Université Kasdi Merbah Ouargla

Faculté des Nouvelles Technologies de l'Information et de la Communication

Département d'Electronique et Des Télécommunications

Cour de traitement de signal

Pour 1^{ere} année master instrumentation

Proposé et enseigné par Chebbara Fouad

Cours de Traitement du Signal

Contents

SIGNAUX ET DEFINITIONS

1 Définition du signal

On appelle signal toute grandeur physique tensorielle qui varie soit continument (signaux analogiques) soit discrètement (signaux numériques) au cours du temps. L'évolution dans le temps de la grandeur considérée est régie par la dynamique spécifique du signal. Quelque fois la loi temporelle régissant le phénomène est bien connue (signaux déterministes) et d'autre fois il est difficile, voir impossible de le décrire (signaux aléatoire).

1.1 Exemple

OEM $\leftrightarrow$ dynamique régie par les lois de Maxwell
Son $\leftrightarrow$ dynamique régie par la théorie des ondes stationnaires
Signaux électriques $\leftrightarrow$ courant, tension
Influx nerveux $\leftrightarrow$ électrophysiologique (transmission d'infos sensorielles)

1.2 Processus

Le traitement du Signal suit le cheminement suivant :
* Analyse et diagnostique
* Codage
* Quantification et Compression
* Transmission et archivage
* Synthèse et restauration

1.3 Liens entre les deux types de signaux

Il existe une correspondance étroite entre signal analogique et signal discrêt :
Signal analogique $\rightarrow$ ***Echantillonnage*** $\rightarrow$ Signal discret.
L'échantillonnage consiste à mesurer (à découper) à intervalle de temps régulier un signal

analogique. C'est un des outils souvent utilisés en traitement du signal.

L'objet du traitement du signal est donc d'analyser avec soin, de coder, de transmettre intégralement ou une partie spécifique du signal ou de reconstruire à sa reception toutes ses propriétés afin d'en tirer les maximum d'infos qu'il contient.

2 Signaux déterministes

2.1 Signaux analogiques

Ce sont des signaux à temps continu, c'est à dire définis pour toute valeur de t. On s'appuie sur les modèles mathématiques pour les décrire. L'allure de la fonction peut présenter des sauts.

2.2 Signaux à temps discrêt

La variable de la fonction considérée ne peut prendre que des valeurs entières $k \in \mathbb{Z}$.
Pour la variable temps, k représente le coefficient mutiplicateur d'une durée t_0 qui permet d'échantillonner le signal.

3 Principaux signaux

3.1 Fonction porte

$$\pi_{2T}(t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \; |t| \leq T \\ 0 \text{ pour } \; |t| > T \end{cases}$$

3.2 Fonction échelon unité de Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } t \geq 0 \\ 0 \text{ pour } t < 0 \end{cases}$$

Cette fonction est intéressante dans la description des régimes continus; moyen commode d'exprimer la discontinuté de première espèce.

3.3 Fonction Impulsion de Dirac

Si on prend une fonction porte d'amplitude $\frac{1}{T}$, de largeur T et si on suppose que la durée temporelle T est brève, on retrouve la définition de la fonction de Dirac. Elle présente les propriétés suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi_T(t)dt = 1, \qquad \text{avec} \qquad \pi_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} \text{ pour } \; |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 \;\; \text{pour } \; |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{T\to 0}\pi_T(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t \neq 0 \\ \infty \text{ pour } t = 0 \end{cases}$$

La limite de cette fonction lorsque T $\to$ l'∞ donne l'impulsion de Dirac :
$\delta(t) = \lim\limits_{T\to 0}\pi_T(t)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1$.

La distribution de Dirac est définie en t_0 comme suit :

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq t_0 \\ \infty \text{ si } t = t_0 \end{cases}, \text{ avec } \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt = 1.$$

3.4 Fonction Triangle

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1\text{-}|t| & \text{pour} \quad |t| \leq 1 \\ 0 & \text{pour} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

3.5 Fonction Sinus Cardinal

$sinc(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

3.6 Fonction Peigne de Dirac

$$\Psi_T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

3.7 Fonction périodique

$f(t) = f(t+T), \forall t$

T est la période du signal. $\nu = \dfrac{1}{T}$ est la fréquence du signal.

3.7.1 Valeur moyenne de f

$\overline{f}(t) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$

3.7.2 Puissance Moyenne

$P = \overline{f^2}(t) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)dt$

(dans cette définition, on a pris pour résistance de charge la valeur 1Ω)

Le RMS (valeur efficace) de cette fonction est donnée par :
$f_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}|f(t)|^2 dt$. *Remarque :* $|f(t)|^2 = f(t).f^*(t)$

4 Signaux aléatoires

4.1 Définition

Un signal est dit aléatoire lorqu'on est incapable de le décrire par une loi mathématique simple.
Exemple : le bruit, l'éclair, certains écoulements...
Un signal aléatoire peut être de type transitoire ou permanent.
Dans le cas permanent : on peut le décrire par les lois de probabilités.

4.2 Rappels sur les notions de probabilité

La probabilité est un nombre réel, $p \in [0, 1]$
Variable aléatoire x_a tel que $p(x_a = x_i) = \alpha_a \in [0, 1]$ et on a : $\sum\limits_a \alpha_a = 1$
Le signal aléatoire continu étant décrit par la fonction $x(t)$ qui évolue dans le temps de façon incertaine, on s'appuye sur les notions de statistiques de données pour le décrire.

MATHEMATIQUE DU SIGNAL

5 Série de Fourier

5.1 Définitions

Soit un signal $x(t)$ périodique de période T admettant un nombre fini de discontinuités; on a :

$x(t) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$

$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt$

$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t). \cos(n\omega t)dt$

$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t). \sin(n\omega t)dt$

5.2 Représentation Complexe

$x(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{e^{jn\omega t}+e^{-jn\omega t}}{2} + \sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} b_n \frac{e^{jn\omega t}-e^{-jn\omega t}}{2j}$

soit,

$x(t) = a_0 + \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} [(a_n - jb_n)e^{jn\omega t} + (a_n + jb_n)e^{-jn\omega t}]$

Les coefficients C_n sont calculés par l'intégrale :

$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-jn\omega t}dt = C^*_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$

5.3 Représentation spectrale

5.3.1 Harmoniques

Posons $\tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$.

On a : $x(t) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} \cos(n\omega t) - \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} \sin(n\omega t) \right)$

$\cos(\varphi_n) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_n}} = \dfrac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ et $\sin(\varphi_n) = \dfrac{-b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ avec $S_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

$x(t) =$ somme d'un signal continue et d'un infinité de signaux sinusoïdaux de pulsation ω, 2ω, 3ω, 4ω,.....$n\omega$,.....

Le terme de pulsation ω est appelé la fondamentale ou le premier harmonique. Les autres termes s'appellent respectivement harmoniques d'ordre 2, 3, 4,......n,.......

5.3.2 Spectre

On porte sur l'axe des abscisses la pulsation ω et en ordonnée les raies traduisant les modules des S_n correspondants.

De même, on représente le spectre en puissace (S_n^2) et puis le spectre en phase (φ_n).

5.3.3 Symétrie et Changement de l'origine des temps

Fonction paire

$a_n = \frac{4}{T} \int_{t_0}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos(n\omega t) dt,$ $b_n = 0$, on en déduit que $C_n = C_{-n} = \dfrac{a_n}{2}$

Fonction Impaire

$b_n = \frac{4}{T} \int_{t_0}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin(n\omega t) dt,$ $a_n = 0$, on en déduit que $C_n = -C_{-n} = \dfrac{b_n}{2j}$

6 Intégrale et Tranformée de Fourier

6.1 Signaux non périodiques ou à T $\to +\infty$

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$ avec $C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-jn\omega_0 t} dt$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu_0 \, [t_0,\ t_0 + T] \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

Il est plus commode d'écrire :

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t).e^{-jn\omega_0 t} dt\right] e^{jn\omega_0 t}$

Si $T \longrightarrow \infty$ alors $\nu \longrightarrow 0$ $\longrightarrow$spectre continue.

