USDBlida

EXAMAN

Theore de Champ

Corrigée

Examen Final

- Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction.
- Aucun document ne sera utilisé

Exercice 01

Quatre charges ponctuelles sont placées aux sommets d'un carré de côtés « a » voir Fig1

1- Déterminer les caractéristiques du champ électrostatiques au centre du carré.
2- Exprimer le potentiel total crée au centre du carré par les quatre charges.

Application Numérique : q=1nC a=5Cm

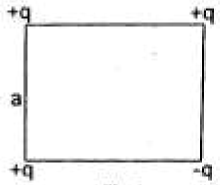


Fig 1

Exercice 2

On considère une spire circulaire de rayon R, de centre O, d'axe (Oz), parcourue par un courant d'intensité I. Soit un point M de son axe (Oz) (Fig 2).

1) Calculez le champ magnétique B(M) à l'aide du théorème de Biot–Savart.

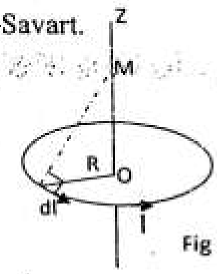


Fig 2

Exercice 03

Démontrer (en coordonnées cartésiennes) les relations suivantes :

$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}))=0$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(a))=0$

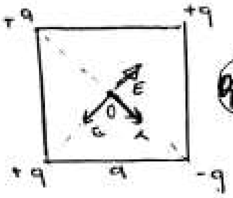
Exercice 04

1- Donner l'expression des équations de Maxwell dans le cas général.
2- Donner aussi les relations liant les potentiels aux champs associés.
3- Soit le champ électromagnétique suivant :
   $E_x=E_y=0$
   $E_z = c\cos(y-ct)$ avec $c^2=1/\mu_0.\varepsilon_0$

Calculer la divergence de E. Interpréter le résultat

4- Calculer le champ magnétique **B.**
5- Calculer le rotationnelle du vecteur **B.** Interpréter le résultat.

exo 1 (4pt).



(0,5pt)

1/ $E_{total} = E - E + E + E$

$= 2E.$

$= 2 \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$2r = \sqrt{2a^2}$

$r = \frac{\sqrt{2}}{2} a$

$r^2 = \frac{a^2}{2}$

$E_{total} = \frac{2q \cdot 2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$ (1,5pt)

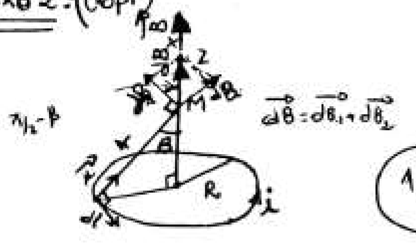
$$\boxed{E_{total} = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 a^2}}$$

AN.

$E_{total} = \frac{10^{-9} \cdot 36\pi \cdot 10^{9}}{\pi \cdot (0{,}05)^2 \, 1}$ (0,5pt)

$$\boxed{E_{total} = 14400 \text{ V/m}}$$

exo 2 : (06pt)



$\vec{dB} = \vec{dB_1} + \vec{dB_2}$

(1pt)

Avant d'effectuer le calcul, il faut remarquer que la résultante du champ $\vec{B}$, par symétrie, sera parallèle à l'axe de la spire.
En effet, 2 pts de la spire diamétralement opposés ajoutent leurs composantes axiales

$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\ldots} \vec{dl} \wedge \vec{\mu}$

sur l'axe OZ

$dB_z = |\vec{dB}| \cdot \sin\beta$ $(\sin\beta = \cos(\pi/2 - \beta))$

$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin\beta$ $\left(\cos(\pi/2 - \beta) = \sin\beta\right)$

$|\vec{dl} \wedge \vec{\mu}| = dl$ $\quad \vec{dl} \perp \vec{\mu}$

$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin\beta$

$R = r \sin\beta.$

$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cdot \frac{R}{r} \cdot 2\pi R$

$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2 r^3}$ (3pt)

$r = \sqrt{R^2 + z^2}$

$r^3 = (R^2 + z^2)^{3/2}$

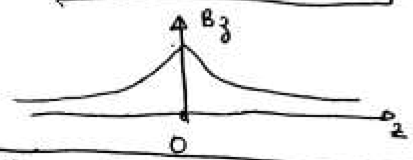
donc $\boxed{B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2\sqrt{(R^2+z^2)^3}}}$ $\quad B_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin\ldots$

$\vec{B_z} = \frac{\mu_0 I R^2}{2\sqrt{(R^2+z^2)^3}} \vec{k}$

$\vec{B_z} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{k}$

à $z = 0$. (à l'origine).

$$\boxed{B_0 = B_{max} = \frac{\mu_0 I}{2R}}$$



Suite exo 1 :

2/ $V(P) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$ (1,5pt)

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{+q_1}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} + \frac{q}{\frac{\sqrt{2}a}{2}} + \frac{q}{\frac{\sqrt{2}a}{2}} - \frac{q}{\frac{\sqrt{2}a}{2}} \right)$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q \cdot 2}{\sqrt{2}a} \Rightarrow \boxed{V(P) = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 \sqrt{2} a}}$

exo 3 : (3pt).

$$\vec{rot}\left(\vec{grad}(a)\right) = 0.$$

$a(x,y,z)$ grandeur scalaire

$$\vec{grad}\, a \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{vmatrix}$$

1,5

$$\vec{rot}\left(\vec{grad}(a)\right) =$$

$$\begin{vmatrix} i & \partial/\partial x & \frac{\partial a}{\partial x} \\ j & \partial/\partial y & \frac{\partial a}{\partial y} \\ k & \partial/\partial z & \frac{\partial a}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

car $\partial y \partial z = \partial z \partial y$.

$$div\left(rot(\vec{V})\right) = 0.$$

$$\vec{V} \begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

1,5

$$div\left(\vec{rot}\,\vec{V}\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) =$$

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y \partial x}$$

$$+ \frac{\partial^2 V_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z \partial y} = 0.$$

CQFD.

