

Transferts de matière.....

Objectifs du cours : acquérir des compétences pour...

- déterminer les conditions de fonctionnement nominales d'une installation (débits, rendements, concentrations, pureté,...)**
- dimensionner les installations**
- pour cela, développer des approches globales (analyse dimensionnelle, bilans globaux, corrélations) ou détaillées (bilans locaux, profils de concentration)**

Généralités sur les transferts de matière

Deux types de phénomènes de transfert de matière:

Diffusion



Phénomène moléculaire

Phénomène relatif à considérer par rapport au mouvement d'ensemble (barycentrique) du système

Loi de Fick : relation linéaire flux de diffusion – gradient de concentration

Convection



Implique un transport macroscopique de matière (écoulement)

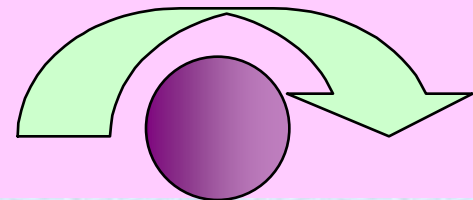
A travers une surface :



$$\mathcal{N}_A = \rho_A \mathcal{F}_{in} - (\rho_A \mathcal{F}_{out})$$

Le long d'une surface :

$$\mathcal{N}_A = h(x_{ext} - x_{out})$$



Généralités sur les transferts de matière (suite)

Comparaison avec les transferts thermiques

Similitudes

- ❖ transferts par **diffusion** et **convection**
- ❖ loi **linéaire** de transfert **conductif**
- ❖ **analogies entre corrélations** (transferts interfaciaux)

Différences

- ❖ **dualité masse – quantité de matière** (moles) \Rightarrow difficulté
- ❖ loi **linéaire de diffusion** (Fick) **inadaptée** aux cas complexes
- ❖ **équilibre interfacial** plus **complexe** que équilibre thermique
- ❖ le transfert de matière peut résulter en la **mobilité de l'interface**
- ❖ la **diffusivité** (coefficient de diffusion) est beaucoup **plus faible** que la **diffusivité thermique** : *pénétration beaucoup plus faible*

Généralités sur les transferts de matière (suite)

Composition : deux systèmes de description

Massique

Masse du constituant i : m_i

Concentration massique : ρ_i

Fraction massique : ε_i

Vitesse moyenne : $v = \frac{\sum_i \rho_i v_i}{\sum_i \rho_i} = \sum_i \varepsilon_i v_i$

Vitesse de diffusion : $v_i - v$

Flux global massique : $N_i = \rho_i v_i$

Flux de diffusion : $J_i = \rho_i (v_i - v)$

Molaire

Q^{té} de matière du constituant i : n_i

Concentration molaire : c_i

Fraction molaire : x_i

Vitesse moyenne : $v^* = \frac{\sum_i c_i v_i}{\sum_i c_i} = \sum_i x_i v_i$

Vitesse de diffusion : $v_i - v^*$

Flux global molaire : N_i^*

Flux de diffusion : $J_i^* = c_i (v_i - v^*)$

Relations entre flux

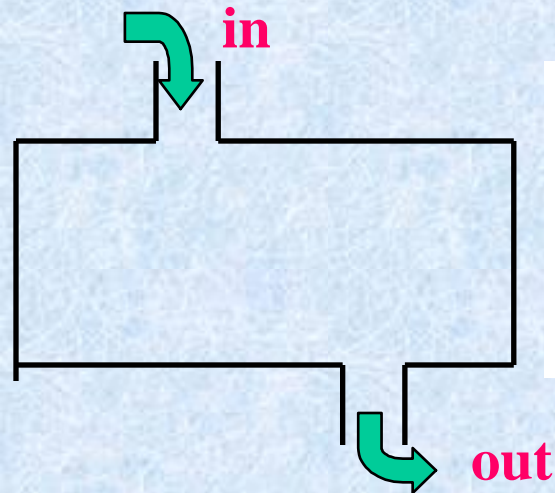
$$\sum_i J_i^* = 0 \quad \sum_i J_i = 0$$

$$N_i = J_i + \varepsilon_i \sum_j N_j$$

$$N_i^* = J_i^* + x_i \sum_j N_j^*$$

Bilans matière

Pour un système de volume V : $m_i = V \overline{\rho_i}$ $n_i = V \overline{c_i}$



\mathcal{W}_{in} (\mathcal{W}_{out}) : débit volumique d'entrée (sortie)

\mathcal{W}_{ip} (\mathcal{W}_{ip}^*): débit volumique(entrée) à travers les parois

\mathcal{R}_i (\mathcal{R}_i^*) création nette de i dans le système (réactions)

Bilan matière global

$$\frac{dm_i}{dt} = \overline{\rho_i}_{in} \mathcal{W}_{in} - \overline{\rho_i}_{out} \mathcal{W}_{out} + \mathcal{W}_{ip} + \mathcal{R}_i$$

$$\frac{dn_i}{dt} = \overline{c_i}_{in} \mathcal{W}_{in} - \overline{c_i}_{out} \mathcal{W}_{out} + \mathcal{W}_{ip}^* + \mathcal{R}_i^*$$

Bilan matière (suite)

Expressions générales du bilan matière local (rappel)

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = M_i \sum_r \nu_i^r w_r - \nabla \cdot N_i$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = \sum_r \nu_i^r w_r - \nabla \cdot N_i^*$$

w_r : vitesse de réaction (en mol./temps/volume)

M_i : masse molaire de i

ν_i^r : coefficient stœchiométrique algébrique

Transferts thermiques par diffusion (rappels)

Diverses expressions de la loi de Fick dans un milieu binaire A B :

$$J_A = -(\rho_A + \rho_B) \mathcal{D}_{AB} \nabla \varepsilon_A$$

$$J_B = -(\rho_A + \rho_B) \mathcal{D}_{AB} \nabla \varepsilon_B$$

$$J_A^* = -(c_A + c_B) \mathcal{D}_{AB} \nabla x_A$$

$$J_B^* = -(c_A + c_B) \mathcal{D}_{AB} \nabla x_B$$

Un seul coefficient de diffusion : \mathcal{D}_{AB}

Valeurs typiques de \mathcal{D}_{AB}

A et B gaz : 20°C : $\mathcal{D}_{AB} = 1 \text{ à } 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$; (valeurs plus élevées si A ou B = H_2)