En posant $\nu = n\nu_0$ abscisse de la raie de rang n (fréquence courante), alors $\sum_n$ sera remplacée par $\int dn = \frac{1}{\nu_0} \int d\nu$ avec $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T}$ et par conséquent :

$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j2\pi\nu t} dt\right] e^{j2\pi\nu t} d\nu$

6.2 Définition de la Transformée de Fourier

On appelle Transformée de Fourier de la fonction $f(t)$ la fonction $F(\nu)$ définie par :

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j2\pi\nu t} dt \quad \text{et} \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu$$

La réciprocité s'écrit : $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(\nu)$

6.3 Propriétés

6.3.1 Linéarité

$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \qquad \text{alors} \qquad X(\nu) = aX_1(\nu) + bX_2(\nu)$

6.3.2 Dérivation

$TF[x'(t)] = j2\pi\nu X(\nu)$

6.3.3 Parité

$x(t)$	$X(\nu)$
réelle paire	réelle paire
réelle impaire	imaginaire impaire
réelle	complexe (Ré paire, Im impaire)

6.3.4 Conjugué

Etant donnée $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(\nu)$ alors $x^*(t) \xleftrightarrow{TF} X^*(-\nu)$; x^* est le complexe conjugué de x
C'est à dire : $TF[x^*(t)] = X^*(-\nu)$

6.3.5 Décalage temporel

$TF[x(t - t_0)] = e^{-j2\pi\nu t_0} X(\nu)$
Par symétrie on a :
$TF[e^{+j2\pi\nu_0 t} x(t)] = X(\nu - \nu_0)$

6.3.6 Dilatation temporelle

$TF[x(\lambda t)] = \frac{1}{|\lambda|} X(\frac{\nu}{\lambda})$
pour $\lambda = -1$ alors $TF[x(-t)] = X(-\nu)$

7 Convolution

7.1 Définition

$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) \; d\tau$
La convolution exprime généralement la réponse à un signal quelconque à partir de celle d'un

signal type (impulsionnelle) caractérisé par y(t). τ exprime le retard temporel entre les deux signaux.
Les filtres définis comme STLCS (Système de Transmission Linéaire Continue et Stationnaire) sont des systèmes de convolution.

7.2 Propriétés

$x * y = y * x, \qquad x * (y + z) = x * y + x * z, \qquad x * \delta = \delta * x = x$

7.3 Convolution de fonctions T_0-périodiques

$z(t) = \frac{1}{T} \int_0^{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$

7.4 Théorème de Plancherel

La TF du produit d'une convolution est un produit simple et réciproquement.
$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{TF} X(\nu) \cdot Y(\nu)$ et reciproquement $x(t) \cdot y(t) \xleftrightarrow{TF} X(\nu) * Y(\nu)$
Démonstration :
$x(t) \xleftrightarrow{TF} X(\nu)$ et $y(t) \xleftrightarrow{TF} Y(\nu)$;
Soit $z(t)$ le signal tel que : $z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)\ d\tau$
Calculons $Z(\nu) = TF\left\{z(t)\right\}$:
$Z(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot e^{-j2\pi\nu t}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) * y(t)] \cdot e^{-j2\pi\nu t}\ dt$
soit, $Z(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)\ d\tau\right] \cdot e^{-j2\pi\nu t}\ dt$
ou encore,
$Z(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau) \cdot e^{-j2\pi\nu t}\ \ d\tau\right] \cdot dt.$
En écrivant $e^{-j2\pi\nu t} = e^{-j2\pi\nu\tau}.e^{-j2\pi\nu(t-\tau)}$, il vient :
$Z(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [x(\tau) \cdot e^{-j2\pi\nu\tau}] \cdot \left[y(t-\tau) \cdot e^{-j2\pi\nu(t-\tau)}\right] \cdot d\tau\right] \cdot dt$ et en séparant les deux intégrales alors,
$Z(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(\tau) \cdot e^{-j2\pi\nu\tau}] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau) \cdot e^{-j2\pi\nu(t-\tau)} \cdot dt\right] \cdot d\tau$ Posons $\theta = t - \tau$, on $d\theta = dt$ (τ est considéré comme paramètre constant si on raisonne par rapport à la variable t).
On a :
$Z(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi\nu\tau} \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(\theta) \cdot e^{-j2\pi\nu\theta} \cdot d\theta\right] \cdot d\tau$
Puisque la deuxième intégrale est indépendante de τ, on peut ecrire $Z(\nu)$ sous la forme :
$Z(\nu) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau\right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(\theta) \cdot e^{-j2\pi\nu\theta} \cdot d\theta\right]$ soit, le résultat attendu :
$TF\left\{x(t) * y(t)\right\} = X(\nu)(\nu)$

8 Transformée de Laplace

Pour un signal continu transitoire, afin d'assurer la convergence de l'intégrale de Fourier (signal causal ie $t > 0$), on multiplie $x(t)$ par e^{-pt}.

8.1 Définition

On définit alors la transformée de Laplace de la manière suivante :
Lx(p)=$\{x(t)\}_L = X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt$

8.2 Propriétes

$ax_1(t) + bx_2(t) \stackrel{TL}{\longleftrightarrow} aX_1(p) + bX_2(p)$
$x(at) \stackrel{TL}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|}X(\frac{p}{a})$
$x(t-a) \stackrel{TL}{\longleftrightarrow} X(p) \cdot e^{-a.p}$
$x(t) * y(t) \stackrel{TL}{\longleftrightarrow} X(p) \cdot Y(p)$
et reciproquement,
$x(t) \cdot x(t) \stackrel{TL}{\longleftrightarrow} X(p) * Y(p)$

9 Propriétés energétiques

Transmission d'information $\equiv$ Transmission d'énergie

9.1 Puissance instantanée

$p(t) = |x(t)|^2 = x(t) \cdot x^*(t)$

9.2 Puissance moyenne sur un durée T

$\overline{p}_T(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} p(t)\ dt$

9.3 Energie dans un intervalle T

$E_T(t) = \int_t^{t+T} p(t)\ dt$

9.4 Energie totale du signal

$E = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\ dt$

9.5 Puissance moyenne d'interaction entre deux signaux

$\overline{p}_{xy}(t,T) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} x(t)\cdot y^*(t)\ dt \qquad et \qquad \overline{p}_{yx}(t,T) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} y(t)\cdot x^*(t)\ dt$

9.6 Puissance fréquentielle

Soit $f(t) \overset{TF}{\longleftrightarrow} F(\nu)$; nous définissons les grandeurs ci-après :
Spectre de puissance ou densité spectrale :
$S_{xx}(\nu) = X(\nu)^*(\nu) = |X(\nu)|^2$
Energie contenue dans une bande de fréquences de largeur $\Delta\nu$ autour d'une fréquence F_0 s'écrit : $E_x(\Delta\nu, F_0) = \int_{F_0-\frac{\Delta\nu}{2}}^{F_0+\frac{\Delta\nu}{2}} S_{xx}(\nu)d\nu$
L'énergie totale dans le spectre $X(\nu)$ s'exprime sous la forme :
$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\nu).d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2\ d\nu$

