

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX	Unité d'enseignement : UEF 5.1.1 VHS: 45h00 (cours: 1h30, TD: 1h30) Crédits : 4 Coefficient : 2
---	--

Objectifs de l'enseignement : Ce cours doit permettre à l'étudiant d'approfondir ses connaissances en résistance des matériaux.

Connaissances préalables recommandées : Bases de la RDM1 à savoir: Statiques, Caractéristiques géométriques des sections planes ; sollicitations simples : Traction, compression, flexion, cisaillement et torsion ; diagrammes des moments fléchissant et efforts tranchants.

Contenu de la matière

Chapitre 1: Sollicitations composées

Flexion composée, Flexion déviée (3 semaines)

Chapitre 2: Treillis isostatiques et hyperstatiques

Généralités ; calcul des efforts dans les barres ; méthode analytique – Méthode des nœuds; Méthode des sections. (4 semaines)

Chapitre 3: Lignes d'influence

Généralités, Lignes d'influence isostatique Moment et efforts tranchant: poutres à âme pleine et en treillis (2 semaines)

Chapitre 4: Méthodes énergétiques

Energie de déformation : hypothèses et définition ; énergie de déformation d'une poutre : effort normal, effort tranchant, moment de flexion, à un moment de torsion ; expression générale de l'énergie de déformation ; Théorèmes 1 et 2 de Castigliano ; application des théorèmes de Castigliano aux calculs des déplacements et de rotations des poutres. (3 semaines)

Chapitre 5: Déformation des structures élastiques

Théorème de Betti ; Théorème de Maxwell ; Calcul général des déplacements ; Méthode de Maxwell-Mohr ; Méthode de Verescheaguine. (3 semaines)

Mode d'évaluation :

Contrôle Continu : **40%** ; Examen : **60%**

Chapitre 1: Sollicitations composées

INTRODUCTION

Pour simplifier l'étude des effets des sollicitations, nous avons jusqu'ici considéré les différentes sollicitations séparément. Dans le cas général une section peut être soumise à l'action des six composantes de l'effort internes à savoir (N , T_x , T_y , M_x , M_y , M_z) et qui ont été classées sous quatre catégories de sollicitation ou déformation simple: traction et compression (N), cisaillement (T_x , T_y) torsion M_x et flexion M_y , M_z . Dans la pratique courante, on rencontre rarement des cas où les sollicitations sont simples moins encore où les six composantes des efforts internes apparaissent en même temps au niveau d'une section.

On rencontre, cependant, différents types de leurs combinaisons. Sous les hypothèses de la résistance des matériaux ces combinaisons peuvent être analysées en utilisant le principe de superposition des efforts. Dans ce chapitre on étudiera la combinaison de deux flexions dite flexion déviée et la combinaison de la flexion déviée avec la traction ou la compression communément appelée flexion composée.

1.1. FLEXION COMPOSEE

La flexion composée provient de l'action conjuguée d'une flexion due à un chargement latérale et d'un effort axial (traction ou compression) ou seulement de l'effet d'un effort normal excentré par rapport à l'axe moyen de l'élément.

1.1.1) Flexion composée avec traction ou compression

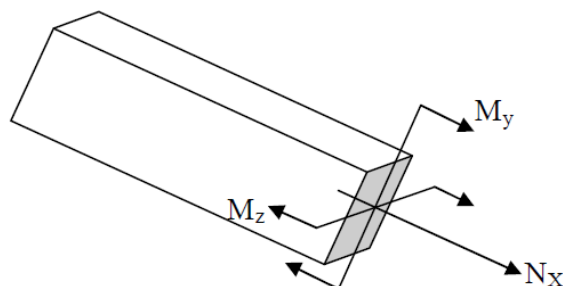
C'est le cas général d'une poutre soumise à des chargements transversaux et longitudinaux, ou une section arbitraire, les efforts M_z , M_y , Q_x , Q_y ainsi que N sont présents.

En utilisant le principe de superposition, on peut déterminer la contrainte normale globale en un point quelconque de la section normale par :

$$\sigma_1 = \pm \frac{M_z}{I_z} y \quad \text{Contrainte due au } M_z$$

$$\sigma_2 = \pm \frac{M_y}{I_y} z \quad \text{Contrainte due au } M_y$$

$$\sigma_3 = \pm \frac{N_x}{A} \quad \text{Contrainte due au } N_x$$

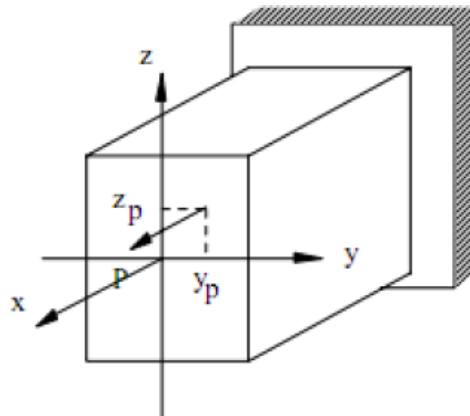


Donc la contrainte globale est donné par :

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{N_x}{A} \quad (1.1)$$

1.1.2) Traction ou compression excentrée

La flexion composée peut être aussi le résultat de l'action d'une force longitudinale excentré par rapport à l'axe moyen de la poutre. On rencontre ce cas de chargement généralement dans les éléments courts sollicités par une force excentrée dont les coordonnées du point d'application sont y_p , z_p .



Les efforts internes en une section quelconque sont :

$$N = P$$

$$M_z = P \cdot y_p$$

$$M_y = P \cdot z_p$$

D'où les contraintes en un point dans la section :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{A}{P} \frac{M_y}{I_y} z + \frac{A}{P} \frac{M_z}{I_z} y \right]$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \left[1 + z_p \frac{A}{I_y} z + y_p \frac{A}{I_z} y \right]$$

On pose : $i = \sqrt{\frac{I_i}{A}}$ rayon de giration suivant l'axe i

$$\sigma = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{z_p}{i_y^2} z + \frac{y_p}{i_z^2} y \right] \quad (1.2)$$

L'équation de l'axe neutre :

C'est l'ensemble des fibres dans lesquelles la poutre ne subit aucune traction ou compression c'est-à-dire la contrainte est nulle.

$$\sigma = 0 = 1 + \frac{z_p}{i_y^2} z + \frac{y_p}{i_z^2} y \quad (1.3)$$

D'après l'équation de l'axe neutre, ce dernier coupe les axes zz et yy aux points :

$$y = 0 \quad , \quad z_{AN} = -\frac{i_y^2}{z_p}$$

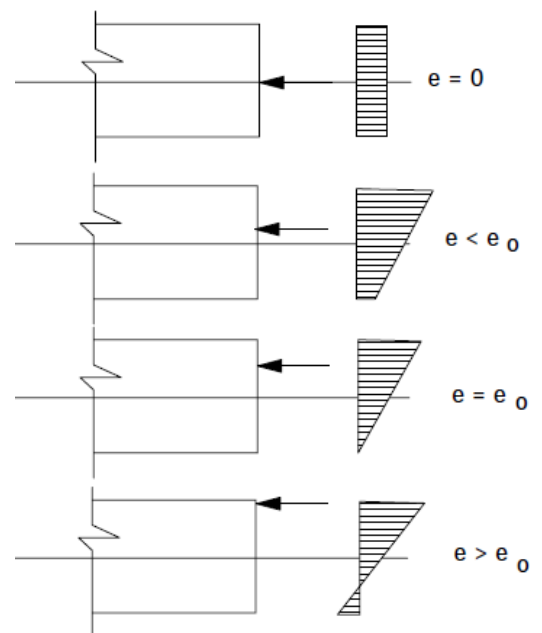
Et

$$z = 0 \quad , \quad y_{AN} = -\frac{i_z^2}{y_p}$$

Donc l'axe neutre coupe les axes du quadrant opposé de celui du point d'application de la force.

Le noyau central

D'après l'équation de l'axe neutre l'étendu de la partie de la section comprimée ou tendue dépend de l'excentricité de la force. Il est donc d'un grand intérêt pratique d'éviter dans la section droite le développement des contraintes de traction dues à la force compressive excentrique pour assurer la résistance des barres en matériau fragile à la traction. On appelle noyau central de section la partie du plan de la section droite contenant le centre de gravité et limitée par un contour fermé, dans lequel la force appliquée provoque des contraintes de même signe en tous les points de la section droite.



Le contour du noyau central de la section est déterminé par l'ensemble des positions des points d'application de la force excentrée qui fait passer l'axe par tous les points tangents à la section de telle manière qu'elle ne le coupe nulle part.

Les coordonnées des points d'application de la force sont déterminées d'après les formules suivantes :

$$y_P = -\frac{i_z^2}{y_{AN}} \quad , \quad z_P = -\frac{i_y^2}{z_{AN}}$$

Ces formules traduisent la relation entre la position de l'axe neutre et le point d'application de la force. Quand l'axe neutre tourne par rapport à un point fixe y_0 et z_0 , le point d'application de la force se déplace suivant une ligne droite PP ne passant pas par le centre de gravité de la section.

Pour le cas d'un rectangle par exemple quand l'axe neutre est coïncidant avec

AB : l'axe neutre coupe l'axe y-y à $y_{AN} = y_0 = \frac{h}{2}$ et ne coupe pas l'axe z-z

($z_{AN} = \infty$).