A et B liquides : 20°C : $\mathcal{D}_{AB} = 0,2 \text{ à } 2 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$

Gaz dans solide : 20°C : $\mathcal{D}_{AB} = 10^{-12} \text{ à } 10^{-14} \text{ m}^2/\text{s}$ augmente beaucoup avec T

Solide dans solide : 20°C : $\mathcal{D}_{AB} = 10^{-34} \text{ à } 10^{-19} \text{ m}^2/\text{s}$ augmente beaucoup avec T

Existence de formules semi-empiriques

Transferts de matière par diffusion

Problème typique de diffusion de matière

≡ Détermination du profil de concentration dans un milieu binaire

Forme générale de l'équation aux dérivées partielles de bilan (cas molaire)

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = \sum_r \nu_A^r w_r - \nabla \cdot N_A^*$$

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = \sum_r \nu_A^r w_r - \nabla \cdot [J_A^* + x_A(N_A^* + N_B^*)] = \sum_r \nu_A^r w_r - \nabla \cdot \left[-\mathcal{D}_{AB}(c_A + c_B) \nabla x_A + x_A(N_A^* + N_B^*) \right]$$

Deux cas extrêmes importants

$N_A^* + N_B^* = 0$ Diffusion équimolaire ou milieu immobile

$N_B^* = 0$ Diffusion de A dans B stagnant

Conditions aux limites usuelles

Dirichlet : C_A (C_B) = constante (contact avec milieu infini ; équilibre,...)

Neuman : $N_A^* = 0$ ou $N_B^* = 0$ paroi imperméable

Robin: $J_i^* = h_m(x_A^{ext} - x_A^\Omega)$ loi de transfert interfacial

Problèmes stationnaires de diffusion de matière à coefficient de diffusion constant

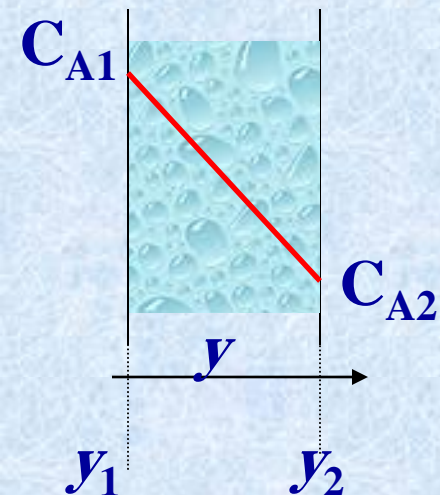
Systèmes non réactifs : $w_r = 0$

$$0 = \nabla \cdot \left[-\mathcal{D}_{AB} (c_A + c_B) \nabla x_A + x_A (N_A^* + N_B^*) \right]$$

1^{er} cas : Diffusion équimolaire et concentration totale constante :

$$N_A^* + N_B^* = 0 \quad c_A + c_B = c \quad \Rightarrow \quad 0 = \nabla \cdot \left[(c_A + c_B) \nabla x_A \right] = \nabla^2 c_A = \nabla^2 c_B$$

En géométrie plane à une dimension avec conditions aux limites constantes



$$\frac{c_A - c_{A1}}{c_{A2} - c_{A1}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$J_A^* = - \mathcal{D}_{AB} \frac{c_{A2} - c_{A1}}{y_2 - y_1}$$

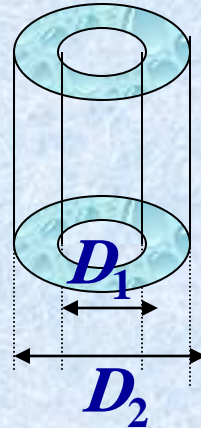
Problèmes stationnaires de diffusion de matière

Systèmes non réactifs

Diffusion équimolaire et concentration totale constante (suite)

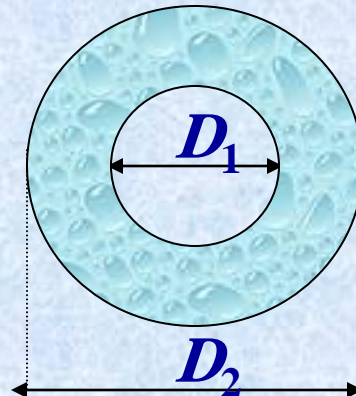
En géométrie cylindrique avec conditions aux limites constantes

$$J_A^* = - \mathcal{D}_{AB} 2\pi \frac{c_{A1} - c_{A2}}{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}$$



En géométrie sphérique avec conditions aux limites constantes

$$J_A^* = - \mathcal{D}_{AB} 2\pi \frac{D_1 D_2}{D_2 - D_1} (c_{A1} - c_{A2})$$



Problèmes stationnaires de diffusion de matière

Systèmes non réactifs

2^{ème} cas : Diffusion de A dans B stagnant

$$\left. \begin{array}{l} N_B^* = 0 \\ N_A^* = J_A^* + x_A(N_A^* + N_B^*) \end{array} \right\} \Rightarrow N_A^* = J_A^* + x_A N_A^* \Rightarrow (1-x_A)N_A^* = -\mathcal{D}_{AB} c \nabla x_A$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = \sum_r \nu_A^r w_r - \nabla \cdot N_A^* \Rightarrow 0 = -\nabla \cdot N_A^* \Rightarrow N_A^* = \text{constante} \Rightarrow \frac{N_A^*}{\mathcal{D}_{AB} c} = - \frac{\nabla x_A}{(1-x_A)}$$