10 Corrélation et densité spectrale

10.1 Intercorrélation entre deux signaux

$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)\ dt$
Attention aux notations, on peut aussi définir sous la forme :
$C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y^*(\tau-t)\ d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(\tau)\ d\tau$

10.2 Autocorrélation

10.2.1 Définition

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x^*(t)\ dt$$

10.2.2 Propriétés

Pour les signaux réels la fonction C_{xx} est paire, $C_{xx}(t) = C_{xx}(-t)$
$\forall t$ on a : $C_{xx}(t) \leq C_{xx}(0)$ (valeur maximale à $t = 0$)

10.3 Densité spectrale

$TF^{-1}\{S_{xx}(\nu)\} = TF^{-1}\{|X(\nu)|^2\} = TF^{-1}\{X(\nu).X^*(\nu)\}$
$TF^{-1}\{S_{xx}(\nu)\} = x(t) * x^*(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).x^*(t-\tau).dt = C_{xx}(\tau)$
d'où la relation : $C_{xx}(\tau) \overset{TF}{\longleftrightarrow} S_{xx}(\nu)$
et pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$: $C_{xy}(t) \overset{TF}{\longleftrightarrow} S_{xy}(\nu)$ ou $C_{yx}(t) \overset{TF}{\longleftrightarrow} S_{yx}(\nu)$

Remarque :
Pour les fonctions réelles, $|X(\nu)|^2 = X(\nu)X^*(\nu) = X(\nu)X(-\nu)$ et $S_{xx}(\nu) = |X(\nu)|^2$

11 Propriétés spectrales

11.1 Spectre du signal

$X(\nu) = TF\left\{x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t}dt$
$x(t)$ réelle $\Rightarrow X(\nu) = X^*(-\nu) = X^*(\nu)$

11.2 Théorème de Parseval

L'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie.
$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2\, d\nu$, c'est une évidence logique.
$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \,.\, |y^*(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|\, |Y^*(\nu)|\, d\nu$
Remarque :
Pour un signal localisé
$E = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\nu)\ d\nu$

11.3 Théorème de Wiener-Khinchine

Enoncé :
La densité spectrale du signal $S_{xx}(\nu)$ est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrection $C_{xx}(\tau)$. On ecrit cette propriété sous la forme :
$S_{xx}(\nu) = TF\{C_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(\tau)e^{-j2\pi\nu\tau}\ d\tau$ et reciproquement :
$C_{xx}(\tau) = TF^{-1}\left\{S_{xx}(\nu)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\nu)e^{j2\pi\nu\tau}d\nu$
Démonstration :
Faisons le changement de variable $t' = t - \tau$
$S_{xx}(\nu) = X(\nu)X^*(\nu) = X(\nu)X(-\nu)$
$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t}\ dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{j2\pi\nu t'}\ dt' = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t')e^{j2\pi\nu(t'-t)}\ dtdt'$
$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)e^{-j2\pi\nu\tau}\ d\tau dt = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(\tau)e^{-j2\pi\nu\tau}d\tau = TF\left\{C_{xx}(\tau)\right\}$

Réciproquement,
$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)e^{j2\pi\nu t}d\nu \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu')e^{j2\pi\nu'(t-\tau)}d\nu'\right] dt$
$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)X(\nu')e^{j2\pi(\nu+\nu')t}e^{-j2\pi\nu'\tau}d\nu d\nu' dt$
$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)X(\nu')\delta(\nu+\nu')e^{-j2\pi\nu'\tau}d\nu d\nu'$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)X(-\nu)e^{j2\pi\nu\tau}d\nu$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\nu) e^{j2\pi\nu\tau} d\nu$

12 Signaux aléatoires

12.1 Théorie des probabilités

12.1.1 Variables aléatoires

Fonction de répartition-densité de probabilité :

Supposons qu'on mesure l'amplitude de N signaux au cours N processus identiques;
si on trouve $\ll x_a = n \gg$ pour les N mesures avec $x_a < x$, on écrit :
$F(x) = p(x_a < x) = \dfrac{n}{N}$
$F(x)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire x_a.
La densité de probabilité relative pour que $x_a \in [x_1, x_2]$ est :
$f(x) = \underset{x_2 \to x_1}{lim} \dfrac{p(x_1 < x_a < x_2)}{x_2 - x_1} = \dfrac{p(x < x_a < x + dx)}{dx}$
$f(x)$ est la dérivée de la fonction $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$
$Axiome :\ F(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Valeur moyenne d'un signal aléatoire discrêt

$x_{moy} = \overline{x} = \frac{1}{N} \sum\limits_{i} n_i x_i$ avec $\sum\limits_{i} n_i = N$
(on suppose ici que chaque évênement $X = x_a$ se réalise n_i fois),
ou dans le cas continue, la valeur moyenne s'écrit :
$\overline{x} =< x >= \int x f(x)dx$ et est encore appelé l'espérance mathématique de x ou moment d'ordre 1 de x.

Espérance mathématique :

$E(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n = \overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x.dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.p(x)dx$

Moment d'ordre n : $E(x^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n.p(x)dx.$

Moment d'ordre 2 ou moment quadratique :

Elle mesure la dispersion d'une variable aléatoire autour de sa valeur moyenne.
$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.p(x)dx$ est lié à l'énergie transportée par le signal.

Moyenne quadratique d'un signal centré :

$Var(x) = \sigma_x^2 = E\left[(x - \overline{x})^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x})^2 .p(x)dx = E(x^2) - [E(x)]^2$

Ecart type :

$\sigma_x = \sqrt{Var(x)}.$

12.1.2 Distribution de Gauss

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\overline{x}}{\sigma}\right)^2}$

12.1.3 Distribution de Poisson

$f(x) = \frac{\sigma^x}{x!}e^{-\sigma} \qquad \sigma = \overline{x}$

12.1.4 Cas de 2 variables aléatoires

On définit la covariance et la corrélation de la façon suivante :
$\sigma^2_{x_i x_j} =< (x_i - \overline{x}_i)(x_j - \overline{x}_j) >$ et $\rho_{xy} = \frac{\sigma^2_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

12.2 Principales lois de probabilité

- Loi exponentielle : $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ avec $\alpha \in [0, +\infty]$
- Loi de Rayleigh : $f(x) = \dfrac{x}{\alpha^2} e^{-\frac{x^2}{2a}}$ avec $a \in [0, +\infty]$
- Loi de poisson : $p(x = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
- Loi de Gauss : $f(x) = p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$

12.2.1 Propriétés des signaux aléatoires

On considère un processus décrit par la variable aléatoire $x(t)$
Stationnarité et Ergodicité
Processus stationnaire ⇔ caractéristiques statistiques (moyenne, écart type, etc..) indépendantes du choix de l'origine du temps
Processus ergodique ⇔moyennes sur plusieurs épreuves sont équivalentes aux moyennes temporelles correspondant à une seule épreuve
Signal stationnaire $\overline{x}_T = \overline{x}_{T+\tau}$
exemple : signal non ergodique
Signal ergodique $\overline{x}_e = \overline{x}_t$
exemple : non stationnaire, signal de Wiener

12.2.2 Caractéristique d'un signal aléatoire stationnaire et ergodique

Si la variable aléatoire stationnaire est aussi ergodique il y a équivalence avec les caractéristiques temporelles.

Moyenne temporelle
$\overline{x}_e = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_i x_i(t)$ et $\overline{x(t)} = \lim\limits_{T\to\infty} \overline{x}_T = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)dt$

Puissance du signal
$P_x = \overline{x^2(t)} = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t)dt \equiv < x^2(t) >$

Fonction d'autocorrélation temporelle
$C_{xx}(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x(t-\tau)dt$

12.3 Le Bruit

On appelle bruit tout signal indésirable, limitant l'intelligibilité d'un signal utile.
Le bruit peut avoir avoir plusieurs sources :
- sources externe (indépendant du signal propre) localisé à l'extérieur du système
- source internes (perturbation impulsionnelle, bruit de fond) lié à l'électronique du systeme.