Les coordonnées du point d'application de la force correspondante à cette position de l'axe neutre sont déterminées par :

$$y_P = -\frac{i_z^2}{y_{AN}} = -\frac{h}{6}$$

$$\text{car } i_z^2 = \frac{I_z}{S} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}$$

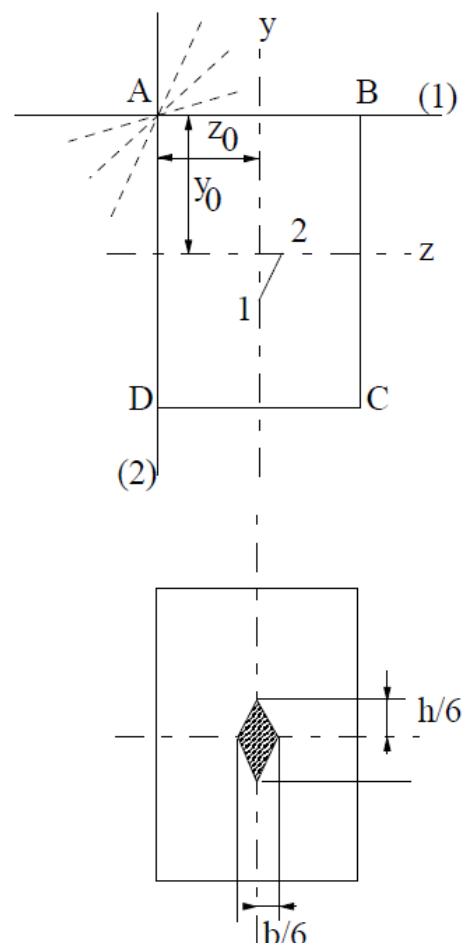
$$z_P = -\frac{i_y^2}{z_{AN}} = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0$$

D'une manière analogue on détermine les coordonnées du point 2 qui correspond à une position de l'axe neutre coïncidente avec AD, et on trouve

$$y_P = 0 \text{ et } y_P = b/2$$

La liaison des deux points 1 et 2 correspond à la rotation de l'axe neutre au point (z_0, y_0) passant de la position AB à AD.

Le contour du noyau central de la section rectangulaire est un losange dont les deux autres points 3 et 4 sont déterminés de la même manière que précédemment, c'est à dire quand l'axe neutre passe de BA à AD et de AD à DC.



1.1.3) Vérification à la résistance

Pour une section symétrique, la condition de résistance s'écrit

$$\sigma = \frac{F}{S} \pm \frac{M_Z}{W_Z} \pm \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma] \quad (1.3)$$

Ou pour le cas d'un effort normal excentré :

$$\sigma = \frac{F}{S} \left(1 \pm \frac{z_P}{i_y^2} z_{\max} \pm \frac{y_P}{i_z^2} y_{\max} \right) \leq [\sigma] \quad (1.4)$$

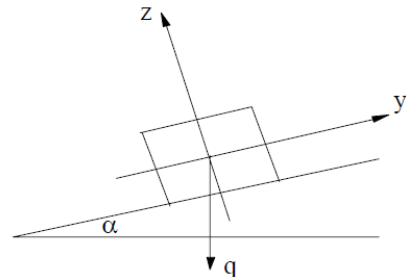
1.1.4) Application

1/ Déterminer les contraintes normales σ_{\max} et σ_{\min} et la position de l'axe neutre dans la section dangereuse de la poutre ci-dessous :

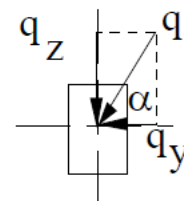
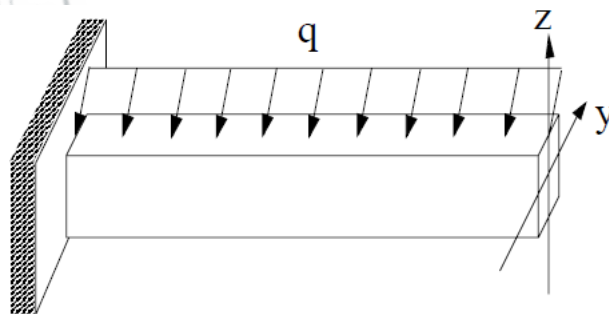
2/ Si les angles que forme P avec les axes x-x, y-y et z-z sont 30° , 60° et 90° respectivement, déterminer la longueur L maximale de la poutre pour que la contrainte normale maximale ne dépasse pas celle provoquée par la force excentrée.

1.2 FLEXION DEVIÉE

La flexion déviée est le résultat de l'action des forces extérieures agissant suivant un plan différent de ceux des axes principaux de la poutre. Par exemple une panne d'une toiture inclinée soumise à une charge verticale.



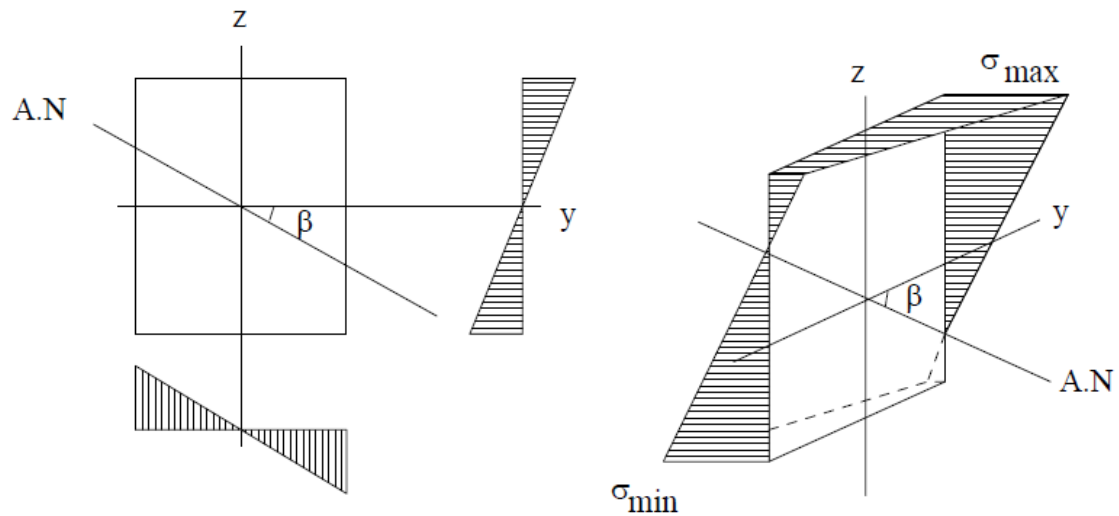
L'étude de la flexion déviée revient à décomposer les sollicitations en deux flexions planes suivant les plans principaux.



Pour une action simultanée de M_y et M_z , les contraintes en un point de coordonnées y et z se déterminent par la formule :

$$\sigma = \frac{M_Y}{I_Y} z + \frac{M_Z}{I_Z} y \quad (1.5)$$

Ce résultat est établi directement en considérant que la flexion déviée comme la somme de deux flexions dirigées suivant les axes centraux d'inertie et en appliquant le principe de superposition.



L'axe neutre, défini par $\sigma = 0$, a pour équation:

$$\Rightarrow \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = 0 \Rightarrow y = -\frac{M_y}{M_z} \times \frac{I_z}{I_y} z \quad (1.6)$$

En flexion déviée due à une charge inclinée de α par rapport à l'axe oy on a les relations :

$$M_y = M \cos \alpha$$

$$M_z = M \sin \alpha$$

Où M est le moment suivant un axe orienté de α par rapport à y-y.

La tangente de l'axe neutre s'écrit alors:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y}{M_z} \times \frac{I_z}{I_y} = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y} \quad (1.7)$$

Et l'expression (1.5) peut être mise sous la forme:

$$\Rightarrow \sigma = M \left(\frac{Z \cos \alpha}{I_y} + \frac{Y \sin \alpha}{I_z} \right) \quad (1.8)$$

1.2.1 Vérification à la résistance

Le calcul de vérification de la résistance s'effectue à la base des données sur la contrainte totale maximale.

D'après la formule (1.5) les contraintes maximales se localisent aux points les plus éloignés de l'axe neutre. Pour une section symétrique on a:

$$\sigma_{\max} = \left| M_{\max} \left(\frac{Y_{\max} \sin \alpha}{I_z} + \frac{Z_{\max} \cos \alpha}{I_y} \right) \right| \leq [\sigma_+] \quad (1.9)$$

$$\sigma_{\min} = - \left| M_{\max} \left(\frac{Y_{\max} \sin \alpha}{I_z} + \frac{Z_{\max} \cos \alpha}{I_y} \right) \right| \leq [\sigma_-] \quad (1.10)$$

1.2.2 Application 1

Dimensionner une poutre d'un toit simplement appuyée de longueur $L = 4$ m.

Le rapport $\frac{h}{b} = 2$ l'angle entre le toit et l'horizontale est de 25° . La charge verticale $q = 0.4$ kN/m est répartie sur toute la longueur. on donne $[\sigma] = 10$ N/mm², et $E = 10^4$ N/mm².

fb/ mehda abderrahmane

Chapitre 2: Treillis isostatiques et hyperstatiques

2.1. Généralités :

Les treillis sont très largement utilisés en construction. Qu'il s'agisse de structures faites d'acier, de bois ou autre, les treillis se retrouvent dans les fermes des toitures des hangars et des grandes salles de sport, de grues, de ponts roulants, de pylônes, etc., . On fait appel à ce mode de réalisation dans le but essentiel d'alléger l'ensemble d'une construction tout en assurant une plus grande stabilité et rigidité importante suivant leurs plans.

Les treillis peuvent être sollicités par des forces externes comme les charges à supporter, le poids propre de la structure, le poids de la neige, le trafic, les réactions d'appuis, ... tandis que les pièces de ces structures sont soumises à des forces internes de la part des pièces voisines. Ces efforts internes et externes doivent être déterminés pour pouvoir choisir les matériaux requis dans la réalisation des constructions. Des pièces trop grosses ne sont pas économiques par contre des pièces trop petites ne sont pas sécuritaires.

Lorsque toutes les barres ainsi que les forces appliquées sont dans un même plan, le treillis est appelé un treillis plan ; dans le cas contraire, il s'agit d'un treillis spatial.

2.2. Définition :

Les systèmes en treillis (appelés aussi triangulations ou structures réticulées) sont des structures composées de barres droites articulées entre-elles à leurs extrémités situées dans un seul plan appelé le plan de charpente. Les articulations communes à plusieurs barres sont les nœuds du système. Il forme généralement une chaîne simple (plane) de triangles juxtaposés.