En géométrie plane à une dimension avec conditions aux limites constantes

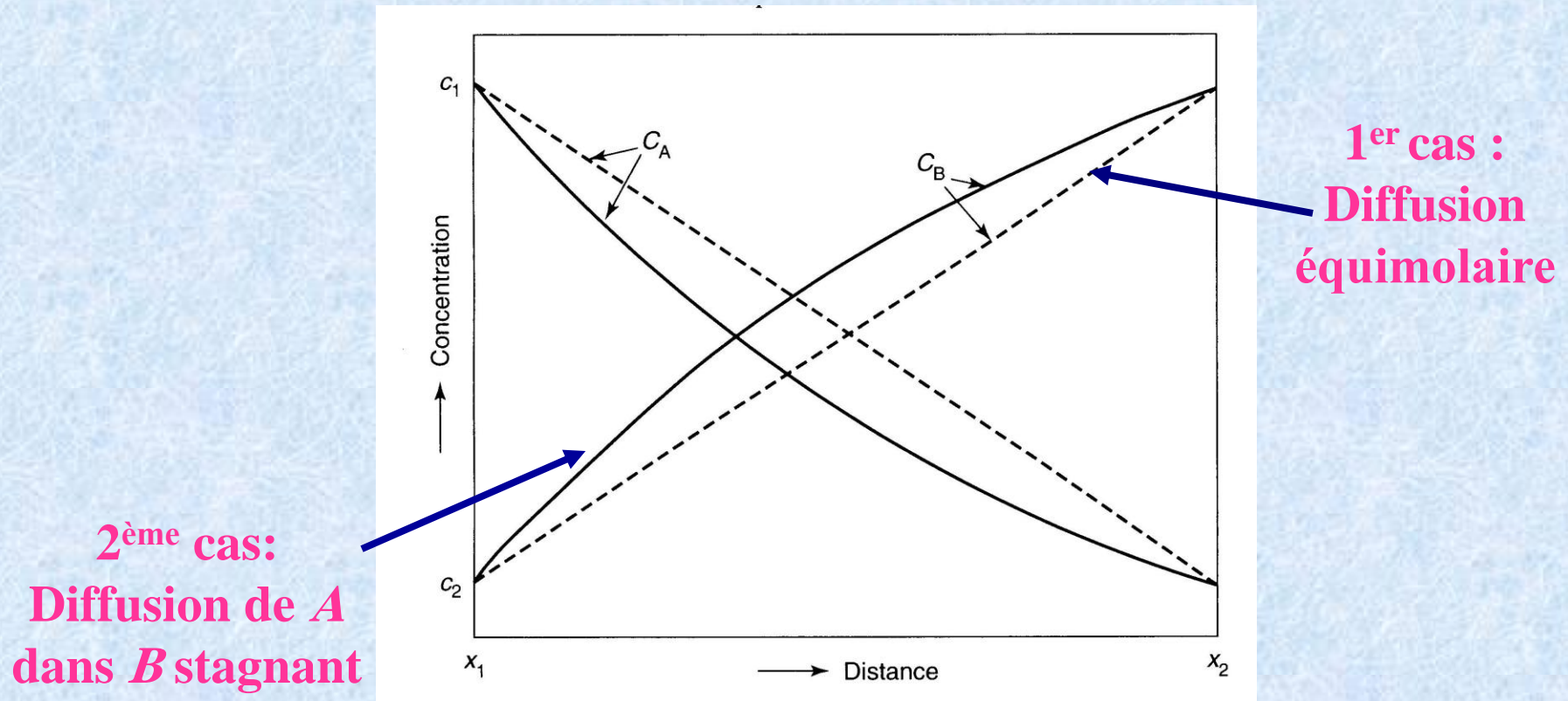
$$\frac{N_A^* dy}{\mathcal{D}_{AB} c} = - \frac{dc_A}{(c-c_A)} \Rightarrow \frac{c-c_A}{c-c_{A1}} = \left(\frac{c-c_{A2}}{c-c_{A1}} \right)^{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}} \Rightarrow N_A^* = - \frac{\mathcal{D}_{AB} c}{y_2-y_1} \ln \left(\frac{c-c_{A2}}{c-c_{A1}} \right)$$

$$\text{Si } c \gg c_A \quad N_A^* \approx \frac{\mathcal{D}_{AB} c}{y_2-y_1} \left(\frac{c_{A2}-c_{A1}}{c} \right) \equiv \text{expression trouvée au cas n°1}$$

Problèmes stationnaires de diffusion de matière

Systèmes non réactifs

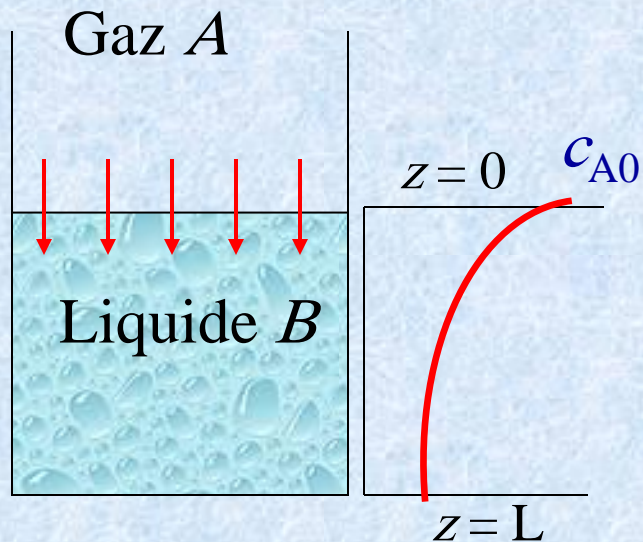
Comparaison des deux cas extrêmes en géométrie plane à une dimension et conditions aux limites constantes



Problèmes stationnaires de diffusion de matière

Système réactif (une réaction chimique)

Exemple 1 : Diffusion avec réaction chimique homogène



Réaction d'**absorption** du gaz A dans le liquide B
 $A + B = AB$ ($w = kc_A$)

A passe en solution dans B où il diffuse et réagit
Calculer la quantité de A absorbée grâce à ce dispositif

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = \sum_r \nu_A^r w_r - \nabla \cdot N_A^* \quad \Rightarrow \quad 0 = -w - \frac{dN_A^*}{dz}$$

$$0 = -w - \frac{d}{dz} [J_A^* + x_A (N_A^* + N_B^* + N_{AB}^*)]$$

Hypothèse de milieu immobile

Hypothèse de B très prépondérant

$$J_A^* = - (c_A + c_B + c_{AB}) \mathcal{D}_{AB} \frac{dx_A}{dz}$$

$$\Rightarrow -\mathcal{D}_{AB} \frac{d^2 c_A}{dz^2} + k \cdot c_A = 0$$

Problèmes stationnaires de diffusion de matière

Système réactif (une réaction chimique)

Exemple 1 : Diffusion avec réaction chimique homogène (suite)