Exo 4 : (7pt)

1/ (1pt)

$$\begin{cases} div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{Maxwell Gauss.} \\ \vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Maxwell Faraday} \\ div\,\vec{B} = 0 & \text{eq flux Maxwell} \\ \vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) & \text{Maxwell Ampere} \end{cases}$$

2) * Pour le champ électrique :

$$\vec{E} = -\vec{grad}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

V : potentiel scalaire de $\vec{E}$

* Pour le champ magnétique. (1pt)

$div\,\vec{B} = 0 \Rightarrow$

$\exists\, \vec{A}$ tq :

$\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A}$

$\vec{A}$ et le potentiel vecteur de $\vec{B}$.

$\vec{A}$ et le potentiel vecteur de $\vec{B}$

3) $\vec{E}\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ E_z = c\cos(y - ct) \end{cases}$

Calculer div E. (1,5pt)

$$div\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$. pas de source de charge.

$div\,\vec{E} = 0$

4/ Calcul de $\vec{B}$. (2pt)

$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$$\vec{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} i & \frac{\partial}{\partial x} & E_x \\ j & \frac{\partial}{\partial y} & E_y \\ k & \frac{\partial}{\partial z} & E_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \ldots \end{vmatrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \cancel{-}c\sin(y - ct) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = -\int \vec{rot}\,\vec{E}\,dt$$

$$= \begin{vmatrix} -\int \cancel{-}c\sin(y - ct)\,dt \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \frac{c}{c}\cos(y - ct) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \cos(y - ct) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

5/ $\vec{rot}\,B =$ (1,5pt)

$$\vec{rot}\,\vec{B} = \begin{vmatrix} i & \partial/\partial x & B_x \\ j & \partial/\partial y & 0 \\ k & \partial/\partial z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial B_x}{\partial y} + 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ +\sin(y - ct) \end{vmatrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \underbrace{\vec{J}}_{0} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Pas de source de courant

$\cancel{= 0 + \mu_0 \varepsilon_0}$

autre :

$$\vec{rot}\,\vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 c^2 \sin(y - ct).$$

$c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$ Pas de source de courant.

$$\boxed{\vec{rot}\,\vec{B} = +\sin(y - ct)}$$

Examen final

- Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction.
- Aucun document ne sera utilisé

Exercice 01

1- Donner l'expression des équations de maxwell dans le cas général.

2- Démontrer (en coordonnées cartésiennes) la relation suivante :

$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}))=0$ avec $\vec{A}$ vecteur quelconque.

Soit le potentiel vecteur du champ magnétique $\vec{B}$ suivant :

3- $\vec{A} = \begin{cases} B\sin(\omega t - y) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$

4- Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ ainsi que le champ électrique $\vec{E}$ sachant qu'on est dans une région ou le courant de conduction est nul

5- Calculer $\mathrm{div}\vec{E}$, Interpréter le résultat

Exercice 02

Deux sphères métalliques distantes de $1m$ portent respectivement une charge de $6.10^{-6}Cb$ et $-3.10^{-6}Cb$. En quel point de la droite joignant ces deux charges le potentiel est-il nul ? Quelles sont la valeur et la direction du champ électrique en ce point ?

Exercice 03

On considère un milieu de conductivité électrique σ, On suppose pour lequel le courant de conduction $\vec{J_c}$ est lié à $\vec{E}$ par la relation :

$$\vec{J_c} = \sigma \vec{E}$$

Le milieu considéré possède les mêmes permittivité diélectrique et perméabilité magnétique ε_0 et μ_0 que le vide.

1- Donner la relation du courant de déplacement $\vec{J_d}$

Pour un champ électrique alternatif $\vec{E}$ de pulsation ω, $\vec{E} = \vec{E_0}\cos(\omega t)$ $\vec{E_0}$ constant

2- calculer le rapport α des amplitudes du courant de conduction et du courant de déplacement. Pour $\omega = 2\pi.10^6\ rad.s^{-1}$,

3- Calculer ce rapport dans les différents cas suivants :

- Pour le cuivre ($\sigma = 6.10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$).
- Pour un sol argileux ($\sigma = 10^{-4}\ \Omega^{-1}.m^{-1}$).
- Pour du verre ($\sigma = 10^{-6}\ \Omega^{-1}.m^{-1}$).

On donne $\varepsilon_0 = 1/36\pi.10^9\ F.m^{-1}$.

4- Discuter les résultats.

Exercice 4

Montrer que dans une région vide de charges, où les lignes de champ électrostatique sont rectilignes et parallèles, le champ est uniforme.

Exo 1. 7/7 Correction Examen final 2012.