Cette construction est une des principales structures employées en ingénierie.

Les treillis sont des structures dont les pièces sont assemblées de façon à former des triangles.

La cellule de base d'un treillis plan est le triangle (parce qu'il est la seule figure géométrique indéformable) et les trois barres (figure 2.1.a) articulées à leurs extrémités forment une structure stable pour supporter la charge P . Le treillis de la figure II.2a peut être agrandi par juxtaposition de triangles, et on obtient ainsi un système triangulé (figure 2.1.b).

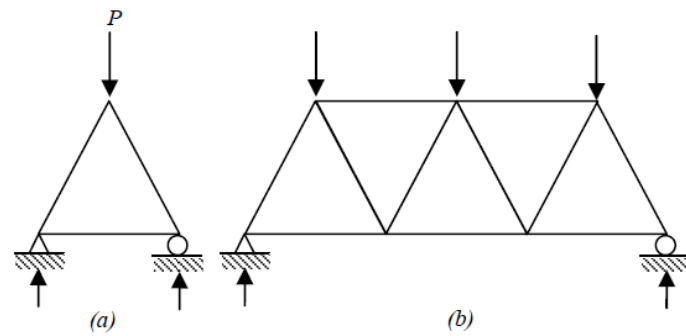


Figure 2.1 : Systèmes en treillis

2.3) TERMINOLOGIE

2.3.1) Nœud: Le point de rencontre de deux ou plusieurs barres s'appelle un nœud. Les nœuds peuvent être fait de joint solide (assemblage par rivetage, soudage,...) ou des articulations (assemblage par rotule, axe, ...). La figure 2.2 présente un exemple de détail de la réalisation pratique d'un nœud de treillis.

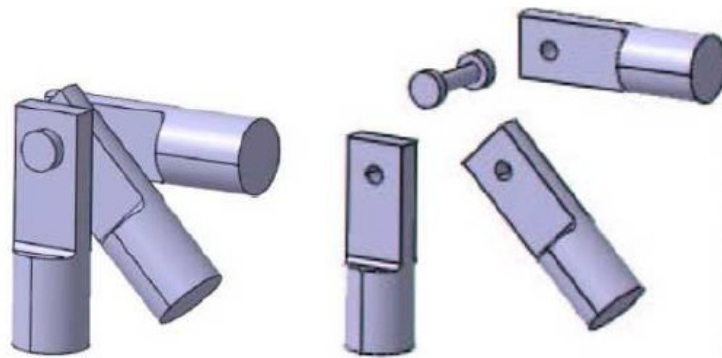


Figure 2.2: Détail d'un nœud

2.3.2) Barres ou membrures: Les pièces d'une structure triangulée sont des barres. Elles sont faites d'acier, de bois ou autre. On associe généralement les barres ou membrures des treillis à des barres articulées.

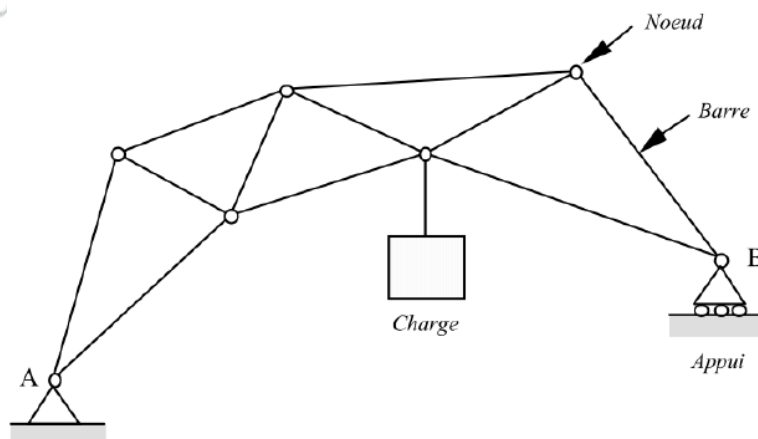


Figure 2.3 : Terminologie d'un treillis

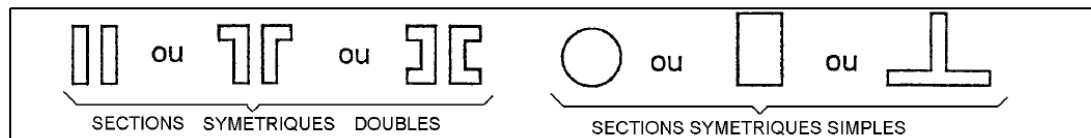
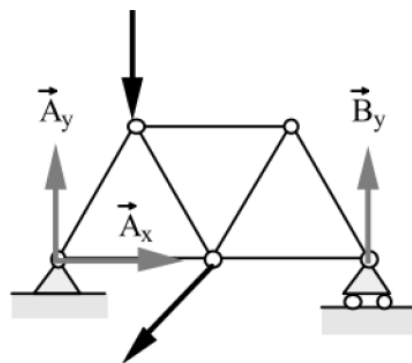


Figure 2.4 : Exemples de section des barres

2.4) SYSTEMES ISOSTATIQUES ET HYPERSTATIQUES

2.4.1) Système isostatique

Un treillis ou système réticulé est extérieurement isostatique si les actions d'appui peuvent être déterminées à partir des trois équations d'équilibre de la statique ; dans le cas contraire, le treillis est extérieurement hyperstatique.



3 équations
3 inconnues

- Trois équations :

Equilibre de translation :

$$\sum F_x = 0 \dots\dots\dots(\text{II.1})$$

$$\sum F_y = 0 \dots\dots\dots(\text{II.2})$$

Equilibre de rotation :

$$\sum M = 0 \dots\dots\dots(\text{II.3})$$

- Trois inconnues :

A_x , A_y et B_y

Figure 2.4 : Système isostatique

Par ailleurs, un treillis est intérieurement isostatique si les efforts dans les barres peuvent être déterminés par les équations d'équilibre de la statique à partir des charges et des actions d'appui préalablement calculées ; dans le cas contraire, le treillis est intérieurement hyperstatique.

2.4.2) Système hyperstatique

Si le nombre d'éléments inconnus des réactions d'appuis est supérieur au nombre d'équations d'équilibre dont on dispose, le système est dit hyperstatique. On a un système possédant plus d'inconnues que d'équations donc on ne peut résoudre ce type de système par les méthodes que l'on connaît. Dans ce cas le nombre d'inconnues est quatre : A_x , A_y , B_x et B_y .

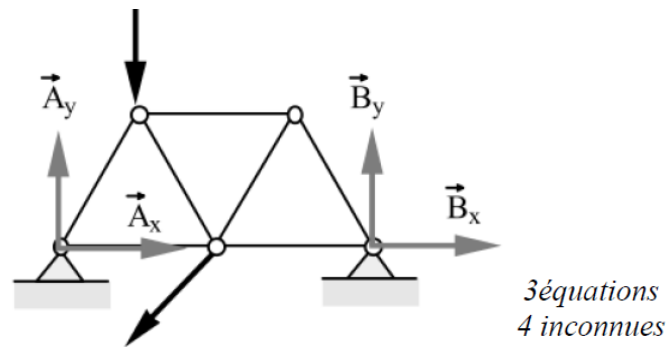


Figure 2.5 : système hyperstatique

2.4.3) Système instable

Si le nombre d'éléments inconnues des réactions d'appuis est inférieur au nombre d'équations d'équilibre dont on dispose, le système est dit instable. C'est par exemple le cas d'un système reposant sur deux appuis simple comme l'exemple ci-contre: la structure peut se déplacer latéralement. Dans ce cas le nombre d'inconnue est seulement deux : A_y et B_y

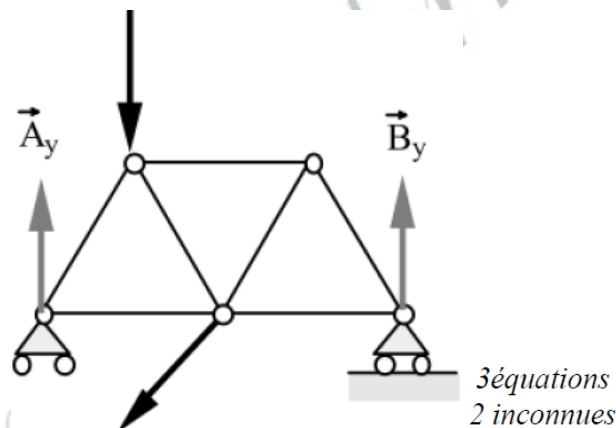


Figure 2.6 : système instable

La condition nécessaire pour que le treillis soit intérieurement isostatique est :

$$b = 2n - 3 \quad (\text{II.4})$$

Où :

b : nombre de membrures (barres)

n : nombre de nœuds

- Si $b = 2n-3$: Le système est intérieurement isostatique ;
- Si $b < 2n-3$: Le système est instable ;
- Si $b > 2n-3$: Le système est hyperstatique intérieurement.

Dans ce cas le degré d'hyperstaticité du treillis h est donné par :

$$h = b + l - 2n \quad (\text{II.5})$$

Où :

b : nombre de membrures (barres) ;

n : nombre de nœuds ;

l : le nombre de réactions d'appuis ;

- Si $h=0$ le système est isostatique.