Conditions aux limites :

$$\begin{array}{lll} z=0 & c_A = c_{A0} & (\text{équilibre}) \\ z=L & \frac{dc_A}{dz} = 0 & (\text{paroi étanche}) \end{array}$$

\Rightarrow

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \frac{\cosh\left[\sqrt{\frac{kL^2}{\mathcal{D}_{AB}}}\left(1 - \frac{z}{L}\right)\right]}{\cosh\sqrt{\frac{kL^2}{\mathcal{D}_{AB}}}}$$

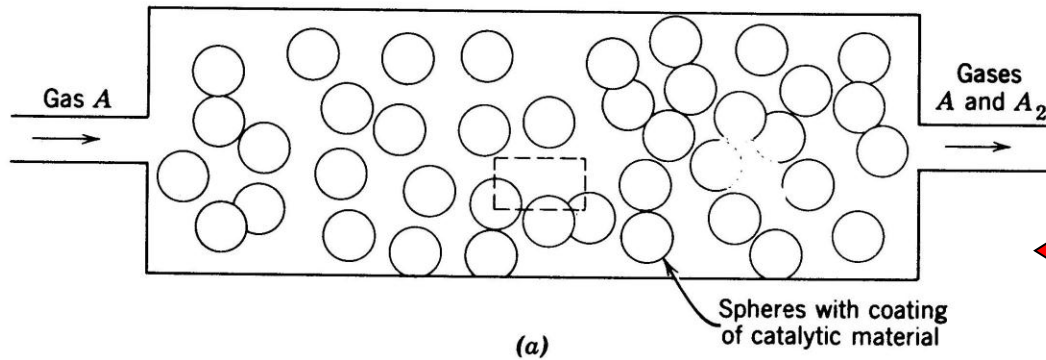
La capacité d'absorption \equiv flux molaire de A en $z = 0$, soit :

$$J_A^* = -\mathcal{D}_{AB} \frac{dc_A}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{\mathcal{D}_{AB} c_{A0}}{L} \sqrt{\frac{kL^2}{\mathcal{D}_{AB}}} \tanh \sqrt{\frac{kL^2}{\mathcal{D}_{AB}}}$$

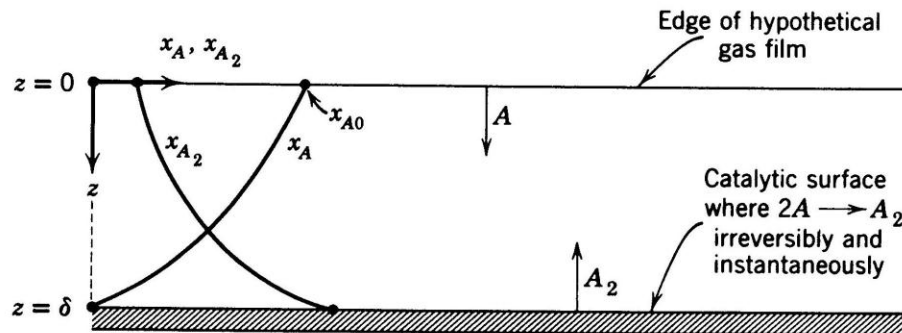
Problèmes stationnaires de diffusion de matière

Système réactif (une réaction chimique)

Exemple 2 : Diffusion avec réaction chimique hétérogène



Situation physique : réacteur catalytique de dimérisation :



Représentation du voisinage de la surface d'une particule de catalyseur

Bilans dans le « gas film »

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = v_i w - \frac{dN_i^*}{dz} \Rightarrow N_{A2}^* \text{ et } N_A^* \text{ indépendants de } z$$

Réaction stœchiométrique à la surface

$$N_{A2}^* = -\frac{1}{2}N_A^*$$

Problèmes stationnaires de diffusion de matière

Système réactif (une réaction chimique)

Diffusion avec réaction chimique hétérogène (suite)

$$\left. \begin{aligned} N_A^* &= J_A^* + x_A(N_A^* + N_{A_2}^*) \\ N_{A_2}^* &= -\frac{1}{2}N_A^* = \text{constante} \\ J_A^* &= -\mathcal{D}_{AA_2} \frac{dc_A}{dz} \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_A^* = -\frac{c\mathcal{D}_{AA_2}}{\left(1 - \frac{x_A}{2}\right)} \frac{dx_A}{dz} \Rightarrow \frac{d}{dz} \left[\frac{c\mathcal{D}_{AA_2}}{\left(1 - \frac{x_A}{2}\right)} \frac{dx_A}{dz} \right] = 0$$

Conditions aux limites : $z = 0, x_A = x_{A0}$; $z = \delta, x_A = 0$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{x_A}{2}\right) = \left(1 - \frac{x_{A0}}{2}\right)^{1 - \frac{z}{\delta}} \Rightarrow N_A^* = \frac{2c\mathcal{D}_{AA_2}}{\delta} \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{x_{A0}}{2}} \right)$$

Quantité de A transformée par unité de temps et unité de surface du catalyseur

Problèmes non stationnaires de diffusion de matière

Type de sujets d'intérêt :

- atteinte de l'état stationnaire : temps d'homogénéisation des concentrations
- comportement dans un environnement de concentration variable

Analogie quasi-complète avec le transfert thermique

- a : diffusivité thermique $\rightarrow \mathcal{D}_{AB}$
- $\rho C_p T$ $\rightarrow c_A$
- Q $\rightarrow J_A^*$

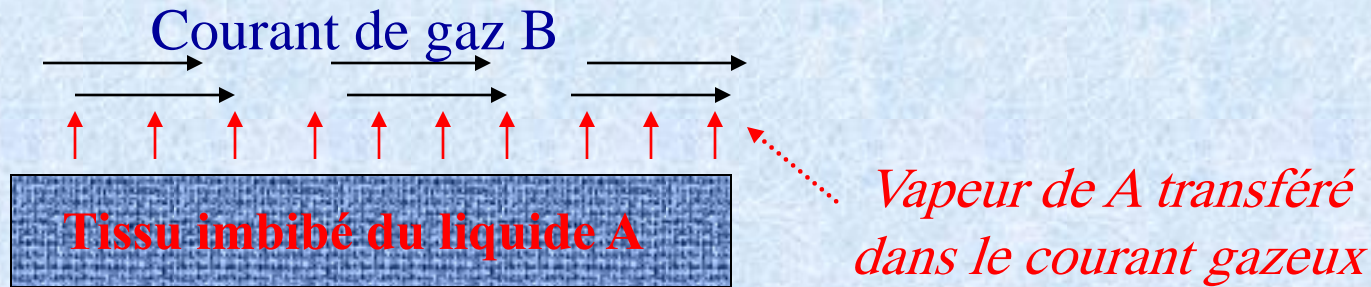
Principaux résultats conservés moyennant les substitutions ci-dessus, par exemple, effets de pénétration :

distance de pénétration : $\delta = \sqrt{\pi \mathcal{D}_{AB} t}$

Flux interfacial : $J_A^* = (c_{Ai} - c_{A0}) \sqrt{\frac{\mathcal{D}_{AB}}{\pi t}}$