1) Les équations de Maxwell dans le cas général (càd: Régime Variable)

$$\begin{cases} \vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{d\vec{B}}{dt} & 0{,}25 \\ div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & 0{,}25 \\ \vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \dfrac{d\vec{E}}{dt}\right) & 0{,}25 \\ div\,\vec{B} = 0 & 0{,}25 \end{cases}$$

Page 1

2) $div(\vec{rot}(\vec{A})) = 0$:

Soit un vecteur $\vec{A}\begin{cases} a_x \\ a_y \\ a_z \end{cases}$

$$\vec{rot}\,\vec{A} : \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$div(\vec{rot}\,\vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y}$$

0 0 0

$div(\vec{rot}\,\vec{A}) = 0$ (cqfd)

3) Soit $\vec{A}\begin{cases} B\sin(\omega t - y) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$

- $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A} \Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \wedge \begin{cases} B\sin(\omega t - y) \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 - 0 \\ B\cos(\omega t - y) \end{cases}$

donc $\vec{B} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ B\cos(\omega t - y) \end{cases}$ (1)

4)

Sachant que

$$\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0\left(\vec{J_c} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}\right)$$

$$\vec{J_c} = 0 \Rightarrow \vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} \vec{rot}(\vec{B})$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} \int \vec{rot}(\vec{B})\, dt$$

$$\vec{rot}(\vec{B}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B\cos(\omega t - y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B\sin(\omega t - y) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

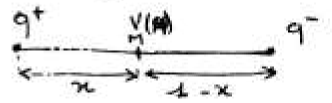
$$\vec{E} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} \int B\sin(\omega t - y)\, dt \cdot \vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{-B}{\mu_0\varepsilon_0\omega} \cos(\omega t - y)\, \vec{i}$$ (on considère que les constantes d'intégration sont nulles)

$$\vec{E} : \begin{vmatrix} \frac{-B}{\mu_0\varepsilon_0\omega}\cos(\omega t - y) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$ (2)

5) $\text{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ (0.5) $\Rightarrow$ on est dans une zone vide de charge (0.5)

Exo 2 :



1)

$$V(M) = \frac{10^{-6} \cdot 6}{4\pi\varepsilon_0 x} - \frac{10^{-6} \cdot 3}{4\pi\varepsilon_0 (1-x)}$$ (2)

$$= 0$$

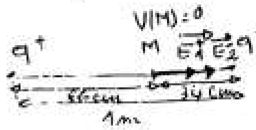
$$\Rightarrow \frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{6}{x} - \frac{3}{1-x}\right) = 0$$

$$6 - 6x - 3x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}\ [m]}$$

Le potentiel est donc nul à 66[cm] de la première charge (q+)

Suite, exo 2 :

1/ Le calcul du champ électrique



2

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\|\vec{E}_M\| = \frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{6}{(0,66)^2} + \frac{3}{(0,34)^2}\right] = 3,57 \cdot 10^5 \, [V/m]$$

exo 3.

1) $\vec{J_c} = \sigma \vec{E}$; $\vec{J_c}$ courant de conduction

$\vec{J_d} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\vec{J_d}$ courant de déplacement 1

avec $\vec{E}^t = \vec{E_0} \cos(\omega t)$

2) $\vec{J_c} = \sigma \vec{E}$

$\vec{J_c} = \sigma \vec{E_0} \cos(\omega t)$

$\vec{J_d} = -\varepsilon_0 \omega \vec{E_0} \sin(\omega t)$

On en déduit les amplitudes réspéctives des differentes densités volumiques de courant :

$\sigma \|\vec{E_0}\|$ → amplitude du courant de conduction

$\varepsilon_0 \omega \|\vec{E_0}\|$ → amplitude du courant de déplacem.

d'où : $\boxed{\alpha = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}}$ 2

3) $\alpha = 1,1 \cdot 10^{12} \gg 1$ pour le cuivre 0,5

$\alpha = 1,8 \simeq 1$ pour le sol argileux 0,5

$\alpha = 1,8 \cdot 10^{-2}$ pour le verre 0,5

4) Discuter les résultats : 1,5

Les courants de déplacements sont negligeable dans un bon conducteur comme le cuivre mais prédominant dans un materiaux très isolant comme le verre. Pour des matériaux non isolants mais assez peu conduct.

4.

Les lignes de champ électrostatique sont rectilignes et parallèles.

donc :

$$\vec{E}\begin{cases} E_x(x,y,z) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

supposons que les lignes de champ sont orientées suivant l'axe des x.

$div\vec{E} = 0$ car on est dans une région vide de charge

Page 4

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + 0 + 0 = 0$$

donc $\frac{\partial E_x}{\partial x}(x,y,z) = 0$.

1

On constate que E_x ne dépend pas de x.

$\vec{rot}\,\vec{E} = 0$ (régime stationnaire)

$$\vec{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_x(y,z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x(y,z)}{\partial z} = 0 \\ -\frac{\partial E_x(y,z)}{\partial y} = 0 \end{vmatrix}$$

$\frac{\partial E_x(y,z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_x$ ne dépend pas de z. 1

$\frac{\partial E_x}{\partial y}(y,z) = 0 \Rightarrow E_x$ ne dépend pas de y. 1

E_x est donc constant

$\boxed{\vec{E} = E\,\vec{i}}$ le champ électrostatique est donc uniforme.

EPREUVE DE FIN SEMESTRIEL

1. A partir de Théorème de Gauss en appliquant le théorème de Green-Ostrogradski à un volume V limité par une surface fermée S montrer que le flux Φ_E du champ électrique $\vec{E}$ est donné par $\Phi_E = q/\varepsilon_0$.
   - Que représente le terme q ?

2. A partir de Théorème d'ampère en utilisant le Théorème de Stokes à une surface fermée S montrer que

   $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{J}$

   -Que représente le terme J ?

3. Montrer que le flux du champ $\vec{B}$ a travers une surface fermée est nul. Que peut-on dire des lignes de champ magnétiques ?

4. En appliquant le Théorème de Stokes à une surface S s'appuyant sur une courbe stationnaire, orientee fermee, retrouver la loi de Faraday dans le cas d'un circuit fixe place dans un champ magnétique variable. Exprimer la force électromotrice *fem* par le flux du champ magnétique Φ_B.