12.3.1 Bruit thermique

Effet Johnson $b_{eff}^2 = 4.k.T.R.\Delta\nu$

$$\text{avec} \begin{cases} k \text{ la const de Boltzmann} \\ T \ \text{ température (en K)} \\ R \text{ résis tan ce (en } \Omega) \\ \Delta\nu \text{ bande passante du système (en Hz)} \end{cases}$$

La puissance totale du bruit thermique (dans résistance constante) est :

$$P_{th} = k.T.\Delta\nu \text{ exprimée en W}$$

12.3.2 Bruit blanc

Le bruit blanc est un signal de valeur moyenne nulle. Son spectre en amplitude est constant. La densité spectrale du bruit blanc est constante dans la bande de fréquence $\Delta\nu$ considérée.

$$B(\nu) = B_0 = \tfrac{1}{2}kT.$$

La fonction d'autocorrélation temporelle du bruit blanc est une impulsion de Dirac :

$$C_{bb}(\tau) = B_0.\delta(\tau)$$

Pratiquement, un tel bruit n'existe pas, mais parlera du bruit blanc à chaque fois que le spectre de densité de puissance est constante à l'intérieur de la bande passante.

12.3.3 Bruit rose

Un bruit rose est un bruit dont le spectre en amplitude est inversement proportionnel à la fréquence (le spectre en amplitude varie en $\frac{1}{\nu}$).
En réalité, il s'agit d'un bruit blanc dont la densité spectrale de puissance est modélisée par une fonction porte de largeur $2\nu_b$; ν_b est la fréquence maximale du bruit rose.
La fonction d'autocorrélation impulsionnelle du bruit rose est très étroite et centrée sur $\tau = 0$ (fonction *sinc* dans le cas réel)
$B(\nu) = B_0 \cdot \Pi_{2\nu_b}(\nu)$

Sa fonction d'autocorrélation est : $C_{bb}(\tau) = B_0 \cdot (2\nu_b) \cdot \frac{\sin(2\pi\nu_b\tau)}{2\pi\nu_b\tau}$
Dans le cas où ν_b très grand, la fonction d'autocorrélation du bruit du bruit rose est nulle pour $(\tau > \tau_{lim})$.

12.3.4 Bruit de Grenaille

Fluctuations statistiques du nombre de porteurs de charges traversant la barrière de potentiel, qui participe à la réation de courant (jonction PN d'un semi-conducteur).

12.3.5 Autres bruits

Bruit dit gaussien (caractérisé valeur moyenne et un écart-type)
Bruit dit périodique (somme de signaux sinusoidaux sans référence de base)
Bruit brownien (le spectre en amplitude varie en $\frac{1}{\nu^2}$

12.3.6 Propriétés et Traitement de Bruit

Rapport S/B (signal/bruit) :
Ce rapport caractérise la qualité du signal. On compare le S/B d'entrée et le S/B à la sortie.
Soit un signal x(t) de puissance moyenne P_x, mélangé avec du bruit blanc b(t).
Sa puissance moyenne résultante est :
$P_s = P_{x+b} = \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) + b(t)]^2 \, dt$
Comme ce bruit est indépendant du signal, on a :
$P_s = \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t)]^2 dt + \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [b(t)]^2 dt = P_x + P_b$
Pour un bruit blanc stationnaire, ergodique et centré, on a:
$P_s = P_x + \sigma_b^2$
Le rapport signal/bruit se défini sous la forme : $\eta = \frac{P_x}{\sigma_b^2}$
Si on prend un signal informatif de type cosinusoïdal $x(t) = Acos(\omega t)$, le rapport signal/bruit se définit sous la forme : $\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{\sigma_b^2}$
Exemples de signaux bruités
- signal peu prédictible
- signal "lent" assez prédictible
- signal "rapide" peu prédictible
- signal présentant une bande de fréquences dominante
- signal sinusoidal perturbé par un bruit à large bande

12.3.7 Détection par corrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit

Soit un signal $x(t)$,
soit un bruit $b(t)$, bruit sans mémoire ($C_{bb}(\infty) = 0$) et indépendants de $x(t)$.

Le signal complet à traiter est $s(t) = x(t) + b(t)$.
La fonction d'autocorrélation de $s(t)$ est donnée par :
$C_{ss}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t)s(t-\tau)dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [x(t)+b(t)]\,[x(t-\tau)+b(t-\tau)]\,dt.$
Par distributivité de l'opérateur de corrélation, il vient :
$C_{ss}(\tau) = C_{xx}(\tau) + C_{xb}(\tau) + C_{bx}(\tau) + C_{bb}(\tau)$
Or, les fonctions $C_{xb}(\tau)$ et $C_{bx}(\tau)$ sont nulles (signaux indépendants); résultat toujours vrai même si T est grande. De plus pour le bruit blanc $C_{bb}(\tau) = 0$ en déhors de 0 ou négligeable devant $C_{xx}(\tau)$ au bout d'une durée finie de correlation.
Donc en sortie on a : $C_{ss}(\tau) = C_{xx}(\tau)$.

ECHANTILLONNAGE

13 Numérisation des Signaux

13.1 Introduction

$s(t)$ signal analogique $\Longleftrightarrow s(nT_e)$ avec n entier, T_e période d'échantillonnage.
Cette opération est réalisée par des circuits : préleveurs ou échantillonnneurs

13.1.1 Processus

Filtrage analogique $V(t)$ $\rightarrow$ Echantillonnage $V_e(nT_e)$ $\rightarrow$ Quantification (codage $V_e(n)$)
$\rightarrow$Traitement (système numérique) $\rightarrow$ Restitution $V_s(nT_s)$ $\rightarrow$Filtrage analogique V_s.

13.1.2 Traitement

Filtrage numérique, Stockage, Transmission, Codage, Compression....
Sans traitement $\Rightarrow$ le signal final reste fidèle au signal analogique : $V_e(n) = V_s(n)$

13.1.3 Problème rencontré

- la période d'échantillonnage
- le pas de quantification
- le temps de réponse du système.

13.2 Echantillonnage idéal

13.2.1 Définition

Opération mathématique simple : multiplier un signal analogique par des impulsions unités régulières dans l'espace temporel.
On utilise la fonction Peigne de Dirac :

$\Psi_{T_e}(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k.T_e)$

On obtient, à partir d'un signal $x(t)$, le signal échantillonné $x_e(t)$, suite de pics de Dirac dont les poids "statistiques" sont les valeurs du signal $x(t)$ aux instants kT_e , c'est à dire les valeurs $x_k = x(kT_e)$.

$x(t) \rightarrow x_e(t) = x(t) \cdot \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - kT_e)$

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \cdot \delta(t - kT_e) \quad \text{où} \quad x_k = x(kT_e) \qquad (1)$$

$x_e(t)$: signal discrêt à spectre non borné (périodisation infinie).