2.5) TYPE DE TREILLIS

Les treillis peuvent être classés en plusieurs catégories comme par exemple:

1-Ferme de pont, (figure 2.7)

2-Ferme de toit, (figure 2.8)

3-Grue, (figure 2.9)

4-Autres

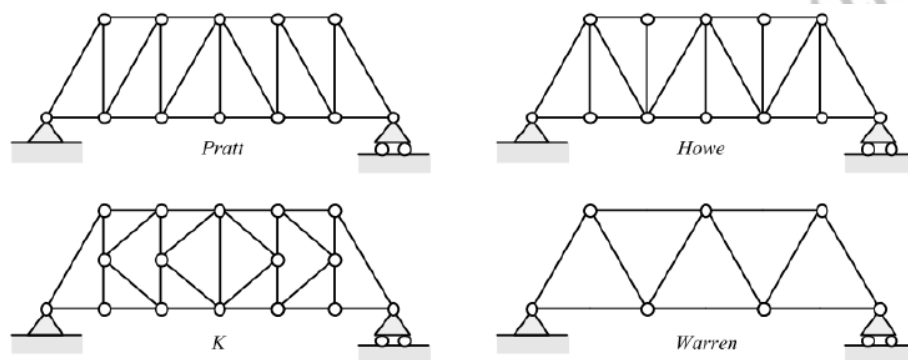


Figure 2.7 : Ferme de pont.

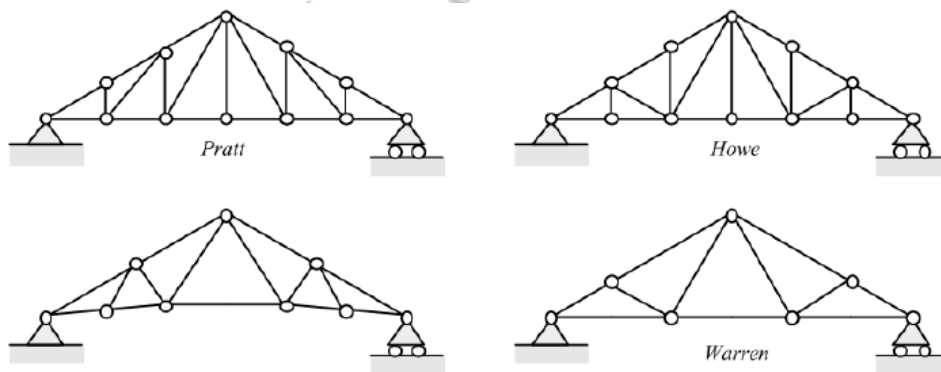


Figure 2.8 : Ferme de toit.

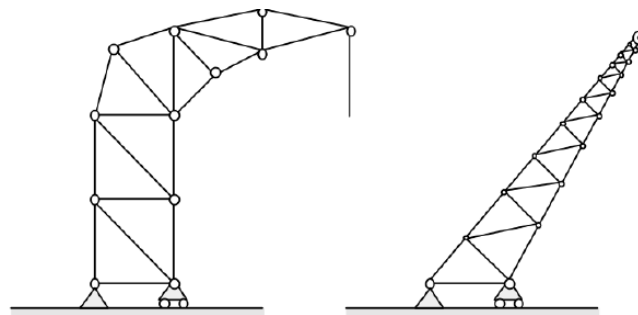


Figure 2.9 : Grue

2.6) HYPOTHESE DE CALCUL

Pour assurer que chacune des barres ne soit sollicitée qu'en traction ou en compression il faut que :

- Pour déterminer les actions de liaison, on assimilera le système réticulé à un système matériel rigide (les barres sont considérés comme rigide et indéformables) .
- Les barres sont modélisées par leur ligne moyenne (ligne passant par le centre de gravité des sections droites).
- On suppose les barres articulées sans frottement aux nœuds, (articulation parfaite d'axe z perpendiculaire au plan du treillis).
- Le poids des barres soit négligeable devant les autres sollicitations,
- Les sollicitations extérieures (charge) ne soient que des efforts appliqués sur les nœuds,
- Les liaisons avec l'extérieur soient des appuis fixes ou des appuis mobiles.
- Les calculs sont conduits exclusivement en élasticité.

2.7) SOLLICITATION DES BARRES

On suppose que les forces extérieures sont appliquées aux nœuds. Il en résulte qu'une barre CD du système comprise entre les nœuds C et D est sollicitée par deux forces axiales N_C et N_D transmises par ces nœuds. La barre isolée doit être en équilibre sous l'action de ces deux forces, ce qui exige que celles-ci soient de sens opposé et d'intensité égale, figure 2.10. La barre CD supporte donc uniquement un effort normal N_{CD} qui est considéré comme :

- Positif si la barre CD est tendue (Traction)
- Négatif si la barre CD est comprimée (Compression)

Donc nous pouvons écrire que : $N_{CD} = N_{DC}$

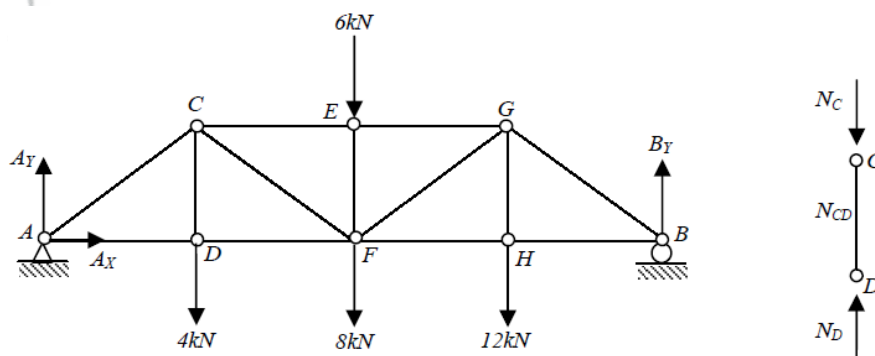


Figure 2.10 : Sollicitation des barres

2.8) ANALYSE DE TREILLIS

Deux méthodes principales permettent de calculer théoriquement les efforts dans les membranes d'un treillis : la méthode des nœuds et la méthode des coupes (sections).

II.8.1) Calcul des treillis plans isostatiques par la méthode des nœuds

a) Méthodologie

Cette méthode consiste à faire le schéma rendu libre d'un premier nœud et d'écrire les deux équations exprimant son équilibre, $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$, (C'est généralement le cas d'un nœud d'extrémité ou d'appui du treillis). Sur base des résultats obtenus par la résolution de ce premier système d'équations, on écrit l'équilibre d'un deuxième nœud puis d'un troisième et ainsi de suite pour obtenir les efforts dans toutes les barres.

Dans cette méthode, on comprendra aisément qu'il faut disposer d'un premier nœud où n'aboutissent que deux barres afin de n'introduire que deux inconnues puisque l'on n'a que deux équations (c'est toujours le cas dans les triangulations simples) et ensuite, il faut également que, pour tout nœud suivant, il n'y ait jamais plus de deux efforts inconnus à trouver. Ce sont ces deux critères qui vont gouverner le choix du nœud de départ puis de l'ordre suivant lequel on va progresser dans le treillis.

Signalons que souvent, il est utile de déterminer la nature du treillis et de calculer, au préalable, les réactions d'appui par équilibre de tout le treillis.

b) Remarque

Lors de la résolution, pour les efforts connus, on utilise leur sens ; pour les efforts inconnus dans les barres, on suppose qu'ils agissent en traction (leurs vecteurs représentatifs s'éloignent du nœud). On écrit les équations d'équilibre pour trouver la valeur de ces efforts.

Si le résultat est positif pour un effort, il s'agit bien d'une traction ; sinon il s'agit d'une compression. Il est clair qu'au dernier nœud, les équations d'équilibre devront être automatiquement satisfaites et que cela pourra servir de contrôle final.

c) Conclusion

La méthode des nœuds est toute indiquée quand il s'agit de calculer les forces dans toutes les barres d'un treillis. Elle consiste à écrire l'équilibre de chaque nœud, pour déterminer les valeurs de sollicitation de chaque barre. On peut se vérifier sur le dernier nœud. Seuls problèmes :

- On doit généralement résoudre entièrement le treillis pour obtenir l'effort dans une barre bien précise ;

- Les erreurs se cumulent au fur et à mesure de l'avancement de la résolution.

Exercice 1 :

1- Vérifier l'isostatisme des systèmes triangulés suivants.

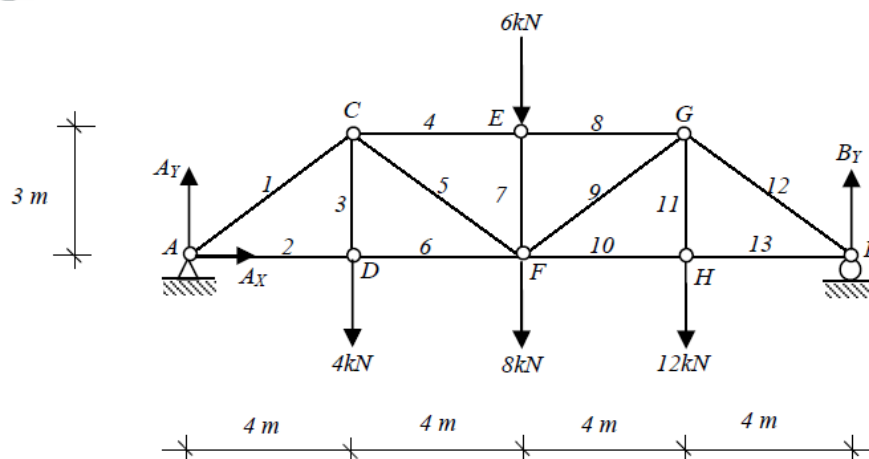
systèmes triangulés	Nbrs. de barres et de nœuds	Type de système
	$b = 15$ $n = 9$	Système est intérieurement isostatique
	$b = 11$ $n = 8$	le système est instable

2- Calculer le degré d'hyperstaticité h des systèmes triangulés suivants :

$h = 1$	$h = 1$
$h = 2$	$h = 0$
$h = -1$	$h = 0$

Exercice 2:

Trouver les forces dans toutes les barres du treillis suivant :



Solution :

- Vérification de la structure

$$b = 2n - 3$$

$$b = 13$$

$$n = 8 \Rightarrow 13 = 13$$

Donc le système est intérieurement isostatique.