   -Montrer que $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

5. Donner une interpretation physique des équations de Maxwell.

6. Montrer que le champ electrique $\vec{E}$ vérifie l'équation de propagation d'une onde :

   $$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

7. Montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ vérifie l'équation de propagation d'une onde :

   $$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

   -Que représente le terme c ?
   -en donnant l'expression de c dans le vide de l'onde associée en fonction de μ_0 et ε_0

8. Montrer que le champ électrique $\vec{E}$ le champ magnétique $\vec{B}$ et vecteur d'onde $\vec{k}$ forme un triedre droit (orthogonal).
   - avec $E_x = E_0 e^{ikz} e^{-i\omega t}$, tracer $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Exercice 1 :

1-Siot un fil rectiligne infini charge par une densité linéique λ.

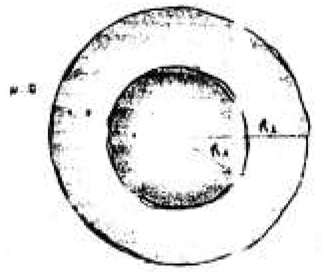
a-Trouver les expressions du champ electrostatique de r.

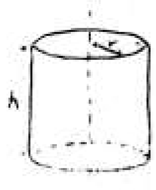
2-Soit une distribution sphérique de charges telle que :

-$\rho(r)=0$ si $r<R1$ - $\rho(r)=\rho_0$ si $R1<r<R2$ - $\rho(r)=0$ si $r>R2$

a-Trouver les expressions du potentiel et de champ électrostatique en fonction de r

b-Tracer l'allure des courbes E(r) et V(r).





Exercice 1:

Résoudre le programme linéaire suivant par l'algorithme simplexe :

$$\text{Max } z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_2 \geq -3 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 2:

Soit le programme linéaire (P) suivant:

$$\text{Min } z = x_1 + 5\, x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 \leq 76 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ -x_1 \geq -8 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) Résoudre graphiquement (P).
2) Résoudre (P) par l'algorithme des deux phases.
3) Résoudre le PL par l'algorithme Dual du Simplexe.

Exercice 3:

Soit le programme linéaire (P) suivant:

$$\text{Max } z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) Déterminer le dual (D) du problème (P)
2) Résoudre le (D) par l'algorithme Dual du Simplexe.
3) En déduire la solution de (P) si elle existe

Exercice 4

Soit le programme NL suivant :

$$Min\ f(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

$$x_1 - 1 = 0$$

Vérifier les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité locale pour le point $x^* = (1,0)^T$

Bon courage

Exercice n°1 : 5 points

Soit le dispositif électrique (machine, câble de transport d'énergie ...). En utilisant les équations de Maxwell, les relations des milieux et la loi d'Ohm, Démontrer le principe de conservation d'énergie de c e dispositif. Commenter

Exercice n°2 : 10 points

Soit le dispositif de chauffage par induction représenté dans le plan (x,y), ce dispositif est alimenté par une source alternative de fréquence $f=50KHz$.

1) Déterminer l'équation aux dérivées partielles régissant le champ magnétique H à l'intérieur de l'induit

2) Déterminer l'expression du champ magnétique dans l'induit sachant que les variations sont suivant l'axe *(ox)*

3) Déterminer l'expression de la densité de courant induit.

4) Déterminer l'impédance de surface de l'induit

Exercice n°2 : 5 points

Calculer la résistance d'un conducteur parcouru par un courant I sachant que ce dernier est section carrée de côté a et de longueur l .Le conducteur est le siège d'un champ magnétique : $H_z = \text{Ho} \exp\left(-x/\delta\right)$ avec $H_0 = 100A/m$ et $\delta=0.01mm$.

Exercice 1 :

$1^{ère}$ Partie :

On se place dans le cadre des régimes quasi-stationnaires et à symétrie cylindrique.

1- Expliquer le principe de l'approximation des régimes quasi-stationnaires
2- Donner l'expression des équations de Maxwell dans ce cas

$2^{ème}$ Partie :

Soit le dispositif représenté sur la figure1. Ce dispositif est constitué d'un barreau en tôle FeSi de conductivité « σ », de longueur « d » et d'épaisseur « e » avec e<<d. La tôle est entourée d'un bobinage parcouru par un courant « i » de fréquence 50Hz. Cette Tôle est soumise à un champ d'excitation magnétique **H** suivant :

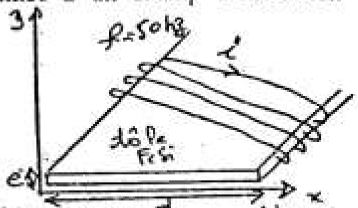


fig. 1

$$\mathbf{H} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ h_z \end{cases}$$

Les propriétés physiques de la tôle sont linéaires

1- Quelle relation lie **E** et **J** dans le métal
2- Donner l'équation aux dérivées partielles (équation de diffusion) en termes de H.
3- Trouver l'expression de H si les conditions aux limites sont $[H(0)=H_0$ et $H(\infty)=0]$

Exercice 2 :

On se placera dans tout le problème dans le cadre des régimes quasi-stationnaires.

Un milieu conducteur de conductivité σ , caractérisé par la permittivité diélectrique ε et par la perméabilité magnétique μ, occupe le demi-espace x >0 et est limité par le plan x = 0. Ce conducteur est placé dans un champ électromagnétique sinusoïdal de fréquence $f=\omega/2\pi$ et invariant par translation selon les axes Oy et Oz.