13.2.2 Transformée de Fourier du peigne de Dirac

$$TF\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)\right\}_\nu = \nu_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - k\nu_e\right)$$

13.2.3 Formule de Poisson

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \nu_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k\nu_e t}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_e) = \nu_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\nu_e)e^{j2\pi\nu_e kt}$$

13.2.4 Transformée de Fourier du signal échantillonné

Soit $X(\nu) = TF\{x(t)\}_\nu$ et $X_e(\nu) = TF\{x_e(t)\}_\nu$

On a : $X_e(\nu) = \{x_e(t)\}_\nu = TF\left\{\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\delta(t - kT_e)\right\}_\nu$

Or d'après Plancherel, $X_e(\nu) = \{x_e(t)\}_\nu =TF\left\{\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)\right\}_\nu * X(\nu)$

$X_e(\nu) = \nu_e \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - n\nu_e\right) * X(\nu) = \nu_e \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\nu - n\nu_e\right)$ (2)

d'où, le spectre de l'échantillonné $X_e(\nu)$ s'obtient en périodisant avec une période de ν_e sur l'axe des fréquences, la transformée de Fourier $X(\nu)$ du signal $x(t)$ multiplié par ν_e

13.2.5 Théorème de Shannon

Soit un signal à spectre à support borné $(-\nu_{\max} < \nu < \nu_{\max})$

Posons, $\nu_e = \frac{\omega_e}{2\pi} = \frac{1}{T_e}$;

pour que $X_e(\nu) \equiv X(\nu)$ il faut et il suffit que $\nu_e \geq 2\nu_{\max}$ (théorème de Shannon).

Enoncé du théorème d'échantillonnage :

Un signal continu de spectre borné dans $[-\nu_{\max}, +\nu_{\max}]$ est complètement déternimé par les valeurs qu'il prend à des instants régulièrement espacés de $\frac{1}{2\nu_{\max}}$ au minimum.

13.2.6 Extraction du signal initial

On suppose la condition du théorème de l'échantillonnage respectée et que le signal initial est à spectre borné par $\nu_{\max}$.
On peut écrire d'après la relation (2), le spectre de base sous la forme :
$X_{e0}(\nu) = \nu_e \cdot X(\nu)$ (3)
En appliquant la TF^{-1} on obtient le signal temporel correspondant au spectre de base $U_{e0}(\nu)$, soit :
$X_{e0}(t) = \nu_e.x(t)$ (4)
De façon rigoureuse on utilise le Filtrage : avec un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $\frac{\nu_e}{2}$, caractérisé par la fonction porte on peut écrire :
$X_{e0}(\nu) = X_e(\nu) \cdot \Pi_{\nu_e}(\nu)$
En prenant la TF^{-1} et en appliqant le théorème de Plancherel, on a :
$x_{e0}(t) = x_e(t) * [\nu_e \cdot \sin c(\pi \nu_e t)] = \nu_e \cdot \left[x_e(t) * \frac{\sin(\pi\nu_e t)}{\pi\nu_e t}\right]$
$x_{e0}(t) = \nu_e \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(kT_e) \cdot \delta(t-kT_e)\right] * \frac{\sin(\pi\nu_e t)}{\pi\nu_e t}$, d'après la relation (1)
et donc, $u_{e0}(t) = \nu_e \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \cdot \frac{\sin(\pi\nu_e(t-kT_e))}{\pi\nu_e(t-kT_e)}\right]$
Par identification, avec ce qui précède (relation (4)), on peut écrire :
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \cdot \frac{\sin(\pi\nu_e(t-kT_e))}{\pi\nu_e(t-kT_e)} \qquad (5)$$

13.2.7 Effet du repliement de spectre

Lorsque le théorême de Shannon n'est pas respecté on observe des phénomènes de recouvrement (ou repliement) des spectres .

13.2.8 Echantillonnage réel

Le signal échantillonné réel est constitué d'impulsions distantes de T_e et de largeur τ.
L'amplitude de ces impulsions sera fonction du procedé d'échantillonnage utilisé :
- *naturel* : amplitude égale $x(t)$ pendant l'intervalle τ (irréalisable)
- *régulier* : amplitude constante et égale à $x(nT_e)$ pendant la durée τ
- *moyenneur* : amplitude égale à la moyenne de $x(t)$ sur l'intervalle τ

L'échantillonnage réel se fait en prenant une fonction porte de largeur τ et périodisée avec une période T_e.
Mathématiquement on a :
$i_{T_e,\tau}(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \Pi_\tau(t-kT_e)$
En utilisant le peigne de Dirac et le produit de convolution on a :
$i_{T_e,\tau}(t) = \Pi_\tau(t) * \Psi_{T_e}(t) = \Pi_\tau(t) * \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t-kT_e)$

Le pectre de ce signal s'exprime :

$I_{T_e,\tau}(\nu) = \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi\tau\nu)}{\pi\tau\nu}\right] \cdot [\nu_e \cdot \Psi_{\nu_e}(\nu)] = \tau \cdot \frac{\sin(\pi\tau\nu)}{\pi\tau\nu} \cdot \nu_e \cdot \sum\limits_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(\nu - k\nu_e)$ soit,

$I_{T_e,\tau}(t) = \tau \cdot \nu_e \cdot \sum\limits_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{\sin(\pi\tau k\nu_e)}{\pi\tau k\nu_e} \cdot \delta(\nu - k\nu_e) \qquad (6)$

Echantillonnage naturel

L'amplitude de chaque échantillon suit la valeur de la fonction pendant l'intervalle τ.

On a :

$x_e\,(t) = x(t) \cdot i_{T_e,\tau}(t) = x(t) \cdot [\Pi_\tau(t) * \Psi_{T_e}(t)] \qquad (7)$

on en déduit le spectre, d'après la relation (6);

$X_e\,(\nu) = X(\nu) * I_{T_e,\tau}(\nu) = X(\nu) * \left[\tau \cdot \nu_e \cdot \sum\limits_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{\sin(\pi\tau k\nu_e)}{\pi\tau k\nu_e} \cdot \delta(\nu - k\nu_e)\right],$

ou encore :

$X_e\,(\nu) = \tau \cdot \nu_e \cdot \sum\limits_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{\sin(\pi\tau k\nu_e)}{\pi\tau k\nu_e} \cdot X\,(\nu - k\nu_e) \qquad (8)$

En utilisant la relation (8) on déduit la relation liant le spectre de base du signal échantillonné et celui du spectre réel :

$X_{e0}\,(\nu) = \tau \cdot \nu_e \cdot X(\nu)$

Cette relation exprime une proportionnalité donc une conservation de l'information (pas de deviation).

Echantillonnage régulier ou bloqueur

Chaque impulsion est constante $= x(nT_e)$ (pratique et le plus souvent mis en oeuvre).

Mathématiquement, il s'agit d'une suite de fonctions portes d'amplitudes égales aux échantillons du signal :

$x_e(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(kT_e)\Pi_\tau\,(t - kT_e) = [x(t) \cdot \Psi_{T_e}(t)] * \Pi_\tau(t) = \left[x(t) \cdot \sum\limits_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t - kT_e)\right] * \Pi_\tau(t)$

on en déduit :

$X_e(\nu) = [X(\nu) * (\nu_e \cdot \Psi_{\nu_e}(\nu))] \cdot \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi\tau\nu)}{\pi\tau\nu}\right]$

$X_e(\nu) = \tau \cdot \nu_e \cdot \frac{\sin(\pi\tau\nu)}{\pi\tau\nu} \cdot \sum\limits_{k=-\infty}^{k=+\infty} X(\nu - kT_e) \qquad (9)$

De la même manière le signal initial est extrait par un filtre passe-bas de largeur ν_e.

La relation liant le spectre de base et celui du signal échantillonné (en s'appuyant sur la relation (9)) est :

$X_{e0} = \tau \cdot \nu_e \cdot \frac{\sin(\pi\tau\nu)}{\pi\tau\nu} \cdot X(\nu)$

Echantillonnage moyenneur

On considère ici les échantillons $x_e(kT_e)$ correspondant à la valeur moyenne de $x(t)$ prise sur la durée de l'impulsion τ.