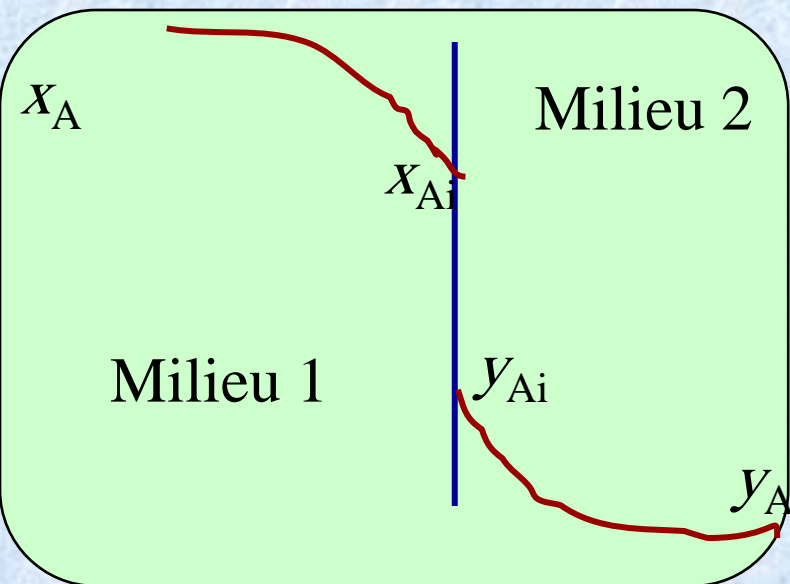
Transferts de matière interfaciaux

Situation : échange de matière entre deux milieux à travers une interface



Un seul flux de matière (stationnarité)

$$J_A^* = h_{m1}(x_A - x_{Ai}) = h_{m2}(y_{Ai} - y_A)$$



h_{m1} et h_{m2} : **coefficients de transfert de matière interfaciaux**

définition mais pas loi physique

*Résistance au transfert négligeable de la zone interfaciale : **équilibre : $y_{Ai} = f(x_{Ai})$***

Transferts de matière interfaciaux

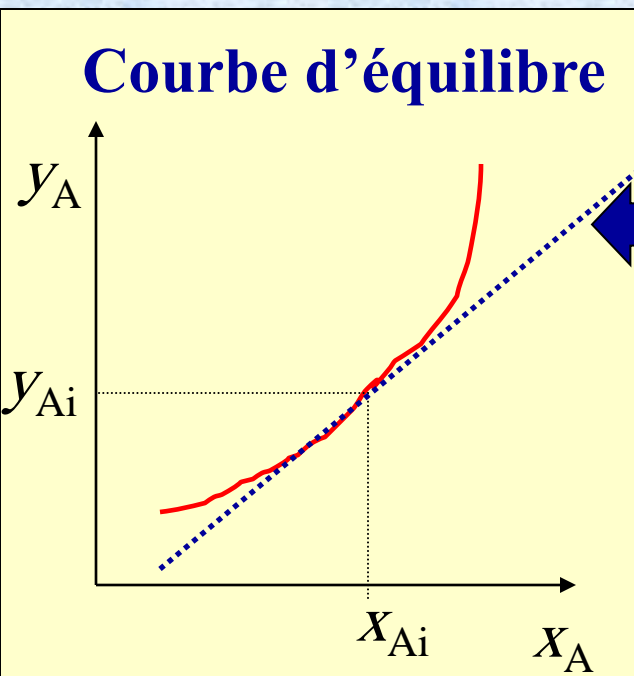
Définition d'un coefficient de transfert global

Par analogie avec le transfert thermique ? $J_A^* = H_m(x_A - y_A)$

FAUX

Exemple : le transfert du dioxygène de l'air à l'eau : $x_A = 0,2$; $y_A = 5 \times 10^{-5}$

La force motrice du transfert n'est pas : $(x_A - y_A)$, mais ... $x_A - f(x_A)$



Au voisinage de l'équilibre : $y_A - y_{Ai} = m(x_A - x_{Ai})$

$$J_A^* = h_{m1}(x_A - x_{Ai})$$

$$J_A^* = h_{m2}(y_{Ai} - y_A) = h_{m2}m(x_{Ai} - x_A^*)$$

$$\Rightarrow x_A - x_A^* = \left(\frac{1}{h_{m1}} + \frac{1}{mh_{m2}} \right) J_A^*$$

$$\Rightarrow \frac{1}{H_m^I} = \frac{1}{h_{m1}} + \frac{1}{mh_{m2}}$$

avec

$$J_A^* = H_m^I(x_A - x_A^*)$$

Transferts de matière interfaciaux

Définition d'un coefficient de transfert global (suite)

Symétriquement, on définit :

$$J_A^* = H_m^H (y_A^* - y_A)$$

$$\frac{1}{H_m^H} = \frac{1}{h_{m2}} + \frac{m}{h_{m1}}$$

m est calculé à partir de la connaissance de l'équilibre de A entre les deux phases (ex : constante de Henry dans le cas de la dissolution de O_2 dans l'eau

*h_{m1} et h_{m2} calculés au moyen de **corrélations** entre nombres adimensionnels*

Corrélations

Elles dépendent :

- de la géométrie de l'interface

- du type de transfert convectif :

la situation de convection forcée est de loin la plus courante

- de la position relative fluide — paroi :

Transferts de matière interfaciaux

Corrélations (suite)

Analyse dimensionnelle du transfert de matière interfacial

Convection forcée :