$E_x((x,y,z),t)$

$E(M,t) = E_0 \cos(2\pi f t + \varphi(M))$

1. Établir l'équation aux dérivées partielles en terme du champ électrique **E** en M(x,y,z) à l'instant t à l'intérieur du conducteur (absence de charge à l'intérieur du conducteur).
2. Les lignes de courant dans ce conducteur sont parallèles à l'axe Oy.
   a) donner l'équation aux dérivées partielles (équation de diffusion) en termes de la densité de courant volumique J.
   b) Montrer qu'au point M(x,y,z), la densité de courant volumique est de la forme :
   $J(x, t) = j_0 \exp(x/\delta)\cos(2\pi f t - kx)u_y$ (sachant que les conditions aux limites sont $[J(0)=J_0$ et $J(\infty)=0]$)
   les coefficients δ (épaisseur de peau) et k seront exprimés en fonction de f et σ.
3. Exprimer le champ magnétique B(x, t) dans le conducteur en point M.
4. Calculer le vecteur poynting et déduire la puissance moyenne P_R rayonnée à travers une surface plane S située dans le plan d'abscisse x, en fonction de S, j_0, x, δ et σ.
5. Exprimer la puissance moyenne P_J dissipée par effet Joule

1)

$\mathrm{div}\, E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Maxwell Faraday

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ eq Maxwell

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ Maxwell Ampere

(1 pt)

2) * Pour le champ électrique :

$\vec{E} = -\mathrm{grad}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

V : potentiel scalaire de $\vec{E}$

* Pour le champ magnétique :

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \Rightarrow$

$\exists\, \vec{A}$ tq :

$\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$

$\vec{A}$ et le Potentiel Vecteur de $\vec{B}$.

$\vec{A}$ et le Potentiel Vecteur de $\vec{B}$

(1 pt)

3) $\vec{E}\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ E_z = c\cos(y - ct) \end{cases}$

Calculer div E.

$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

$= 0 + 0 + 0 = 0$

$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ pas de source de charge.

$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$

(1,5 pt)

4/ Calcul de $\vec{B}$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} i & \frac{\partial}{\partial x} & E_x \\ j & \frac{\partial}{\partial y} & E_y \\ k & \frac{\partial}{\partial z} & E_z \end{vmatrix}$

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{vmatrix}$

(2 pt)

$\mathrm{rot}\, E = \begin{vmatrix} [illegible] \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\Rightarrow \vec{B} = -\int \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\, dt$

$= \begin{vmatrix} -\int c\sin(y - ct)\, dt \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\vec{B} = \begin{vmatrix} \frac{c}{c}\cos(y - ct) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\vec{B} = \begin{vmatrix} \cos(y - ct) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$C = \int H\, dl = \varepsilon$

$\mu_0 H \int dl = \mu_0 i$

5/ $\mathrm{rot}\, B =$

(1,5 pt)

$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \begin{vmatrix} \partial_x & B_x \\ \partial_y & 0 \\ \partial_z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial B_x}{\partial y} + 0 \end{vmatrix}$

$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ +\sin(y - ct) \end{vmatrix}$

$C = A\int H\, dl$

$B\int dl =$

$BL = \varepsilon$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ($\vec{J} = 0$) Pas de source de courant

~~$= 0 + \mu_0\varepsilon_0$~~

on a :

$\mathrm{rot}\,\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0 c^2 \sin(y - ct)$.

$c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$ Pas de source de c...

$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{B} = +\sin(y - ct)}$

EPREUVE DE FIN SEMESTRIEL

1. Démontre les équations de Maxwell.

2. Montrer que le champ électrique $\bar{E}$ vérifie l'équation de propagation d'une onde :

$$\Delta\bar{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} = 0$$

3. Montrer que le champ magnétique $\bar{B}$ vérifie l'équation de propagation d'une onde :

$$\Delta\bar{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar{B}}{\partial t^2} = 0$$

-Que représente le terme c ?
-en donnant l'expression de c dans le vide de l'onde associée en fonction de μ_0 et ε_0.

4. Montrer que le champ électrique $\bar{E}$ le champ magnétique $\bar{B}$ et vecteur d'onde $\bar{k}$ forme un trièdre droit *(orthogonal)*.
- avec $E_X = E_0 e^{i\omega} e^{-ikt}$, tracer $\bar{E}$ et $\bar{B}$

Exercice 1 :

1. On considère dans le vide un champ électrique $\overrightarrow{E} = E_m \sin(\omega t - kZ)\vec{u}_y$

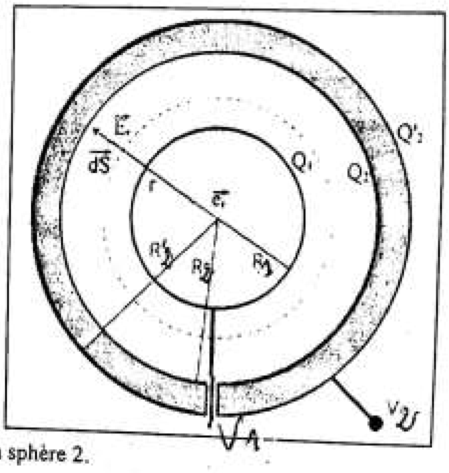
Déterminer le champ magnétique H associé à E.

2. On considère dans le vide un champ magnétique $\overrightarrow{H} = H_m \exp(\omega t + kZ)u_x$

Déterminer le champ électrique E associé à H.

3. Que peut-on conclure ?

Exercice 2 :



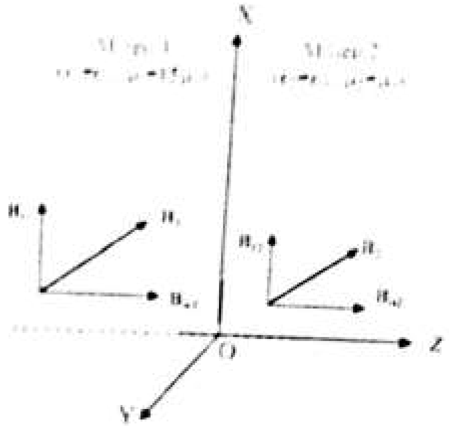
Deux sphères métalliques 1 et 2 concentriques de rayon
R1, R2>R1 et R'2>R2 sont séparées par de l'air.
.a première sphère est reliée à une source de potentiel V1
:t la seconde à une source de potentiel V2.
-Calculer la charge Q1 de la sphère 1.
:- Trouver l'expression de la charge Q2 de la surface interne
e la sphère 2.
- Donner l'expression de 'a charge Q'2 portée par l'armature externe de la sphère 2.
- Donner l'expression de .a capacité C du condensateur formé par
:s deux sphères.
- Quelle est l'expression approchée de C quand R2 est très voisin de R1 : R2=R1+e.

