Université Ibn Tofail **Année Universitaire 2005-2006**
Faculté des Sciences de Kénitra
Département de Physique
DESA- SCTI

Travaux Dirigés No. 4 (complément) (avec correction)
(Traitement du Signal)

Exercice 1 :

Calculer la réponse indicielle y(t) du processus linéaire continu de fonction de transfert $H(p)=\frac{1+5p}{1+p}$,

Réponse : La réponse indicielle correspond à ne une entrée x(t)=Γ(t) (échelon unité) => X(p)=1/p

On sait que $Y(p)=H(p)X(p)=\frac{1+5p}{p(1+p)}=\frac{a}{p}+\frac{b}{1+p}$ (décomposition en éléments simples)

D'où a=1 et b=4 ➔ (transformée de Laplace inverse :voir table (cas causal)) : y(t)=[1+4.exp(-t)] Γ(t)
Req : multiplication par Γ(t) ça signifie que y(t)=0 si t<0 et y(t)=1+4.exp(-t) si t≥0 (cas causal)

Exercice 2 :
Soit un système continu LTI régi par l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante : $y^{(2)}(t)- y^{(1)}(t)=u(t)$, avec u(t)= sin(2.t) et $y(0) = y^{(1)}(0) = 1$.
Réponse :
On calcule les TL des 2 membres de l'équation. On utilisera les propriétés de la TL de la dérivée, la linéarité et la table des TL :
$TL[y^{(1)}(t)]=p.Y(p)-y(0)=p.Y(p)-1$; $TL[y^{(2)}(t)]=p^2Y(p)-p.y(0)-y^{(1)}(0)= p^2Y(p)-p-1$;
$TL[u(t)]=2/(p^2+4)=U(p)$
Donc : $[p^2Y(p)-p-1]-[p.Y(p)-1]= p^2Y(p)-p.Y(p)-p=U(p)$
D'où :$Y(p)=U(p)/(p^2-p) + p/(p^2-p)$
$Y(p)=U(p)/(p^2-p) + 1/(p-1)$
=TL(réponse forcée)+TL(réponse libre)
La fonction de transfert : Y(p)=H(p)U(p) (conditions initiales nulles) ➔ $H(p)= 1/(p^2-p)$
$Y(p)=U(p)/(p^2-p) + p/(p^2-p) =2/[p(p-1)(p^2+4)] + 1/(p-1)$
Décomposition en éléments simples : $Y(p)=a/p + b/(p-1)+ (c.p+d)/(p^2+4) + 1/(p-1)$
On trouve a = -1/2 , b = 2/5 , c = 1/10, d = -2/5.
En utilisant la table des TL, on trouve : y(t)=-1/2+ (7/5)exp(t) + (1/10)cos(2.t) - (1/5)sin(2.t)

Exercice 3 :
Soit un système numérique LIT dont le dénominateur de sa fonction de transfert est donné par : $A(z)=0.1z^3+0.19z^2+0.226.z+0.06$. Ce système est-il stable.
Même question lorsque $A(z)=z^4-z^2/2+1/16$
Réponse :
Si a_0 (ici=0.1) est négatif, on multiplie d'abord A(z) par –1, puis on vérifie successivement les conditions suivantes (si l'on rencontre une non vérifiée, le système sera instable) :
* A(1)= 0.1+0.19+0.226+0.06 > 0 : vérifiée
* A(-1)= -0.1+0.19-0.226+0.06 < 0 (n=3 impair) : vérifiée
on vérifie la condition si $|b_0|> |b_2|$?
on calcule b_0 = 0.1*0.1-0.06*0.06= 0.0064 et b_2=0.1*0.226-0.06*0.19=0.0112
la condition $|b_0|> |b_2|$ non vérifée donc le système est instable. Si cette condition était satisfaite, on calculera b_1 =0.1*0.19-0.06*0.226=0.0054 pour construire c_0 et c_1 pour vérifier la condition $|c_0|> |c_1|$? (voir le cours critère de jury)
* Pour le cas $A(z)=z^4-z^2/2+1/16$, on trouvera que le système est stable

Exercice 4 :
Les séquences x(n) et y(n) représentent respectivement l'entrée et la sortie d'un système discret (on considère x(n) réelle). Pour chacune des 8 relations entrée-sortie ci-dessous, identifiez celles représentant

a) des systèmes linéaires,
b) des systèmes causals,
c) des systèmes invariants aux translations de n,
d) des systèmes assurément ou possiblement stables ; s'il y a lieu, caractérisez les constantes afin d'assurer la stabilité.