Ainsi l'échantillon x_k s'exprime sous la forme:

$x_k = \frac{1}{\tau} \int\limits_{kT_e-\tau/2}^{kT_e+\tau/2} x(t)dt$

En utilisant la fonction porte, la relation précédente peut s'écrire :
$x_e(kT_e) = \frac{1}{\tau} \cdot \int\limits_{kT_e-\tau/2}^{kT_e+\tau/2} \Pi_\tau(t - kT_e) \cdot x(t) \cdot dt$
Cette expression représente le produit de convolution de $x(t)$ et $\Pi_\tau(t)$ au temps kT_e, d'où :
$x_e(kT_e) = \frac{1}{\tau} \cdot [\Pi_\tau(t) * x(t)] \cdot \delta(t - kT_e)$
Le signal échantilloné complet a pour expression :
$x_e(t) = \frac{1}{\tau} \cdot \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} [\Pi_\tau(t) * x(t)] \cdot \delta(t - kT_e)$
soit:
$x_e(t) = \frac{1}{\tau} \cdot [\Pi_\tau(t) * x(t)] \cdot \Psi_{T_e}(t)$
Par TF et utilisant le th de Plancherel, on peut déduire le spectre $X_e(\nu) = TF\left\{x(t)\right\}_\nu$:
$X_e(\nu) = \frac{1}{\tau} \cdot \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi\tau\nu)}{\pi\tau\nu} \cdot X(\nu)\right] * [\nu_e \cdot \Psi_{\nu_e}(\nu)]$soit :
$$X_e(\nu) = \nu_e \cdot \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\tau(\nu - k\nu_e))}{\pi\tau(\nu - k\nu_e)} \cdot X(\nu - k\nu_e) \qquad (10)$$
De la même manière en s'appuyant sur la relation (10), on a :
$X_{e0} = \nu_e \cdot \frac{\sin(\pi\tau\nu)}{\pi\tau\nu} \cdot X(\nu)$,
résultat très proche de celui de l'échantillonnage régulier. L'amplidute de $X(\nu)$ est modulée par la fonction $sinc(\tau\nu)$ = déformation par rapport à échantillonnage naturel.
Remarque : plus la durée de l'impulsion d'échantillonage est faible devant la période du signal échantillonné, plus le bloqueur et le moyenneur sont plus proche de l'idéal (naturel).

13.3 Quantification

Choisir et remplacer par la valeur arrondie au plus proche voisin ou par défaut les échantillons utiles.
Pour un échantillonnage uniforme on choisit N intervalles identiques de valeur q. On utilise un convertisseur numérique-analogique. Ce processus introduit toujours une erreur appelée bruit de quantification sauf si le signal est de la forme : $x_e(kT_e) = N \cdot q$
L'erreur de quantification est un bruit blanc. Cette erreur provient de la compression ou de l'expansion linéaire et non-lineaire des données.
Soit une erreur que quantification $\varepsilon(t)$, pendant un temps très long θ, on suppose que l'amplitude du signal varie dans une plage plus large que q (pas de quantification) et peut être approximée par une droite :
$\varepsilon(t) = q \cdot \frac{t}{\theta}$ pour $-\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2}$.
La valeur moyenne est nulle sur cet intervalle.

13.3.1 Puissance moyenne

$P_\varepsilon = \frac{1}{\theta}\int\limits_{-\frac{\theta}{2}}^{+\frac{\theta}{2}} \varepsilon^2(t)\cdot dt = \frac{1}{\theta}\int\limits_{-\frac{\theta}{2}}^{+\frac{\theta}{2}} \left[q\frac{t}{\theta}\right]^2 \cdot dt = \frac{q^2}{12}$

Variable aléatoire, densité de probabilité $p(\varepsilon)$ constante égale à $\frac{1}{q}$ sur l'intervalle $\left[-\frac{q}{2},+\frac{q}{2}\right]$.

13.3.2 Valeur moyenne quadratique (moment d'ordre 2)

$E_{sp}[\varepsilon^2] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \cdot p(\varepsilon)\cdot d\varepsilon = \frac{1}{q}\int\limits_{-\frac{q}{2}}^{+\frac{q}{2}} \varepsilon^2 \cdot d\varepsilon = \frac{q^2}{12} = P_\varepsilon$

Ce bruit de quantification est une variable stationnaire et ergodique.

Remarque : Processus de quantification = signal + bruit uniforme.

C'est un bruit blanc de largeur spectrale $\left[0,\frac{\nu_e}{2}\right]$.

La densité spectrale est donc : $\frac{q^2}{6\nu_e}$

Exemple : Système de codage sur n bits (valeur maximale de codage 2^n-1)

$s(t) = V_{\max}\cdot\sin(\frac{2\pi}{T}t)$ avec $V_{\max} = \frac{2^n-1}{2}q$

La puissance moyenne de ce signal est :

$P_s = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s^2(t)dt = \frac{V_{\max}^2}{2}$. En supposant n très grand ($2^n \gg 1$) alors, $P_s \approx 2^{2n-3}\cdot q^2$.

FILTRAGE

14 Systèmes de Transmission et Filtres

14.1 Définitions et Propriétés

Un système de transmission (ST) fait correspondre à un signal d'entrée $e(t)$ un signal de sortie $s(t)$ reponse du système de transmission.

14.1.1 Définitions

Le ≪bel≫ est le logarithme décimal du rapport $\frac{s(t)}{e(t)}$. Dans la pratique, on utilise le décibel :
$\mathrm{A}_{db} = 10\log\left(\frac{s(t)}{e(t)}\right)$.
Pour un appareil Hi-Fi (un amplificateur par exemple), on utilse la même expression, mais, avec les puissances d'entrée et de sortie :
$\mathrm{A}_{db} = 10\log\left(\frac{P_s}{P_e}\right) = 10\log\left(\frac{\frac{V_s^2}{R_s}}{\frac{V_e^2}{R_e}}\right)$
si $R_s = R_e$, on a :
$\mathrm{A}_{db} = 10\log\left[\left(\frac{V_s}{V_e}\right)^2\right] = 20\log\left(\frac{V_s}{V_e}\right)$, ce qui correspond aussi au gain en puissance de l'appareil.

14.1.2 Bande Passante

L'étude de la fonction $P_s = P_s(\nu)$ sur une résistance de charge constante permet de passer par sa valeur maximale $P_{s_{max}}$ à une fréquence donnée.
On appelle bande passante d'un système de Transmission, la zone de fréquences pour lesquelles on a : $\frac{P_s}{P_{s_{max}}} \geq 0.5$ ou $A_{db} \geq -3db$.

14.2 Filtres analogiques

filtrage ≡ domaine fréquentiel.
fenêtrage ≡ domaine temporel.
Le fenêtrage consiste à prelever, interrompre ou seulement atténuer un signal.

Un filtre est défini comme la réponse impulsionnelle notée $h(t)$, et par sa fonction transfert notée $H(f)$ (ou $H(p)$ resp.) transformée de (Fourier ou Laplace resp.) de $h(t)$.

14.2.1 Filtre fréquentiel

Cas classique :
Filtre passe-bande : seules sont transmises les fréquences comprises dans l'intervalle $[\nu_0 - \Delta\nu, \nu_0 + \Delta\nu]$
Filtre coupe-bande : on arrête les fréquences comprises dans l'intervalle $[\nu_0 - \Delta\nu, \nu_0 + \Delta\nu]$
En pratique :
Pour un $x(t)$ donné, on peut représenter $X(\nu)$ qui est la TF du signal $x(t)$ et on filtre en multipliant $X(\nu)$ par $H(\nu)$.
En vertu du théorème de Plancherel, on passe du produit simple dans l'espace des fréquences au produit de convolution dans l'espace temporel et inversement.
$X_s(\nu) = X(\nu).\ H(\nu)$ où $X_s(\nu)$ est le signal filtré. On a :
$x_s(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$.
$h(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre.