Variables :

D	ρ	μ	\mathcal{D}_{AB}	v	h
L	M.L ⁻³	M.L.T ⁻¹	L ² .T ⁻¹	L.T ⁻¹	L ⁻² .T ⁻¹

Théorème de Buckingham : $m = n - r = 3$

Nombres sans dimension :

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} \quad \text{Nombre de Reynolds}$$

$$\text{Sh} = \frac{h D}{c \mathcal{D}_{AB}} \quad \text{Nombre de Sherwood ou de Nusselt massique}$$

$$\text{Sc} = \frac{\mu}{\rho \mathcal{D}_{AB}} \quad \text{Nombre de Schmidt}$$

Forme de la corrélation : $\text{Sh} = f(\text{Re}, \text{Sc})$

Transferts de matière interfaciaux

Corrélations (suite)

Analyse dimensionnelle du transfert de matière interfacial

Convection libre:

Variables :

D	ρ	μ	\mathcal{D}_{AB}	ζ	g	Δx	h
L	M.L ⁻³	M.L.T ⁻¹	L ² .T ⁻¹	–	L.T ⁻²	–	L ⁻² .T ⁻¹

Théorème de Buckingham : $m = n - r = 5$

Nombres sans dimension :

$Sh = \frac{hD}{c\mathcal{D}_{AB}}$ Nombre de Sherwood
ou de Nusselt massique

$Sc = \frac{\mu}{\rho\mathcal{D}_{AB}}$ Nombre de Schmidt

$Gr_m = \frac{D^3 \rho^2 g \zeta \Delta x_A}{\mu^2}$ Nombre de Grashof
massique

ζ : coefficient d'expansion volumétrique

$$\rho_A = \bar{\rho} - \bar{\rho} \zeta (x_A - \bar{x}_A)$$

Forme de la corrélation : $Sh = f(Gr_m, Sc)$

Transferts de matière interfaciaux

Corrélations (suite)

Analogie avec les transferts thermiques interfaciaux

Exemple : transfert autour d'une sphère :

Matière (convection forcée) : $Sh = 2 + 0,60 Re^{\frac{1}{2}} Sc^{\frac{1}{3}}$

Chaleur (convection forcée) : $Nu = 2 + 0,60 Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$

Analogie générale dite de Chilton-Colburn

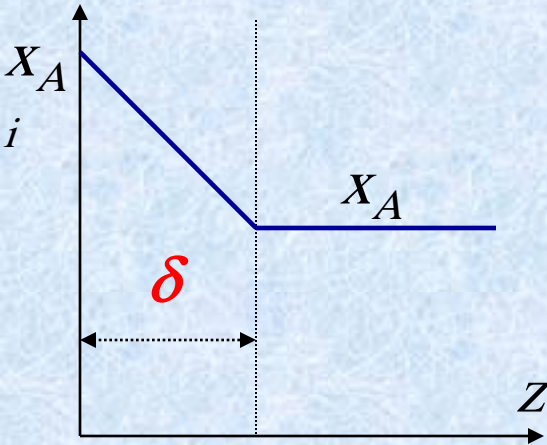
Une abondante bibliographie ... formules, abaques,...

R. B. Bird, W.E. Stewart, E.N. Lightfoot, J.R. Welty, C.E. Wicks, R.E. Wilson, W.J. Beek, K.M. Muttzall, J.W. van Heuven, déjà cités

Transferts de matière interfaciaux

Modèle du film

Hypothèse : le transfert interfacial dans un des milieux est assimilé à un transfert diffusif dans une couche interfaciale d'épaisseur δ



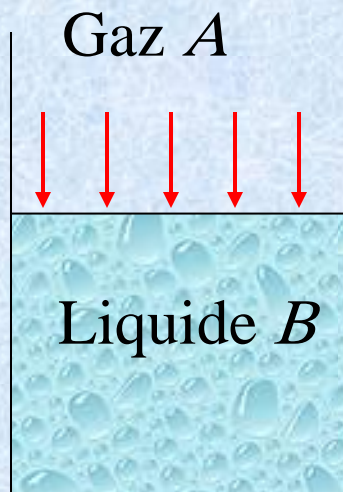
$$J_A^* = \frac{\mathcal{D}_{AB} c (x_A - x_{Ai})}{\delta} = h_m (x_A - x_{Ai})$$



$$h_m = \frac{c \mathcal{D}_{AB}}{\delta}$$

$$Sh = \frac{h_m D}{c \mathcal{D}_{AB}} = \frac{D}{\delta}$$

Application au cas de transfert avec réaction d'ordre 1



$$-\mathcal{D}_{AB} \frac{d^2 c_A}{dz^2} + k \cdot c_A = 0$$

$$h_m = \frac{c \mathcal{D}_{AB}}{\delta}$$

Deux cas extrêmes :

- 1) Réaction très lente
- 2) Réaction très rapide

Transferts de matière interfaciaux

Modèle du film

Application au cas de transfert avec réaction d'ordre 1

1) Réaction très lente

Hypothèse :

réaction négligeable dans le film ; se produit essentiellement dans le volume V
quantité transportée dans le film \gg quantité consommée par la réaction :

$$h_m \cdot x_{Ai} S \gg k \cdot c_{Ai} \cdot \delta \cdot S \quad \text{soit : } h_m x_{Ai} \gg k \cdot c_{Ai} \cdot \frac{c \mathcal{D}_{AB}}{h_m} \Rightarrow \frac{k \mathcal{D}_{AB}}{\left(\frac{h_m}{c}\right)^2} \ll 1$$

$$\sqrt{\frac{k \mathcal{D}_{AB}}{\left(\frac{h_m}{c}\right)^2}} = \text{Ha} \ll 1$$

Nombre de Hatta

$$\text{Stationnarité globale} \Rightarrow N_A^* S = h_m \cdot (x_{Ai} - x_A) S = V \cdot k \cdot c_A \Rightarrow N_A^* = h_m c_{Ai} \frac{V k}{V k + S \cdot h_m}$$

Transferts de matière interfaciaux

Modèle du film

Application au cas de transfert avec réaction d'ordre 1

1) Réaction très rapide

Hypothèse :