Exercice 3:

Soient deux milieux isolants différents. La surface de séparation entre les deux milieux est située dans le plan XOY.

On donne $B_1 = 1.2U_x + 0.8U_y + 0.4U_z$

Déterminer l'induction B2 régnant dans le milieu 2.



① $\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ⇒ eqt de Maxwell Gauss : relation entre l'[illegible] électrique et n'importe quelle surface de Gauss

② $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ ⇒ Eqt de Maxwell Thomson : relation reliée entre le dipôle magnétique à travers un SG

③ $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ⇒ eqt de Maxwell FARADAY : relation entre E et B.

④ $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0 J + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ ⇒ eqt Maxwell Ampère : relation entre le courant de source et courant de déplacement

$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \underbrace{\vec{J}}_{J_s} + \underbrace{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}_{J_d}$

Relation du milieu.

$\vec{B} = \mu\vec{H}$ ⑤ et $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ ⑥ ; $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ ⑦ (loi d'Ohm) ...

$\left\{\begin{array}{l}\rho = \frac{1}{\sigma} \\ R = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{S}\end{array}\right.$

① qui donne :

$$\begin{cases}\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho & ① \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & ② \\ \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 & ③ \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} & ④\end{cases}$$

$\boxed{\text{Eqt de continuité}}$ (conservation de charge électrique)

À partir ① et ④

$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ (*)

(*) $\vec{\nabla}.$ ⇒ $\underbrace{\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\wedge\vec{H})}_{0} = \vec{\nabla}.(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})$

$\vec{\nabla}.\vec{J} + \vec{\nabla}.\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0$ ⇒ $\vec{\nabla}\vec{J} + \varepsilon\,\frac{\partial(\vec{\nabla}.\vec{E})}{\partial t} = 0$ ↗①

1

$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$ conservation de charge (eqt de continuité)

$\boxed{\text{Calcul de champ magnétique}}$

modèle analytique

modèle théorique → conversion numérique résolution des EDP

types :

- électrostatique (mais pas des charge élect statique) $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- magnétostatique (Mais bien B indépendant de t) $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ induction nul $\vec{J} = 0$
- électrocinétique (charge électrique en mvt) $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- magnétodynamique (production des diff de potentiel des SC par B variable, ou de I) $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$

$\boxed{\text{Eqt électrostatique}}$ $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho & (1) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (2) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{0} & (3) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H} & (5) \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} & (6) \end{cases}$$

A) En terme de potentiel scalaire "V"

phénomène électrostatique $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

(2) et (4) devient :
$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 & (7) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} & (8) \end{cases}$$

phénomène électrique : $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ (9)

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = -\varepsilon \vec{\nabla} V$ (10)

$$-\Delta \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) = 0 \quad (10)$$

densité de charge est nulle $\rho = 0$

$\vec{\nabla}.\vec{D} = 0$; $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ $\Rightarrow$ $\vec{\nabla} \varepsilon \vec{E} = \vec{0}$

$\varepsilon = cte$ $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}.\vec{E} = \vec{0}$ (11)

$$-\Delta \vec{E} = 0 \quad \begin{cases} \Delta E_x = 0 \\ \Delta E_y = 0 \\ \Delta E_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \Delta E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \Delta E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

circulation de E à travers la normale $A dx . \phi z$)

$E(0, 0, E_z)$; $\Delta E = 0$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = 0$$

Eqt magnétostatique :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}.\vec{D} = \rho & (1) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (2) \\ \vec{\nabla}.\vec{B} = \vec{0} & (3) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H} & (5) \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} & (6) \end{cases}$$

$$\vec{J} = \vec{\sigma} \vec{E} \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \ :\Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 & (8) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} & (9) \end{cases}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \Rightarrow -\varepsilon\,\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} V) = \rho \quad (11)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} V) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (11)$$

$V(x,y,z)$; $\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$

$\vec{w} = -\varepsilon\vec{\nabla} V$; $\vec{\nabla}\vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$

$$\vec{\nabla}\vec{w} = \vec{\nabla}(-\varepsilon\vec{\nabla} V)$$

$$\vec{\nabla}\vec{w} = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right\} = \rho$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$ (12) eqt électrostatique en 3D en terme potentiel

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$ eqt de poisson

si $\rho = 0$ $\boxed{\Delta V = 0}$ eqt de Laplacien à EDP

B) En terme de $\vec{E}$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho & (1) \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (2) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (3) \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu\vec{H} & (5) \\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} & (6) \end{cases}$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \begin{array}{ll} \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0 & (8) \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J} & (9) \end{array}$$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad ; \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$

champ potentiel nul $\Rightarrow \vec{J} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{0}$

$\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi \quad (10)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu\vec{H} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(-\mu\vec{\nabla}\varphi\right) = 0 \quad (11)$$

$\varphi(x, y, z) \quad ; \quad \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$

$$\vec{\nabla}\cdot(\mu\vec{\nabla}\varphi) = \vec{\nabla}\left(\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0$$