1- Trouvons les réactions d'appuis

$$\Sigma M_A = -(4000 * 4) - (8000 * 8) - (6000 * 8) - (12000 * 12) + (B_y * 16) = 0$$

$$B_y * 16 = 16000 + 64000 + 48000 + 144000$$

$$\text{D'où} \quad B_y = 17 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 4000 - 8000 - 6000 - 12000 + 17000 = 0$$

$$\text{D'où} \quad A_y = 13 \text{ kN}$$

2- Équilibre des nœuds

- Nœud A : Remplaçons l'articulation par A_y et les barres 1 et 2 par des efforts N_1 et N_2 en tension.

$$\Sigma F_x = N_1 \cos \theta + N_2 = N_1(4/5) + N_2 = 0$$

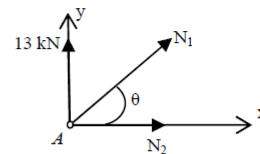
$$\text{D'où} \quad N_2 = -(4/5)N_1$$

$$\Sigma F_y = N_1 \sin \theta + 13000 = 0$$

$$\text{Donc} \quad N_1(3/5) = -13000$$

$$\text{D'où} \quad N_1 = -21667 \text{ N}$$

$$\text{Donc} \quad N_2 = 17333 \text{ N}$$



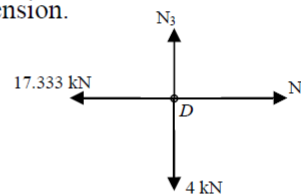
- Nœud D : Remplaçons la barre 2 par son effort, la barre 3 par un effort N_3 supposé en tension et la barre 6 par un effort N_6 supposé en tension.

$$\Sigma F_x = N_6 - 17333 = 0$$

$$\text{d'où} \quad N_6 = 17333 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = N_3 - 4000 = 0$$

$$\text{d'où} \quad N_3 = 4 \text{ kN}$$



- Nœud C : Remplaçons les barres 1 et 3 par leurs efforts, la barre 4 par un effort N_4 supposé en tension et la barre 5 par un effort N_5 supposé en tension.

$$\Sigma F_x = N_4 + 21667 \sin \alpha + N_5 \cos \theta$$

$$= N_4 + 21667(4/5) + N_5(4/5) = 0$$

$$\text{D'où} \quad N_4 = -(4/5)N_5 - 17333 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 21667 \cos \alpha - 4000 - N_5 \sin \theta$$

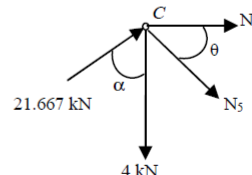
$$= 21667(3/5) - 4000 - N_5(3/5) = 0$$

$$(3/5)N_5 = 13000 - 4000$$

$$\text{D'où} \quad N_5 = 15000 \text{ N}$$

$$N_5 \text{ dans équation (1)} \quad N_4 = -(4/5)(15000) - 17333$$

$$\text{D'où} \quad N_4 = -29333 \text{ N}$$



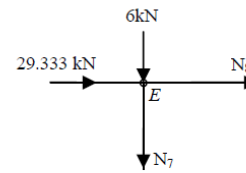
- Nœud E : Remplaçons la barre 4 par son effort (29333 N compression), la barre 7 par un effort N_7 supposé en tension et la barre 8 par un effort N_8 supposé en tension.

$$\sum F_x = N_8 + 29333 = 0$$

$$\text{D'où } N_8 = -29333 \text{ N}$$

$$\sum F_y = -N_7 - 6000 = 0$$

$$\text{D'où } N_7 = -6000 \text{ N}$$



- Nœud F: Remplaçons les barres 5, 6 et 7 par leurs efforts, la barre 9 par un effort N_9 supposé en tension et la barre 10 par un effort N_{10} supposé en tension.

$$\sum F_x = -17333 - 15000\cos\theta + N_9\cos\theta + N_{10}$$

$$= -17333 - 15000(4/5) + N_9(4/5) + N_{10} = 0$$

$$\text{D'où } N_{10} = -(4/5)N_9 - 29333 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 15000\sin\theta - 6000 - 8000 + N_9\sin\theta$$

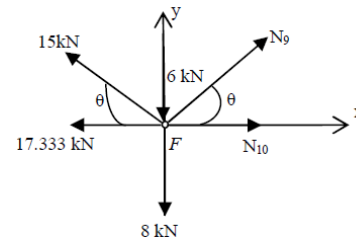
$$= 15000(3/5) - 14000 + N_9(3/5) = 0$$

$$(3/5)N_9 = 14000 - 9000 = 5000$$

$$\text{D'où } N_9 = 8333 \text{ N}$$

$$N_9 \text{ dans équation (1) } N_{10} = -(4/5)(8333) + 29333$$

$$\text{D'où } N_{10} = 22667 \text{ N}$$



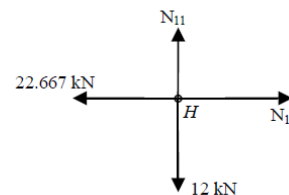
- Nœud H: Remplaçons la barre 10 par son effort, la barre 11 par un effort N_{11} supposé en tension et la barre 13 par un effort N_{13} supposé en tension.

$$\sum F_x = N_{13} - 22667 = 0$$

$$\text{D'où } N_{13} = 22667 \text{ N}$$

$$\sum F_y = N_{11} - 12000 = 0$$

$$\text{D'où } N_{11} = 12000 \text{ N}$$



- Nœud G: Remplaçons les barres 8 et 9 par leurs efforts, et la barre 12 par un effort N_{12} supposé en tension.

$$\sum F_x = 29333 - 8333\cos\theta + N_{12}\sin\alpha$$

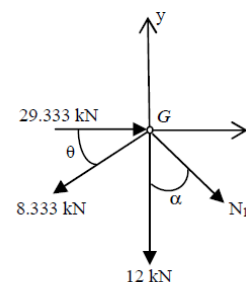
$$= 29333 - 8333(4/5) + (4/5)N_{12} = 0$$

$$\text{D'où } N_{12} = -28333 \text{ N}$$

$$\sum F_y = -8333\sin\theta - 12000 - N_{12}\cos\alpha$$

$$= -8333(3/5) - 12000 - (3/5)N_{12} = 0$$

$$\text{D'où } N_{12} = -28333 \text{ N (preuve)}$$



- Nœud B: Vérification; Si les valeurs trouvées pour N_{12} et N_{13} par le calcul successif de toutes les barres sont exactes, les autres valeurs le seront également.

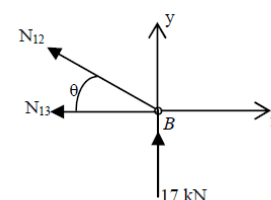
$$\sum F_y = N_{12}\sin\theta + 17000 = N_{12}(3/5) + 17000 = 0$$

$$\text{D'où } N_{12} = -28333 \text{ N}$$

$$\sum F_x = -N_{12}\sin\theta - N_{13} = 0 \Rightarrow N_{13} = -(4/5)N_{12} = -(4/5)(-28333)$$

$$\text{D'où } N_{13} = 22667 \text{ N}$$

Les mêmes valeurs (N_{12} et N_{13}) trouvées par l'étude des nœuds G et H.



2.8.2) Calcul des treillis plans isostatiques par la méthode des sections (de Ritter)

La méthode des noeuds ci-dessus est un outil très pratique lorsqu'il s'agit de déterminer les efforts dans toutes les barres du treillis. Cependant, pour déterminer ou vérifier l'effort dans une barre quelconque, une autre méthode, appelée la méthode des sections est plus avantageuse.

Cette méthode consiste à couper le treillis (figure 2.11) en deux parties par une section qui coupe les barres dont on veut déterminer les efforts. On isole la partie à gauche de la section, on dénote les efforts inconnus des barres comme des forces extérieures et l'on tient compte des forces extérieures appliquées aux nœuds ainsi que les actions aux appuis. On calcule ensuite les efforts inconnus à partir des équations d'équilibre de la statique.

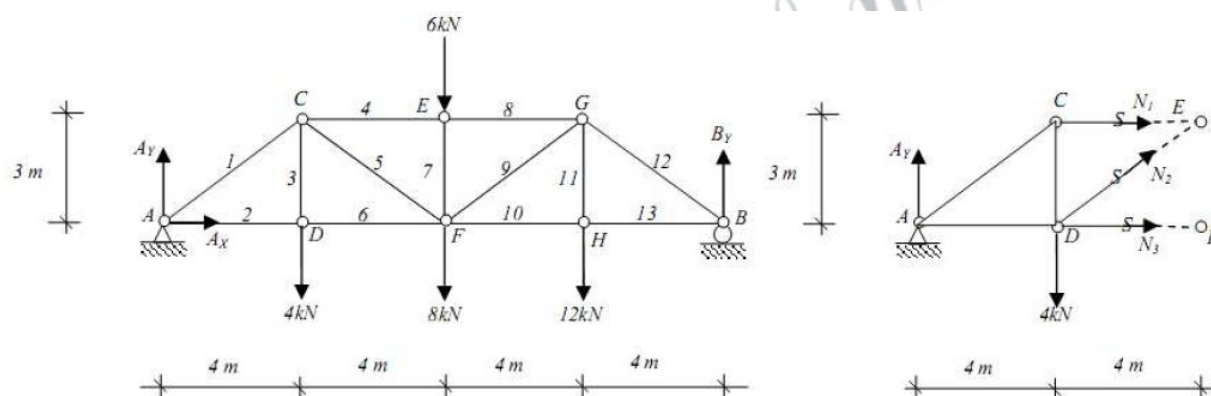


Figure 2.11 : Méthode des sections (de Ritter)

La coupe idéale est donc celle qui ne sectionne que trois barres, puisqu'on n'a que trois équations d'équilibre. Il faut savoir choisir la coupe appropriée qui permettra les calculs, car ce n'est pas n'importe quelle coupe qui conviendra. On coupera le treillis en deux parties autant de fois que cela est nécessaire, selon le nombre de barres dont on veut calculer les efforts.

a) Méthodologie

Pour les efforts connus, on utilise leur sens ; pour les efforts inconnus dans les barres, on suppose qu'ils agissent en traction. Les équations d'équilibre sont écrites pour trouver la valeur de ces efforts. Si le résultat est positif pour un effort, il s'agit bien d'une traction ; sinon, il s'agit d'une compression.