14.2.2 Relation Filtrage-Convolution

Filtrage temporel = convolution fréquencielle
Filtrage fréquentiel = convolution temporelle
L'appareil le plus perfectionné va transmettre les fréquences comprise dans la bande $[0, F_M]$ et arrêtera les fréquences supérieures à F_M en un laps de temps.

14.2.3 Filtres linéaires physiquement

La causalité
L'effet (sortie du filtre) ne peut précéder la cause (entrée du filtre).
La réponse impulsionnelle d'un filtre est la réponse à une impulsion de Dirac appliquée à $t = 0$; elle doit être nulle pour $t < 0$.
Tout système physique doit avoir : $h(t) = 0$ pour $t < 0$.
Pour un filtre causal : $x_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$. Un filtre non causal devra utiliser des valeurs futures de signaux d'entrée ce qui n'est pas évident, ou soit ceci est possible en travaillant en temps différé.
Déphasage des filtres
Soit h(t) la réponse implusionnelle d'un filtre, son gain complexe est :
$H(\nu) = TF\,[h(t)] = ReH(\nu) + jImH(\nu) = |H(\nu)|\,e^{j\varphi(\nu)}$
La relation sortie-entrée du filtre s'écrit, en fréquence, sous la forme : $X_s(\nu) = |H(\nu)|\,e^{j\varphi(\nu)}X(\nu)$, et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée est la phase ou l'argument $\varphi(\nu)$ du filtre.

Remarque : Si $\varphi(\nu) = 0$ (gain réel), la réponse implusionnelle est paire.
Pour un filtre causal, on a : $\varphi(\nu) \neq 0$.

15 Filtres Analogiques

15.1 Filtres analogiques continus réalisables

Les filtres réalisés et appliqués sur des signaux à temps continu (non échantillonnés) sont constitués par des composants électroniques (Résistances, Capacités et Self, Amplificateurs Opérationnels, niodes ...).
Le spectre $S(\nu)$ du signal de sortie $s(t)$ est le produit du spectre $E(\nu)$ du signal de d'entrée $e(t)$ avec la fonction de transfert fréquentielle du filtre $H(\nu)$:
$S(\nu) = E(\nu) \cdot H(\nu)$

15.2 Fonction de tranfert

Par application du théorème de Plancherel, on passe à la représentation temporelle :
$S(\nu) = E(\nu).H(\nu) \xleftrightarrow{TF} s(t) = e(t) * h(t)$
$h(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre, $H(\nu)$ ou $H(p)$ (TF ou TL) est sa fonction de transfert.
on peut remplacer n filtres en série par un seul filtre de reponse impulsionnelle $h(t)$ qui s'exprime sous la forme : $h(t) = h_1(t) * h_2(t) * ... * h_n(t)$.
La fonction de transfert équivalente s'écrit :
$H(\nu) = H_1(\nu) \cdot H_2(\nu) \cdot ... \cdot H_n(\nu)$.
L'entrée et la sortie sont des signaux temporels. Le signal d'entrée e(t) et de sortie s(t) sont reliés par des relations intégro-différentielles linéaires à coefficients constants.
En utilisant la Transformée de Laplace, cette relation conduit à une fonction de transfert ou au gain complexe ; quotient de 2 polynômes en p : $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$
La fonction de transfert du filtre analogique continue est définie à partir d'une association des 4 fonctions de transfert suivantes :
$H_1(\nu) = \frac{1}{1+2\pi j\nu\tau}$ filtre passe-bas du premier ordre ou $H_1(p) = \frac{1}{1+\tau p}$
$H_2(\nu) = \frac{2\pi j\nu\tau}{1+2\pi j\nu\tau}$ filtre passe-haut du premier ordre ou $H_2(p) = \frac{\tau p}{1+\tau p}$
$H_3(\nu) = \frac{1}{1+4\pi\xi j\nu\tau-4\pi^2\tau^2\nu^2}$ filtre passe-bas du deuxième ordre ou $H_3(p) = \frac{1}{1+2\cdot\xi\cdot\tau\cdot p+(\tau\cdot p)^2}$
$H_4(\nu) = \frac{4\pi^2\tau^2\nu^2}{1+4\pi\xi j\nu\tau-4\pi^2\tau^2\nu^2}$ filtre passe-haut du deuxième ordre ou $H_4(p) = \frac{(\tau\cdot p)^2}{1+2\cdot\xi\cdot\tau\cdot p+(\tau\cdot p)^2}$
ξ est le coefficient d'amortissement, τ est le temps de réponse.

15.3 Filtres à déphasage linéaire

Filtre à réponse non causal $h_1(t)$ sans déphasage; $h_1(t)$ est linéaire symétrique par rapport à l'origine.
Supposons que $h_1(t)$ est aussi à support borné$[-\theta_0, \theta_0]$, considérons alors le filtre dont la réponse impulsionnelle serait déduite de $h_1(t)$ par translation ; on a :
$h(t) = h_1(t - \theta_0)$ et $H(\nu) = H_1(\nu)e^{-2\pi j\nu\theta_0}$.
Puisque $h_1(t)$ est réel paire alors $H_1(\nu)$ est aussi réel paire. Le déphasage de $H(\nu)$ est alors $\varphi(\nu) = -2\pi\nu\theta_0$ (fonction linéaire de la fréquence).

15.4 Filtres Particuliers

Filtre de Butterworth :
$|H(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2(\nu)^{2n}}}$
Filtre de Tchebychev :
$|H(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(\nu)}}$ avec $C_n(\nu)$ tel que :
$C_0(1) \ = \ 1, \ C_1(\nu) = \nu$ et $C_{n+1}(\nu) = 2\nu \cdot C_n(\nu) - C_{n-1}(\nu)$
Filtre de Legendre :
$|H(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 L_n(\nu^2)}}$ où $L_n(\nu)$ désigne le polynome de Légendre en ν.

15.5 Modélisation des filtres analogiques

La tension aux bornes de chaque élément du circuit et sa TL s'écrivent :
$u(t) = Ri(t) \quad \Rightarrow \quad Z_R(p) = R$
$u(t) = \frac{1}{C}\int^t i(t)dt \quad \Rightarrow \quad Z_c(p) = \frac{1}{pC}$
$u(t) = L\frac{d}{dt}i(t) \quad \Rightarrow \quad Z_L(p) = pL$
en associant ces dipôles dans la réalisation du filtre, et en posant $\tau = RC$, on obtient pour les fonctions de transfert, les relations ci-dessus ou leurs combinaisons. Pour les montages spécifiques, veuillez consulter le formulaire.

16 Filtres Numériques

16.1 Définition

On appelle filtre numérique un système utilisé pour modifier la distribution fréquentielle d'un signal numérique d'entrée en le transformant en un signal numérique désiré en sortie.
Avec le progrès en informatique les filtres numériques sont caractérisés par leur : précision, fiabilité, stabilité, adaptabilité et facilité de commande.
En fait, ce filtre relie la sortie $y(kTe) = y_k$ à l'entrée $x(kTe) = x_k$ à chaque instant kTe, T_e

étant la période d'échantillonnage.
$y_k = Fonction(x_k, x_{k-1}, ..., y_{k-1}, y_{k-2}, ...)$

16.2 Filtrage linéaire

Considérons un filtre numérique excité par une entrée $x(n)$, et soit $y(n)$, la sortie. L'équation aux différences reliant la sortie et l'entrée est :
$y(n) + \sum\limits_{k=1}^{P} a_k y(n-k) = \sum\limits_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \qquad (11)$
$x(n) \rightarrow$ Filtre Numérique $\rightarrow y(n)$
Le filtre présenté ici est causal : il construit à l'instant n, le signal $y(n)$, à partir des P sorties passées et des M+1 entrées contemporaines et passées. Comme pour les filtres analogiques, la sortie d'un filtre numérique est le produit de convolution de l'entrée par sa réponse impulsionnelle $h(n)$.
$y(n) = h(n) * x(n)$
$y(n) = \sum\limits_{p} h(n-p)x(p) = \sum\limits_{p} h(p)x(n-p)$
La représentation fréquentielle est donnée pour les signaux échantillonnés, par la transformation en Z.