$\mu = cte$:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0} \Leftarrow$$ éq^t de magnétostatique en 3D en terme de potentiel

$\boxed{\Delta\varphi = 0}$ éq^t de Laplace

B) En terme de $\vec{H}$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho & (1) \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (2) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{0} & (3) \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} & (4) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \vec{B} = \mu\vec{H} & (5) \\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} & (6) \end{array}\right.$$

$\vec{J} = \sigma\vec{E} \quad (7)$

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0 & (8) \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J} & (9) \end{array}\right.$$

$\vec{\partial} \wedge (\vec{\partial} \wedge \vec{H}) = \vec{\partial} \wedge \vec{J}$

champ potentiel nul $\vec{J} = 0$

$$\vec{\partial} \wedge (\vec{\partial} \wedge \vec{H}) = 0$$

$-\Delta \vec{H} = 0$ Laplacien

$$\boxed{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0}$$ eqt magnetostatique en 3D en terme H.

Eqt électrocinétiques

$\vec{\partial} \cdot \vec{D} = 0$ (1) $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ l'eqt de Maxwell devient

$\vec{\partial} \wedge \vec{E} = 0$ (2)

$\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$ (3)

$\vec{\partial} \wedge \vec{H} = \vec{J}$ (4) ...

...

$\vec{\partial} \wedge \vec{E} = 0 \Rightarrow \exists$ un potentiel $V \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\partial} V$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$\vec{\partial} \varepsilon_0 \vec{E} = 0 \Rightarrow \varepsilon_0 \neq 0 \Rightarrow \vec{\partial} \cdot \vec{E} = 0$

$\vec{\partial} \cdot \vec{\partial} V = 0 \Rightarrow -\Delta V = 0$ (Laplacien)

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$$ eqt électrocinétique

Examen de rattrapage

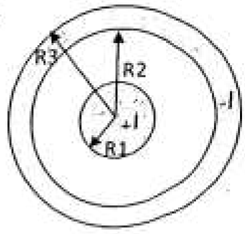
- Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction.
- Aucun document n'est autorisé.

Exercice 01

On considère un câble coaxial infini cylindrique de rayons R1, R2 et R3.
Le courant d'intensité totale I passe dans un sens dans le conducteur intérieur et revient dans l'autre sens par le conducteur extérieur.

1-*En appliquant le théorème d'Ampère*, Calculer le champ magnétique en tout point.

2-Tracer la courbe B(r).



Exercice 02

1- (a) Donner les quatre équations de Maxwell

(b) Rappeler pour chacune des équations de Maxwell son nom, l'équation intégrale et le phénomène physique correspondant

2- $\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E\cos(wt - kx) \\ 0 \end{cases}$

Calculer $\vec{B}$.

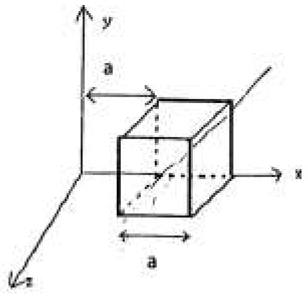
3- Donner l'expression du courant de déplacement $\vec{J_d}$

Exercice 3

Les composantes du champ électrique dans la figure ci-dessous sont :

$\vec{E} = \begin{cases} Ex = b\sqrt{x} \\ Ey = 0 \\ Ez = 0 \end{cases}$ $\quad b$=800 N/Cb.m^2

Calculez la valeur du flux φ_E à travers le cube ainsi que la valeur de la charge à l'intérieur du cube, a vaut 10cm.



$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{vol}$ Maxwell Gauss. relation E et charge statique

$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Maxwell FARADAY

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{0}$ Maxwell Thomson. dépôt

Maxwell Ampère

$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\vec{B} = \mu H$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \underbrace{\mu J}_{\text{conduction}} + \underbrace{\mu \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{courant de déplacement}}$

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} ; \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} ; \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) = \nabla$ Nabla

$\vec{\nabla} f \Rightarrow$ grad $\frac{\partial f_x}{\partial x}(\vec{i}) + \frac{\partial f_y}{\partial y}(\vec{j}) + \frac{\partial f_z}{\partial z}\vec{k} =$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} \Rightarrow$ div $\Rightarrow$ scalaire $\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$

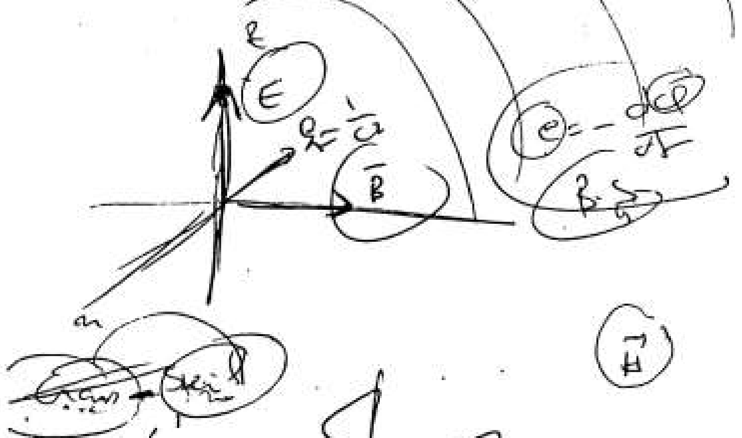
$\vec{\nabla} \wedge \vec{f} \Rightarrow$ rot $\Rightarrow$ vecteur ...

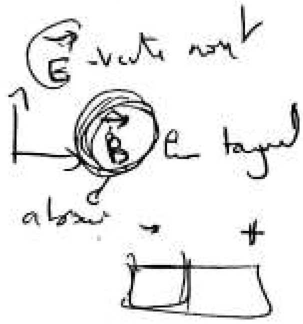
$\begin{pmatrix} i & j & k \\ f_x & f_y & f_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

E^-

E^+

...