Pour écrire les équations d'équilibre de la statique, on utilise les composantes horizontales et verticales des efforts et des forces extérieures suivant les axes \vec{x} et \vec{y} . On peut aussi employer les distances des forces et des efforts au point P (le point P représente l'intersection des deux poutres prises parmi les trois barres coupées), par

rapport auquel on écrit l'équation d'équilibre des moments $\Sigma \vec{M}_{F/P} = \vec{0}$, si cela s'avère plus commode et plus rapide pour les calculs. Le point d'intersection des deux poutres coupées est appelé « pole ».

b) Conclusion

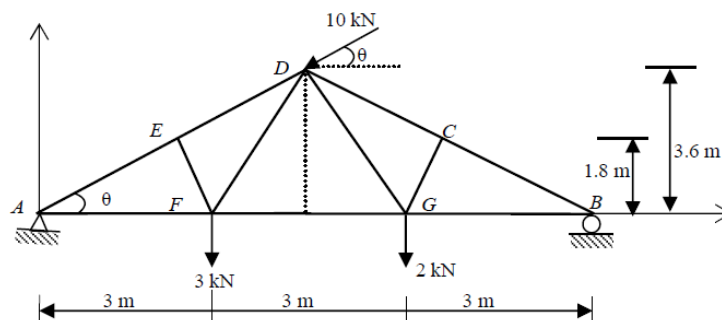
Cette méthode est simple. Juste en appliquant les équations d'équilibres sur la demi-structure, on détermine les valeurs de sollicitation de chaque barre. Cependant, les calculs sont plus laborieux que la méthode des nœuds. L'avantage de cette méthode est qu'elle :

- permet de calculer l'effort dans une barre particulière, directement, sans être au préalable obligé de calculer les efforts dans plusieurs autres barres.
- De plus, les erreurs ne se cumulent pas. Cependant, on ne peut pas se vérifier.

Exercice 4 :

Soit le treillis articulé plan schématisé par la figure ci-dessous.

- 1) Etudier l'isostaticité du treillis.
- 2) Déterminer l'effort dans la barre DG.



Solution

1- Isostaticité du système

Nombre de nœuds: ($n = 7$)

Nombre de barres: ($b = 11$)

Donc $b = 2n - 3$, d'où le système est isostatique.

2- Effort dans la barre DG.

En utilisant la méthode des sections, on coupe au maximum trois barres de sorte que la barre dont on recherche l'effort soit parmi elle.

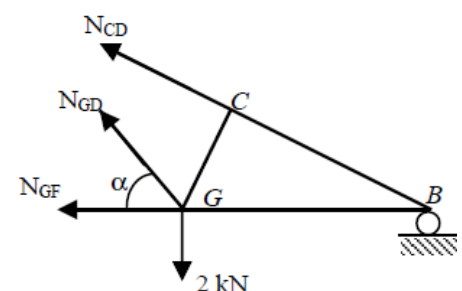
Nous écrivons une seule équation qui est celle des moments par rapport au point B :

$$\Sigma M_{/B} = 0$$

$$\Rightarrow -(N_{GD} \sin a) * 3 + 2 * 3 = 0$$

$$\Rightarrow N_{GD} = 2 / \sin a \text{ (avec } a = 67^\circ, 38')$$

$$\Rightarrow N_{GD} = 2.17 \text{ kN (traction)}$$



Chapitre 3

LIGNES D'INFLUENCE

3.1 INTRODUCTION

Jusqu'à présent nous avons étudié des structures soumises à des charges immobiles. Mais il existe de nombreux cas où les constructions supportent des charges mobiles. L'exemple le plus commun est celui des ponts. Le chargement mobile étant dans ce cas représenté par l'action de la circulation des véhicules et des trains. Comme autre exemple, citons les ponts roulants qu'on rencontre dans les ateliers de fabrication. Le chariot, qui déplace des pièces d'un point à un autre de l'atelier, se meut sur des rails fixés à des poutres.

La figure 3.1 montre un exemple de chargement mobile, en l'occurrence le système Bc . Les distances entre les roues sont fixes et le chargement, représenté dans le cas présent par un système de six forces concentrées, se déplace comme un tout.

Quand une charge (chargement) est mobile, c'est-à-dire pouvant occuper

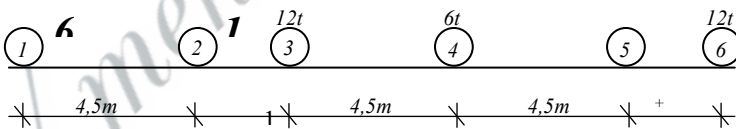


Figure 3.1

n'importe quelle position sur la poutre, la question qui vient immédiatement à l'esprit est de savoir, pour une grandeur donnée, quelle est la position de la charge (chargement) qui provoque la plus grande valeur de la grandeur étudiée. Cette grandeur peut être un effet élastique quelconque : déplacement d'une section, réaction d'un appui, moment dans une section, etc. Il s'agit donc de trouver la position de la charge (chargement) qui provoque l'effet maximum et la section où il se produit (section la plus dangereuse). C'est le problème majeur des chargements mobiles. Il faut noter que la position du chargement qui provoque le plus grand effet pour une grandeur donnée

(par exemple le moment fléchissant) ne l'est pas en général pour une autre grandeur (l'effort tranchant par exemple) et que ce qui intéresse l'ingénieur en définitive, c'est la position qui provoque les contraintes les plus importantes.

Outre le problème de la recherche de la position la plus défavorable, les charges mobiles peuvent provoquer une action dynamique résultant de vibrations ou de chocs. Ce problème ne sera pas traité ici.

Hormis dans des cas très simples, la recherche de la position critique du chargement est une opération assez complexe. Considérons à titre d'exemple une poutre bi-articulée. Si la poutre est soumise à une force unique (Figure 3.2a), il est évident que le moment maximum par exemple apparaît à mi-portée quand la force est placée en cette même section. Dans le cas d'un chargement constitué de deux forces (Figure 3.2b), la position de ce dernier qui provoque le plus grand moment dans la poutre n'est déjà plus évidente. Même quand la section est fixée, la recherche de la position qui provoque le plus fort moment en cette section nécessite de longs calculs.

Le problème complexe de la recherche de la position critique d'un chargement

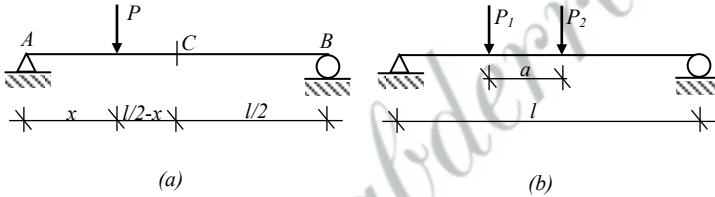


Figure 3.2

mobile peut être grandement simplifié par l'utilisation des lignes d'influence que nous allons définir d'abord puis examiner leurs propriétés dans les paragraphes qui suivent.

3.2 DEFINITIONS

Les lignes d'influence montrent graphiquement comment varient les diverses grandeurs qu'on rencontre habituellement, tous les effets élastiques auxquels s'intéresse la résistance des matériaux, sous l'influence d'une charge constante qui se déplace sur la structure.

La grandeur ou effet élastique peut être :

- une contrainte en un point précis ;
- le déplacement (rotation - translation) d'une section donnée ;
- une composante de réaction d'un appui ;
- un élément de réduction dans une section donnée.

La charge mobile est habituellement une force verticale unité, vu qu'en général on s'intéresse à l'action des charges verticales sur les constructions. Elle peut cependant être un couple, une force horizontale, une discontinuité de la section, un manque de concordance, etc.

Considérons par exemple une poutre-console de longueur l sur laquelle circule une force P (Figure 3.3a) et intéressons-nous au moment d'encastrement.

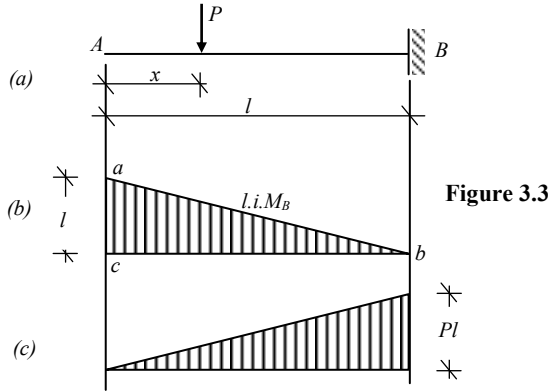


Figure 3.3

Le moment d'encastrement est donné par l'expression :

$$M_B = -P(l-x) \quad (a)$$

En faisant varier x de 0 à l , on constate la variation de M_B en fonction de la position de P sur la poutre. Le facteur « $-(l-x)$ » de l'équation (a) par lequel la force P est multipliée pour avoir le moment en B est appelé *fonction d'influence* (parfois *coefficient d'influence*) de M_B . La ligne représentative de cette fonction - représentée par la droite ab de la figure 3.3b - est appelée *ligne d'influence* de M_B .

Le diagramme oab (Figure 3.3b) est désigné par *diagramme d'influence* de M_B .

Différence entre ligne d'influence et ligne représentative d'une grandeur

Le diagramme d'influence, délimité par la ligne d'influence et la droite repère (droite ob de la figure 3.3b), ne doit pas être confondu avec le diagramme du moment fléchissant de la poutre, qui est pour sa part délimité par une droite repère et la ligne représentative de l'effort considéré (Figure 3.3c).

Considérons une structure élastique et intéressons-nous à l'effet élastique E produit par une cause mobile C (Figure 3.4a).

