

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = q \cdot (V(A) - V(B)) .$$

le travail de la force de coulomb F ne dépend pas du chemin suivi.