16.2.1 Transformée en Z

Définition
La transformé en Z peut être considéré comme une généralisation de la transformation de Fourier à laquelle elle peut s'identifier dans des cas particuliers. La transformée en Z constitue l'outil privilégie pour l'étude des systèmes discrets. Elle joue un rôle équivalent à celui de la transformée de Laplace et permet de représenter un signal possédant une infinité d'échantillons par un ensemble fini de nombres. Elle est définie pour un signal échantillonné $x(n)$ par :
$X(z)$=TZ[$x(n)$]= $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$
Lien avec la transformée de Fourier
Si on pose $z= re^{j2\pi\nu}$, on a :
X(z)=X($re^{j2\pi\nu}$)= $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(re^{j2\pi\nu})^{-n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)r^{-n}e^{-j2\pi\nu n}$
Pour $|r| = 1$, on a : $X(z) = X(\nu)$= $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi\nu n}$, qui est la définition de la transformée de Fourier discrète.

16.2.2 TZ et Plancherel

$H(z) = TZ\{h(n)\}$
$X(z) = TZ\{x(n)\}$
$Y(z) = TZ\{y(n)\}$
La relation entrée-sortie va s'écrire alors :
$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$
en prenant la TZ de la relation (11) on a:
$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_0^M b_k z^{-k}}{1+\sum_1^P a_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)}$
Le gain complexe en Z d'un filtre numérique est une fraction rationnelle en z (ou z^{-1}).
Les zéros de N(z) sont les zéros du filtre, les zéros de D(z) sont les pôles du filtre.
En appelant z_{oj} les zéros et z_{pi} les pôles, on a :
$H(z) = K \cdot z^{P-M} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{M}(z-z_{0j})}{\prod_{i=1}^{P}(z-z_{pi})}$, z^{P-M} est un retard pur, K est un facteur d'échelle.
Un filtre numérique est donc décrit à un retard et à un facteur d'échelle près, par la connaissance de ses zéros et ses pôles.

16.3 Classification des filtres numériques

On les classe en fonction des zéros et des pôles.

16.3.1 Filtres non récursifs

$y_k = \sum_{i=0}^{M} a_i x_{k-i}$ Tous les b_i sont nuls

16.3.2 Filtres récursifs

$y_k = \sum_{i=0}^{M} a_i x_{k-i} - \sum_{j=1}^{M} b_j y_{k-j}$ au moins un des b_i est non nul (filtre possédant une boucle de contre-réaction).

16.3.3 Filtres MA ou RIF

Les filtres à moyenne ajustée (MA) ou filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) ne possèdent que des zéros (et un pôle multiple en $z = 0$). La relation d'entrée-sortie est :
$y_n = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$.
Ces filtres réalisent une moyenne (lissage) de M+1 entrées. Leur réponse implusionnelle est telle que :

$h(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ b_k \text{ si } 0 \leq n \leq M \\ 0\text{si } n > M \end{cases}$; d'où la dénomination de filtre à réponse impulsionnelle finie. Le gain complexe en Z est :

$H(z) = \sum\limits_0^M b_k z^{-k} = \frac{\sum\limits_0^M b_k z^{M-k}}{z^M} = \frac{N(z)}{z^M}$. Les zéros sont les M racines de $N(z)$.

16.3.4 Filtres AR ou RII

Les filtres autoregressifs (AR) ou les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) ne possèdent que des pôles, et un zéro multiple en $z = 0$. La relation sortie-entrée de ces filtres est :

$y(n) = -\sum\limits_1^P a_k y(n-k) + x(n)$.

La sortie à l'instant n est une combinaison linéaire des sorties précédentes (d'où leur dénomination de filtres autoregressifs) à laquelle s'ajoute l'entrée à l'instant n. Ce sont des filtres prédicteurs. Le gain complexe de ces filtres s'exprime sous la forme :

$H(z) = \frac{z^P}{z^P + \sum\limits_1^P a_k z^{P-k}} = \frac{z^P}{D(z)}$.

Les pôles z_{pj} sont les zéros de $D(z)$.

La reponse impulsionnelle de ces filtres est une combinaison linéaire de termes de la forme :

$h_j(n) = u(n) \cdot z_{pj}^n \quad \text{avec} \quad u(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n > 1 \end{cases}$

Cette réponse impulsionnelle est de durée infinie. On voit également que le filtre est stable si le module de tous les pôles est inférieur à l'unité.

16.3.5 Filtres numériques élémentaires

Le gain complexe en Z d'un filtre numérique est une fraction rationnelle que l'on peut décomposer en élément simples qui sont, comme pour les filtres analogiques : *Les filtre du 1er ordre*:

$H_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$

Filtre AR1 :

$y(n) - ay(n-1) = x(n)$

C'est un filtre passe-bas pour : $0 \leq a < 1$; sa réponse impulsionnelle est de la forme : $h(n) = u(n)a^n$.

Il est donc équivalent à un filtre intégrateur (filtre RC) de constante de temps $\tau_R = \frac{T_E}{-\ln a}$.

C'est un filtre passe-haut pour : $-1 \leq a \leq 0$.

Filtre du 2ème ordre :

$H_2(z) = \frac{1}{1-2\rho\nu z^{-1}+\rho^2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-2\rho\nu z+\rho^2}$

Le discriminant du dénominateur est : $\Delta' = \rho^2(\nu^2 - 1)$.

Les pôles sont alors :

$z_1 = \rho\left(\nu + \sqrt{\nu^2 - 1}\right) \quad z_2 = \rho\left(\nu - \sqrt{\nu^2 - 1}\right)$
Pour $0 < \rho < 1$, $\nu > 1$, $|z_1| < 1$ et $|z_2| < 1$, filtre passe-bas du 2ème ordre.
Pour $-1 < \rho < 0$, $\nu > 1$, $|z_1| < 1$ et $|z_2| < 1$, filtre passe-haut du 2ème ordre.
Pour $0 < \rho < 1$ et $|\nu| < 1$, en posant $\nu = \cos\theta$,les pôles sont : $z_{1,2} = \rho e^{\pm j\theta}$ donnant un filtre résonnant.
Ce sont des filtre AR2 définis par la relation d'entrée-sortie sous la forme :
$y(n) = 2\rho y(n-1) - \rho^2 y(n-2) + x(n)$

16.4 Conception d'un filtre numérique

Pour construire un filtre numérique, il suffit de déterminer les coefficients a_k et b_k intervenant dans les équations aux différence reliant l'entrée et la sortie. On peut dans des cas simples utiliser les filtres élémentaires décrits précédemment, en adaptant les paramètres selon le but désiré.

16.5 Restitution

$\{x_k\} \rightarrow x(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \delta(t - kT_e)$ Interpolation linéaire-Restitution par bloqueur-Transformation $H(p)$ ou $H(z)$ en inverse. Blocage impulsionnel + intégrateur d'entrée

FIN