La réaction se produit entièrement dans le film

$$-\mathcal{D}_{AB} \frac{d^2 c_A}{dz^2} + k \cdot c_A = 0$$

Conditions aux limites : $c_A = c_{Ai}$ à $z = 0$;
 $c_A = 0$ pour $z = \infty$

$$\Rightarrow h_m = c \sqrt{\mathcal{D}_{AB} k}$$

$$\text{pénétration} = \delta_r \approx - \frac{c_{Ai}}{\frac{dc_{Ai}}{dz}} \approx \sqrt{\frac{\mathcal{D}_{AB}}{k}}$$

$$\text{Épaisseur du film} \quad \delta = \frac{c \mathcal{D}_{AB}}{h_m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_A = c_{Ai} \exp\left(-z \sqrt{\frac{k}{\mathcal{D}_{AB}}}\right) \\ N_A^*|_{z=0} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{dc_A}{dz} = \sqrt{\mathcal{D}_{AB} k} c_{Ai} \end{cases}$$

$$\frac{\delta}{\delta_r} = \sqrt{\frac{k \mathcal{D}_{AB}}{\left(\frac{h_m}{c}\right)^2}} = \text{Ha}$$

Echangeurs de matière

Généralités

Echangeur de matière = appareil dans lequel les deux phases devant échanger un composé A (au moins) sont mises en contact étroit (aire interfaciale importante)

Le **choix et le dimensionnement** des échangeurs dépendent :

- de **l'équilibre thermodynamique** entre les phases

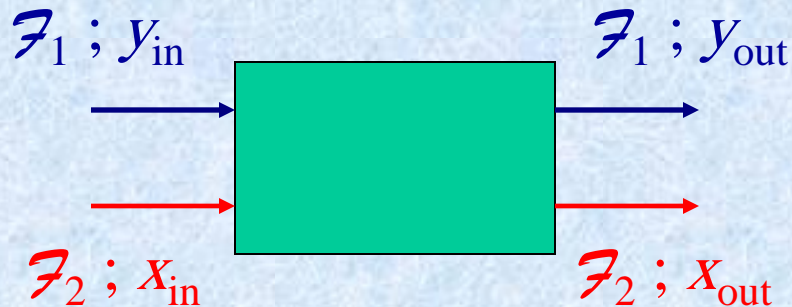
variables : pression, température ; paramètre : **m**

- du **flux de matière échangée**

variables : débits, vitesses d'agitation ; paramètres : **h_m , H_m**

Echangeurs de matière

Efficacité maximale d'un échangeur



Echange « parfait » : $x_{out} = my_{out}$

Bilan : $F_1 c_1 y_{in} + F_2 c_2 x_{in} = F_1 c_1 y_{out} + F_2 c_2 x_{out}$

$$x_{out} = my_{in} \left(\frac{1 + \frac{F_2 c_2 x_{in}}{F_1 c_1 y_{in}}}{1 + m \frac{F_2 c_2}{F_1 c_1}} \right)$$

Exemple : objectif : extraction maximale d'un composé de la phase 1 par la phase 2

Hyp : c_{2in} nul dans la phase extractante

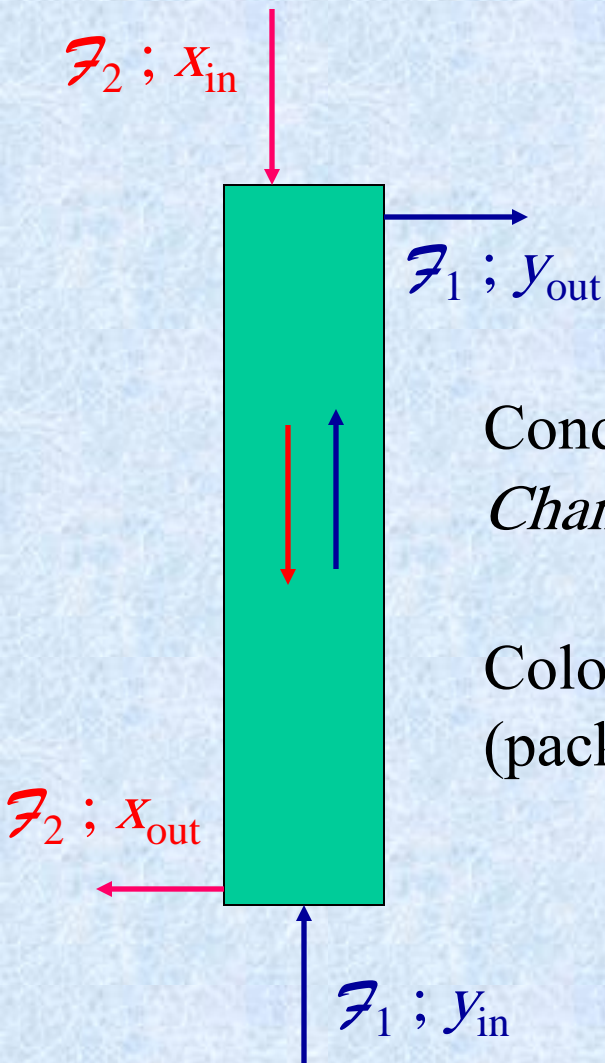
$$x_{out} = my_{in} \left(1 + m \frac{F_2 c_2}{F_1 c_1} \right)^{-1}$$

Critères de l'opérateur \Rightarrow choix des conditions de fonctionnement :

choix de $\alpha = m \frac{F_2 c_2}{F_1 c_1}$ **facteur d'extraction**

Echangeurs de matière

Modélisation d'une colonne d'échange à contre-courant



Par exemple : épuration de la **phase gazeuse 1** par **absorption** d'un de ses composants dans **la phase liquide 2**

Condition d'équilibre d'absorption : $x = m.y$

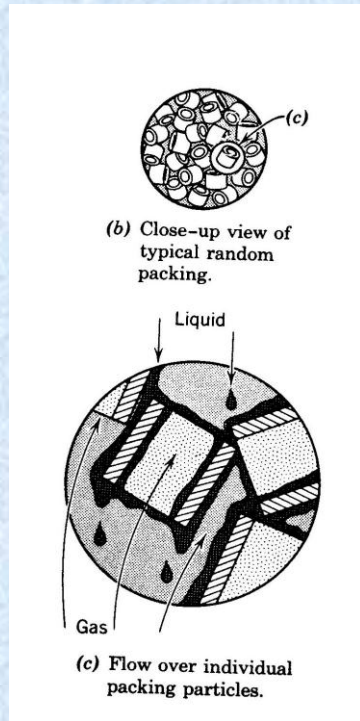
Changement de variable : $x^ = m.y$*

Colonne à contre courant remplie d'un **garnissage** (packing) de surface d'échange a par unité de volume