$\vec{H}$

Div (rot) = 0

rot (grad) = 0

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho & (1) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (2) \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (3) \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

Maxwell

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu\vec{H} & (5) \\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} & (6) \\ \vec{J} = \sigma\vec{E} & (7) \end{cases}$$

Milieu

(dynamique)

$e = -\frac{\partial\phi}{\partial t}$

plan
1 → électrostatique $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ [entre terme V, entre E
2 → magnétostatique $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ [$\vec{H}$, B
3 → électrocinétique $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ absence de charge
4 → magnétodynamique $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$

$\vec{B} = \vec{rot}\wedge\vec{A}$ dynamique

théoriquement statique ⇒ $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ (statique)

électrostatique en terme V (potentiel scalaire)

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ stationnaire

⇒ $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0$ ⇒ ∃ d'un potentiel scalaire V

$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J}$

(1) $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$

(2) $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

(3) $\vec{D} = \varepsilon(-\vec{\nabla}V)$

(4) $\vec{\nabla}\cdot(\varepsilon - \vec{\nabla}V) = \rho$ ⇒ $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}V) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} V) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} V) = \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right) = -\rho/\varepsilon_0$$

enlarge (7)

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

eqt electrostatique en terme V (potentiel scalaire)

(le laplacien)

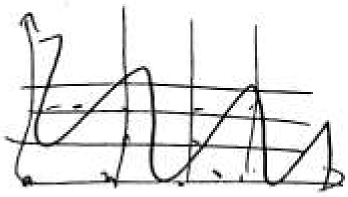
eqt poisson

Vide

si $\rho = 0$

$$\boxed{\Delta V = 0}$$

(Laplacien)



Rq :

div (grad) = laplac

grad (div) = 0

$\text{rot rot} = -\Delta + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot)^{0}$

B) en terme $\vec{E}$

ps électrostatique $\frac{d}{dt} = 0$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = 0$$

$$\boxed{\text{rot}(\text{rot}\,\vec{E}) = -\Delta\vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})^{0}}$$

$$-\Delta\vec{E} = 0$$

(1)

$\vec{E}\,(E_x, E_y, E_z)$

$E_x \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$E_y \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$E_z \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$E\,[0, 0, E_z]$

$$\Delta \vec{E}_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \Rightarrow 0$$

$$\Delta \vec{E}_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \Rightarrow 0$$

$$\Delta \vec{E}_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \neq 0$$

$E(0, 0, E_3)$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = 0$$

éq électrostatique en terme E

$\Delta \vec{E} = 0$ Laplacien

phénomène magnétostatique

A) éqt en terme potentiel V

B) éqt en terme H

$\vec{B} = \mu \vec{H}$

éqt Maxwell

éqt milieu

A) en terme V

magnétostatique $\frac{d}{dt} = 0$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \Rightarrow \exists$ potentiel scalaire V

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}$

induction nul potentiel nul $\Rightarrow \vec{J} = \vec{0}$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla} \varphi \rightarrow$ potentiel

$$\left.\begin{cases} \vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu\vec{H} \end{cases}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(-\mu\,\vec{\nabla}\varphi\right) = 0$$

$\vec{H} \to \varphi(x, y, z)$

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi_z}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\varphi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_z}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_z}{\partial z^2} = 0$$ eq magnétostatique en terme potentiel φ

Laplacien $\Delta\varphi = 0$

B) eq en terme H

{ Maxwell, milieu

magnétostatique $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J} \end{cases}$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{H}) = \vec{\nabla}\wedge\vec{J}$$

Conduction nulle $\vec{J} = 0 \implies$ (4) $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{H}) = \vec{0}$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = 0$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\square) = \Delta \square$$

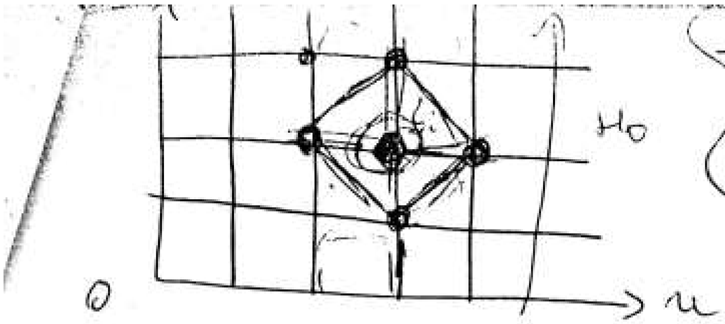
$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V_x}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\,\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} = 0$$

eqt electro cinetiq.

$$\Delta V = 0$$



$$\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x)$$

DF $\Rightarrow$ EDP

f fct qlcq

CNCM $\Rightarrow$ $\Delta f = 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

EDP

$f(x_{i,j}) = f(x_0) + \ldots$

DF $\Rightarrow$ Dev Taylor $f(x_{i,j}) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f'(x_0) + \ldots$

$f(i,j)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ selon i | $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ selon j

f_{i-1} $\quad f_i$ $\quad f_{i+1}$ | f_{j-1} $\quad f_j$ $\quad f_{j+1}$

$f_1 \quad -2f_4 \quad + f_5$ | $f_2 \quad -2f_4 \quad f_3$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f(i-1) + f(i+1) - 4f(i,j) + f(j-1) + f(j+1)}{h^2}$$

(h le pas)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{f(i-1) + f(i+1) - 4f(i,j) + f(j-1) + f(j+1)}{h^2} = 0$$

$$\boxed{f(i-1) + f(i+1) - 4f(i,j) + f(j-1) + f(j+1) = 0}$$

$$\begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix}$$