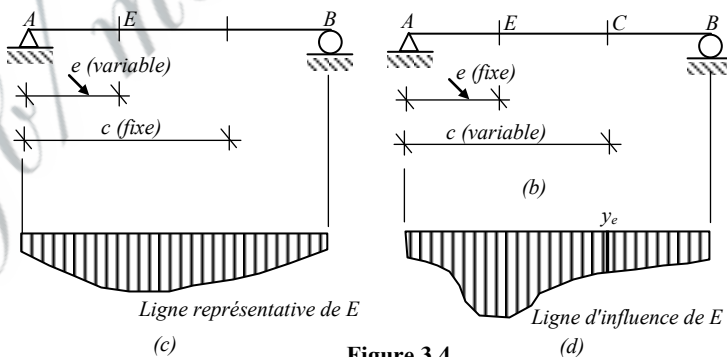


Figure 3.4

En vertu du principe de superposition, la structure étant élastique, on peut toujours écrire :

$$E = C.f(e, c) \quad (3.1)$$

$f(e, c)$ désignant ici la fonction d'influence de l'effet E produit par la cause C . Le diagramme de l'effet E montre par chaque ordonnée la valeur de cet effet dans la section correspondante sous l'action de la cause C , immobile, appliquée en c (Figure 3.4c). Le diagramme est obtenu en portant en ordonnées les valeurs de l'effet E à l'aplomb de chaque section.

Le diagramme d'influence donne l'ordonnée par laquelle il faut multiplier la cause C pour avoir l'effet E dans la section fixe d'abscisse e (Figure 3.4d). Le diagramme s'obtient en portant la valeur de l'effet E à l'aplomb de chaque position de la cause C prise égale à l'unité.

3.3 UTILISATION DES LIGNES D'INFLUENCE

Les lignes d'influence permettent de calculer assez facilement les effets élastiques produits par les chargements les plus divers. Elles sont plus particulièrement utiles dans la recherche des valeurs extrêmes de ces effets et des positions du chargement qui les provoquent.

Reprenons l'exemple de la poutre-console et considérons un chargement composé de trois charges concentrées dont les distances mutuelles (d_1 et d_2) sont invariables (Figure 3.5a). Signalons qu'un système de forces mobiles concentrées pouvant se déplacer en maintenant fixes les distances entre les points d'application des forces est appelé *convoi*.

D'après la définition du diagramme d'influence et en vertu du principe de superposition, le moment en B sous l'action du système de forces vaut :

$$M_B = -(P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3) = - \sum_{i=1}^3 P_i y_i \quad (a)$$

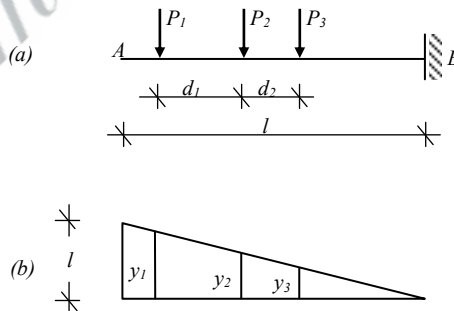


Figure 3.5

Comme les valeurs du coefficient d'influence (ordonnées du diagramme d'influence) augmentent quand on se rapproche de l'extrémité libre, on conclue que la valeur extrême du moment d'encastrement s'obtient en plaçant le chargement de manière à faire coïncider la force P_1 avec l'extrémité libre de la poutre.

Les lignes d'influence sont d'une utilité autrement plus grande dans les cas complexes. Elles peuvent être également utilisées dans l'étude de l'action des charges réparties. Si la poutre précédente est soumise à une charge répartie uniforme partielle comme indiqué à la figure 3.6a, le moment qu'elle produit dans l'encastrement se calcule en assimilant la charge répartie à une série de forces élémentaires qdx .

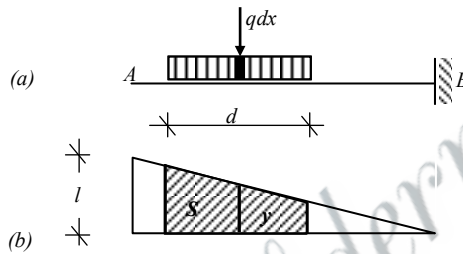


Figure 3.6

$$M_B = - \int_0^d q \cdot y dx \quad (a)$$

Soit :

$$M_B = - \int_0^d q \cdot y dx = -q \int_0^d y dx = -qS$$

où S est l'aire du diagramme d'influence se trouvant sous la charge répartie (Figure 3.6b). Ce résultat peut être utilisé pour calculer le moment quelle que soit la partie de la poutre chargée. Il permet entre autres de déduire que la position critique consiste à placer la charge le plus proche possible de l'extrémité libre. D'autres utilisations des lignes d'influence, comme le calcul des réactions, seront montrées plus loin.

Généralisation

Soit une structure élastique soumise à un système de forces concentrées P_1, P_2, \dots, P_n et une densité de charge q répartie sur un tronçon " d " compris entre les sections d'abscisses x_1 et x_2 , respectivement (Figure 3.7a).

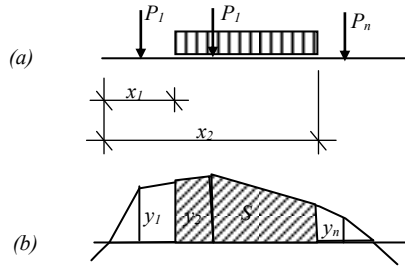


Figure 3.7

La connaissance de la ligne d'influence d'un effet élastique E permet de calculer la valeur de cet effet sous l'action de la sollicitation globale en généralisant les relations (a) et (b) précédentes :

$$E = \sum_{i=1}^n P_i y_i + \int_{x_1}^{x_2} q \cdot y dx \quad (3.2)$$

3.4 LIGNE D'INFLUENCE D'UN DEPLACEMENT

3.4.1 Méthode basée sur le théorème de Betti-Maxwell

Le problème est de tracer la ligne d'influence du déplacement d'une section i d'abscisse $x_i = e$ (constante). Il s'agit donc de calculer le déplacement subi par la section étudiée sous l'action d'une force verticale unité qui se déplace sur la structure considérée.

La méthode intuitive, directe, consiste à construire la ligne d'influence point par point, en plaçant la charge unitaire en diverses positions et en déterminant le déplacement provoqué dans la section i . Cette méthode, tout à fait générale, pouvant s'appliquer quel que soit l'effet élastique et la structure étudiés, est cependant assez fastidieuse à l'exception des cas très simples.

Le théorème de Betti-Maxwell, dont l'une des formes les plus usitées exprime que le déplacement provoqué dans la section i par une charge concentrée unité agissant dans la section j est égal au déplacement apparaissant en j lorsque la même charge est appliquée en i , c'est-à-dire $\delta_{ij}^u = \delta_{ji}^u$, fournit une méthode plus simple.

Pour fixer les idées, considérons l'exemple de la figure 9.8.

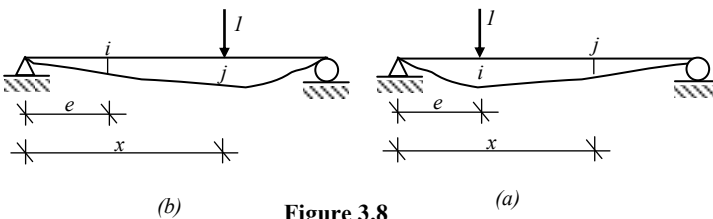


Figure 3.8

Chercher la ligne d'influence du déplacement δ_i , en l'occurrence la flèche de la section i , revient à calculer δ_{ix}^u en faisant varier x de zéro à l ($0 \leq x \leq l$). Or d'après le théorème de Betti-Maxwell $\delta_{ix}^u = \delta_{xi}^u \cdot \delta_{xi}^u$ représentant le déplacement de la section courante d'abscisse x sous l'effet d'une charge unité fixe appliquée en i ; on voit que si x varie de 0 à l , on obtient la déformée de la poutre sous l'action de la force unité agissant en i .

En conclusion, la ligne d'influence du déplacement est donnée par la ligne représentative de ce même déplacement sous l'effet d'une charge unitaire appliquée en i . Ainsi, pour tracer la ligne d'influence du déplacement vertical d'une section i , il suffit de tracer la déformée de la structure sous l'action d'une force verticale unité appliquée à la section i .

Le tracé des lignes d'influence des déplacements se trouve ainsi simplifié puisqu'il est ramené à la recherche de déformées. Par conséquent tous les résultats concernant les déplacements, comme le théorème de Pasternak pour le calcul des déplacements des systèmes hyperstatiques, peuvent être utilisés.

3.4.2 Exemple d'application

Reprenons l'exemple de la poutre-console, supposée de rigidité flexionnelle constante.

On veut tracer la ligne d'influence de la flèche δ de l'extrémité libre A . D'après les résultats du paragraphe précédent, le problème revient à déterminer la déformée de la poutre sous l'action d'une force verticale unité appliquée en A (Figure 3.9a).

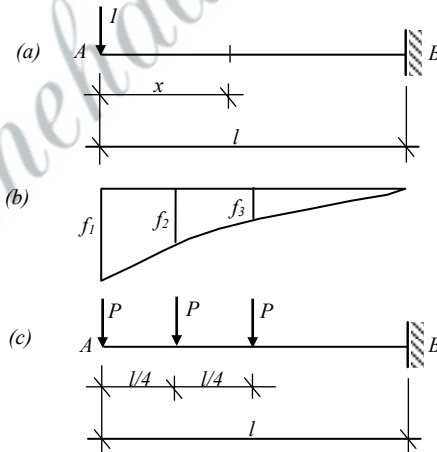


Figure 3.9

Cette déformée est donnée par :

$$\delta_{xA}^u = \frac{1}{EI} (x^3 - 3l^2 x + 2l^3) \quad (a)$$

L'expression obtenue, fonction d'influence, n'est pas une fonction linéaire de x . La ligne d'influence est une parabole cubique (Figure 3.9b).