1. $y(n) = x(n) + bx(n-1)$, b : constante réelle
2. $y(n) = x(n) + bx(n+1)$, b : constante réelle
3. $y(n) = nx(n)$
4. $y(n) = x(n) \sin(2\pi n/N)$, N : constante entière
5. $y(n) = x(n)\exp(n)$
6. $y(n) = b^{x(n)}$, b : constante réelle
7. $y(n) = |x(n)|$
8. $y(n)=ax(n)+b$

Réponse :
a) Tous sauf 6, 7 et 8.
b) Tous sauf 2.
c) Les systèmes 1, 2, 6, 7 et 8.
d) Les systèmes 1 (b finie), 2 (b finie), 4, 6 (b finie), 7 et 8 (a et b finies)

Exercice 5
Soit un SLI décrit par l'équation :
$y(k) = 3y(k -1) - 2 y(k - 2) + x(k)$
*Déterminer la fonction de transfert du système. Etudier la stabilité et la causalité de ce système. Calculer sa réponse impulsionnelle.
*Calculer la réponse impulsionnelle de $H_1(z)=z/(z^2-3z+2)$
Réponse :
*$H(z)=z^2/(z^2-3z+2)$
$z^2-3z+2=(z-1)(z-2)$, pôles 1 et 2 => instable car les conditions |pôles|< 1 non satisfaites
Le système est causal pour $|z|>\sup(1,2)=2$ (domaine de convergence ne doit pas contenir les pôles)
$h(k)=TZI[H(z)]$, il faut décomposer H(z) en éléments simples :
Il est plus convenable de décomposer H(z)/z au lieu de H(z)
$H(z)/z= z/(z^2-3z+2) =z/(z-1)(z-2)=a/(z-1)+ b/(z-2)$ => a=-1 et b=2,
D'où $H(z)=-z/(z-1)+2z(z-2)$ => (cas causal) $h(k)=-\Gamma(k)+2.2^k\Gamma(k)=(2^{k+1}-1)\,\Gamma(k)$
*$H_1(z)/z= 1/(z^2-3z+2) =a/(z-1)+ b/(z-2)$ => a=-1 et b=1,
D'où $H_1(z)=-z/(z-1)+ z(z-2)$ => (cas causal) $h_1(k)=-\Gamma(k)+2^k\Gamma(k)=(2^k-1)\,\Gamma(k)$
On peut constater que $H(z)=zH_1(z)$ => $H_1(z)=z^{-1}H(z)$ => $h_1(k)=h(k-1)= (2^k-1)\Gamma(k-1)$

Exercice 6
Soit un SLI décrit par l'équation :
$y(k) -2y(k -1)=x(k-1)$, avec $u(k)=3^k$ $(k\geq 0)$ et $x(-1)=0$, $y(-1)=7$
*trouver la réponse y(k) ?
Réponse :
La TZ des 2 membres de l'équation donne :
$Y(z)-2[z^{-1}Y(z)+y(-1)]= z^{-1}X(z)+x(-1)$ <=> $Y(z)=X(z)/(z-2)+14.z/(z-2)$
$X(z)=TZ[3^k]=z/(z-3)$
$TZI[z/(z-2)(z-3)]=y_F(k)$ (réposne forcée) , $TZI[14.z/(z-2)]=y_L(k)=14.2^k)\Gamma(k)$
$Y_F(z)=z/(z-2)(z-3)=z[a/(z-2)+b/(z-3)]=z[-1/(z-2)+1/(z-3)]= -z/(z-2)+z/(z-3)$=>$y_F(k)=(-2^k+3^k)\Gamma(k)$

Exercice 7 :
Calculer les TZI de $H(z)=(3z^2-1)/(2z^2-z-1)$ avec $|z| >1$ et $G(z)=z/[(z-1)^2(z-2)]$ avec $|z| >2$

$H(z)=(1/2)(3z^2-1)/[(z-1)(z+1/2)]$, après décomposition en éléments simples, on trouve $h(k)=(1/3)[2+(5/2)(-1/2)^k]\Gamma(k)$
$G(z)=z/[(z-1)^2(z-2)]$ ➔ après décomposition en éléments simples, on trouve $g(k)=[2^k-(k+1)]\Gamma(k)$