Problème de dimensionnement (hauteur) de la colonne chargée d'assurer l'échange indiqué

Echangeurs de matière

(exemples de garnissage)



D'après Bird, Stewart, Lihtfoot)



Anneaux de Raschig

Spirales de Wilson



Anneaux de Fenske

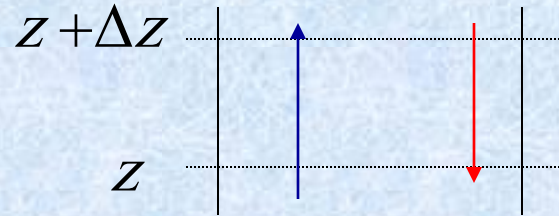
Billes de verre



Echangeurs de matière

Modélisation d'une colonne d'échange à contre-courant (suite)

Bilan stationnaire dans une tranche de hauteur Δz



Phase liquide :

$$0 = \mathcal{F}_2 c_L [x(z+\Delta z) - x(z)] - H_m^{II} (x - x^*) a S \Delta z$$

$$\text{soit : } 0 = |v_2| \frac{dx}{dz} - \frac{H_m^{II}}{c_L} (x - x^*) a$$

Phase gazeuse :

$$0 = \mathcal{F}_1 c_G [y(z) - y(z+\Delta z)] + H_m^{II} (x - x^*) a S \Delta z$$

$$\text{soit : } 0 = -|v_1| \frac{dy}{dz} + \frac{H_m^{II}}{c_G} (x - x^*) a$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dx^*}{dz} &= -\frac{H_m^{II}}{c_G} \frac{m}{|v_1|} (x - x^*) a \\ \frac{dx}{dz} &= \frac{H_m^{II}}{c_L |v_2|} (x - x^*) a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d(x - x^*)}{dz} = \frac{H_m^{II}}{c_L |v_2|} \left(1 - \frac{m c_L |v_2|}{c_G |v_1|} \right) (x - x^*) a$$

$$\Rightarrow \frac{d(x - x^*)}{(x - x^*)} = \frac{H_m^{II} a S}{c_L \mathcal{F}_2} (1 - \alpha) dz \quad \text{avec } \alpha = \frac{m c_L |v_2|}{c_G |v_1|}$$

Echangeurs de matière

Modélisation d'une colonne d'échange à contre-courant (suite)

Intégration de $\frac{d(x-x^*)}{(x-x^*)} = \frac{H_m^{\text{II}} a S}{c_L \mathcal{F}_2} (1-\alpha) dz$ sur la hauteur de la colonne

$$\ln \left(\frac{x_{\text{out}} - x_{\text{in}}^*}{x_{\text{in}} - x_{\text{out}}^*} \right) = \frac{H_m^{\text{II}} a S}{c_L \mathcal{F}_2} (1-\alpha) L \quad \Rightarrow \quad \ln \left(\frac{x_{\text{out}} - x_{\text{in}}^*}{x_{\text{in}} - x_{\text{out}}^*} \right) = \frac{H_m^{\text{II}} a S}{c_L \mathcal{F}_2} (1-\alpha) L$$

$$\text{nombre d'unités de transfert (N.U.T.)} = \ln \left(\frac{x_{\text{out}} - x_{\text{in}}^*}{x_{\text{in}} - x_{\text{out}}^*} \right)$$

$$\text{hauteur de l'unité de transfert} = \frac{c_L \mathcal{F}_2}{H_m^{\text{II}} a S}$$

$$L = \text{N.U.T.} \times \text{H.U.T.} \times (1-\alpha)$$

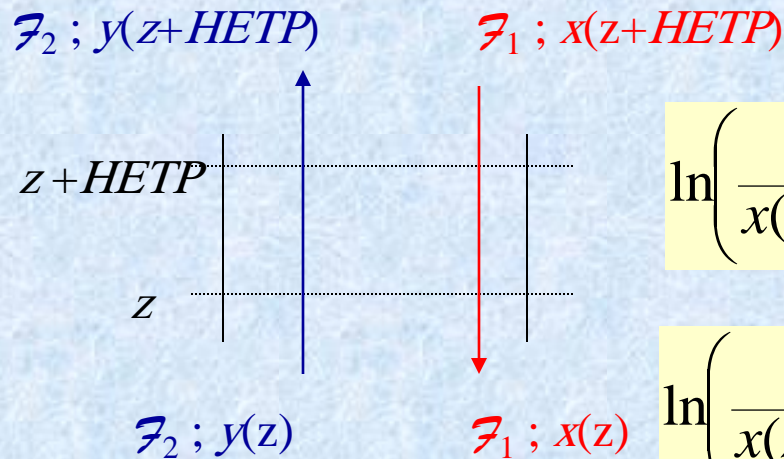
Exemple : H.U.T. = 6 à 60 cm pour anneaux Raschig

Echangeurs de matière

Notion d'échange théorique

Définition : hauteur équivalente de l'étage théorique (HETP)

HETP : hauteur de la colonne dont les flux de sortie sont en équilibre



$$x(z) = m \cdot y(z+HETP)$$

$$\ln \left(\frac{x(z) - x^*(z)}{x(z+HETP) - x^*(z+HETP)} \right) = \frac{H_m^I a S}{c_L \mathcal{F}_2} (1 - \alpha) HETP$$

$$\ln \left(\frac{x(z) - x^*(z)}{x(z+HETP) - x^*(z+HETP)} \right) = \frac{H_m^I a S}{c_L \mathcal{F}_2} (1 - \alpha) HETP$$

$$\ln \left(\frac{x(z) - x^*(z)}{x(z+HETP) - x(z)} \right) = \frac{HETP}{HUT} (1 - \alpha)$$

$$\frac{x(z) - x^*(z)}{x(z+HETP) - x(z)} = \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{HETP}{HUT} = \frac{\ln \alpha}{(1 - \alpha)} \quad \text{Égalité pour } \alpha = 1$$