En guise d'application, calculons la flèche f_A provoquée par le chargement de la figure 3.9c. Les déplacements étant petits, la flèche cherchée peut s'obtenir par superposition des effets de chacune des forces du chargement.

$$f_A = Pf_1 + Pf_2 + Pf_3 = P(f_1 + f_2 + f_3)$$

Les flèches f_1, f_2 et f_3 s'obtiennent par particularisation de l'expression (a) précédente. Il vient :

$$f_A = \frac{Pl^3}{EI} \left(2 + \frac{8l}{64} + \frac{5}{8}\right) = \frac{Pl^3}{64EI} (128 + 8l + 40) = \frac{249}{64} \frac{Pl^3}{EI}$$

3.5 SYSTEMES ISOSTATIQUES

3.5.1 Méthodes de détermination des lignes d'influence

a) Méthode directe

Elle consiste en règle générale à chercher l'expression analytique de l'effet élastique étudié dans la section considérée sous l'effet d'une charge unité. La position de la charge est considérée comme la variable de l'expression cherchée, c'est-à-dire l'équation de la ligne d'influence de l'effet élastique étudié dans la section considérée. La ligne d'influence est tracée à partir des valeurs obtenues (coefficients d'influence) pour plusieurs positions de la cause (charge).

En verra plus loin que le tracé des lignes d'influence peut être grandement simplifié dans de nombreux cas. Par exemple, l'effet élastique est souvent une fonction linéaire de la position (abscisse) de la cause. Dans ce cas, la ligne d'influence est une droite, ou plusieurs segments de droite, qu'on peut construire à raison de 2 points par segment. Par ailleurs, les conditions de fixation de la structure donnent souvent des indications précieuses qui facilitent le tracé.

b) Méthode cinématique

Elle permet d'obtenir directement la forme exacte de la ligne d'influence. La détermination d'une seule ordonnée suffit pour avoir l'échelle correcte du diagramme d'influence.

La méthode est basée sur le théorème des travaux virtuels. Pour obtenir la ligne d'influence d'une grandeur - R, M, N, T - on supprime la liaison lui correspondant et on la remplace par une inconnue (ou 2 inconnues égales et opposées s'il s'agit d'une liaison interne). Avec la suppression d'une liaison, externe ou interne, le système

isostatique devient alors un mécanisme à un degré de liberté, pouvant se déplacer sans se déformer (comme un corps indéformable).

On applique ensuite au mécanisme un déplacement virtuel, c'est-à-dire très petit et compatible avec les liaisons restantes. La configuration obtenue représente la ligne d'influence cherchée. L'échelle réelle du diagramme s'obtient en calculant l'ordonnée d'un point.

3.5.2 Ligne d'influence d'une réaction d'appui

Les lignes d'influence offre un moyen assez simple de calcul ou de vérification des réactions. Considérons la poutre bi-articulée de la figure 9.10a.

Les réactions R_A et R_B sont données par :

$$R_A = l \cdot \frac{(l-x)}{l} \quad \text{et} \quad R_B = l \cdot \frac{x}{l} \quad (a)$$

où $\frac{(l-x)}{l}$ et $\frac{x}{l}$ sont les coefficients d'influence de R_A et R_B , respectivement. Ils sont représentés graphiquement par les lignes d'influence ao (Figure 3.10b) et ob (Figure 3.10c).

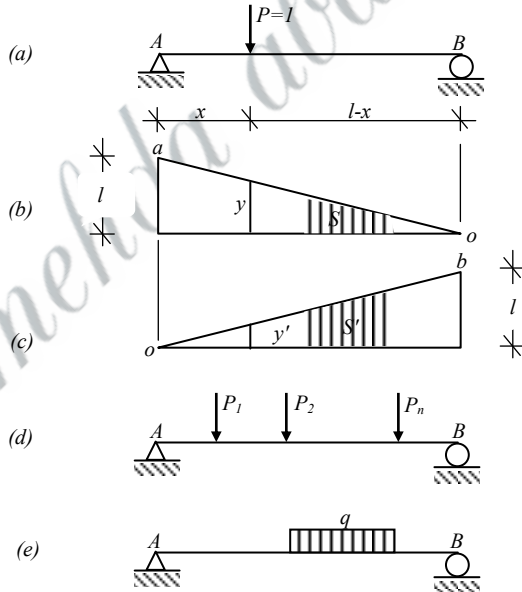


Figure 3.10

Pour une charge concentrée P , les réactions en A et B s'obtiennent en multipliant les coefficients d'influence correspondants, y et y' , respectivement, par P (Figures

3.10b et c). Dans le cas d'un système de plusieurs forces concentrées P_1, P_2, \dots, P_n (Figure 3.10d), on a :

$$R_A = \sum_{i=1}^n P_i y_i \quad \text{et} \quad R_B = \sum_{i=1}^n P_i y'_i$$

Si la poutre supporte une charge q uniformément répartie sur un tronçon (Figure 3.10e), la réaction d'un appui est obtenue en multipliant par q l'aire du diagramme d'influence de la réaction considérée délimitée par le tronçon chargé ;

$$R_A = qS \quad \text{et} \quad R_B = qS'$$

Par exemple, dans le cas d'une charge q répartie sur la moitié gauche de la poutre on trouve :

$$R_A = q \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3ql}{8} \quad \text{et} \quad R_B = q \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{ql}{8}$$

En observant que les coefficients d'influence sont numériquement égaux aux réactions apparaissant dans les appuis sous une charge unité, on peut déduire une méthode très simple de construction des lignes d'influence. Considérons par exemple la poutre de la figure 3.11a et intéressons-nous à la ligne d'influence de la réaction en A . Quand la charge mobile, supposée dirigée vers le bas, est sur A , la réaction en cet appui vaut 1 , la force étant reprise en totalité par cet appui. Lorsque la charge se trouve en B ou C , la réaction en A est nulle pour la même raison invoquée précédemment. Sachant par ailleurs que la réaction est une fonction linéaire de x (position de la charge par rapport à une extrémité de la poutre), on trace aisément la ligne d'influence qui est composée de segments de droite passant par les ordonnées 1 en A et 0 en B et C . L'unique façon de construire la ligne d'influence de R_A est celle indiquée à la figure 3.11b.

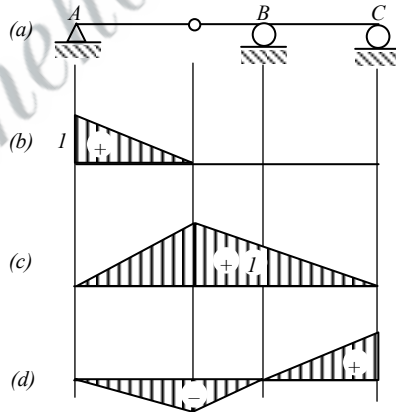


Figure 3.11

Pour la ligne d'influence de R_B , elle passe par 0 en A , 1 en B et 0 à nouveau en C (Figure 3.11c). Le même procédé est utilisé pour tracer la ligne d'influence de la réaction de l'appui C (Figure 3.11d).

On notera que la somme des ordonnées des lignes d'influence des réactions de la poutre est égale à 1 quelle que soit la section considérée (équilibre de translation verticale). Cette condition offre un moyen de contrôle des diagrammes d'influence obtenus. Si par exemple en une section quelconque cette somme est différente de 1 ou que son signe est tel que la charge unité n'est pas équilibrée, c'est qu'il y a erreur. Cette méthode est d'une grande utilité dans le calcul des réactions des poutres isostatiques complexes avec plusieurs charges (poutres cantilevers notamment).

Méthode cinématique

Elle rappelle beaucoup la méthode précédente. Considérons la poutre bi-articulée de la figure 3.12a. Pour tracer la ligne d'influence de la réaction de l'appui A , on supprime la liaison et on la remplace par une force verticale R_A puis on donne un déplacement vertical au mécanisme obtenu qui peut tourner autour de l'appui B (Figure 3.12b).

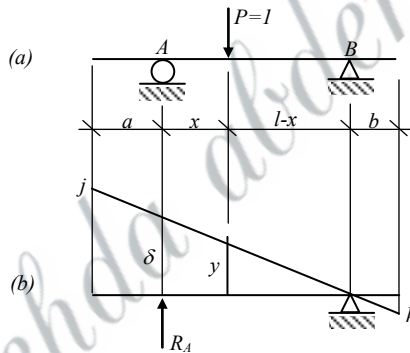


Figure 3.12

L'équation des travaux virtuels s'écrit :

$$R_A \delta - 1 \cdot y = 0 \Rightarrow R_A = \frac{y}{\delta}$$

où δ est le déplacement du point d'application de la réaction R_A . La droite jk (Figure 3.12b) donne la forme exacte de la ligne d'influence de la réaction. Pour avoir l'échelle correcte, il suffit de prendre $\delta = 1$. La méthode est d'un grand service dans le cas de structures complexes. Considérons la poutre cantilever de la figure 3.13a.

Pour construire la ligne d'influence de la réaction de l'appui B par exemple, on supprime l'appui et on donne à la section B un déplacement unité positif (vers le haut). La nouvelle configuration de la poutre ainsi obtenue définit la ligne d'influence

cherchée (Figure 3.13b). De la même manière, on trace les lignes d'influence des autres réactions.

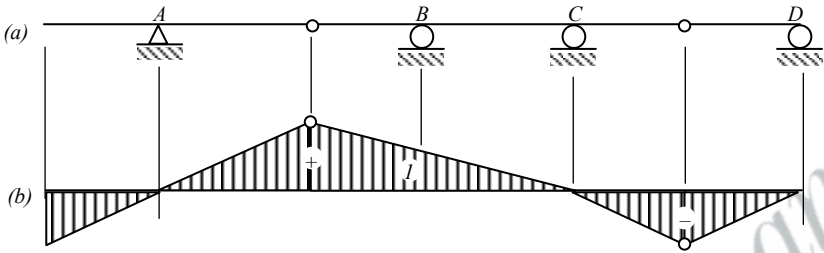


Figure 3.13