الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Benyahia- Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Automatique

COURS DE

SYSTEMES LINEAIRES MULTIVARIABLES

Destiné aux étudiants de première année Master en Automatique (AS et AII)

Naamane BOUNAR
Maitre de conférences B

Année Universitaire 2017-2018

Avant propos

Ce cours intitulé *Systèmes Linéaires Multivariables* s'adresse essentiellement aux étudiants de première année Master en Automatique. Le cours est organisé en six chapitres. Le premier chapitre est dédié essentiellement à des notions générales de l'automatique linéaire ainsi qu'un bref rappel sur le calcul matriciel. Le second chapitre est consacré aux différents types de représentations des systèmes linéaires. Le troisième chapitre traite de la commandabilité et l'observabilité des systèmes linéaires. Le quatrième chapitre est réservé à la représentation des systèmes linéaires multivariables par matrices de transfert. Le cinquième chapitre est dédié à la commande par retour d'état des systèmes linéaires multivariables. Enfin, le dernier chapitre traite de la commande par retour de sortie à base d'observateur d'état. Le lecteur trouvera dans chaque chapitre des exemples avec solutions permettant l'assimilation des notions théoriques introduites. Le lecteur trouvera aussi à la fin de chaque chapitre une série d'exercices.

Table des matières

Chapitre 1 : Introduction

Chapitre 2: Représentation des systèmes multivariables

Chapitre 3 : Commandabilité et observabilité

Chapitre 4 : Représentation des systèmes multi variables par matrice de transfert

Chapitre 5: Commande par retour d'état des systèmes multivariables

Chapitre 6: Observateur d'état et commande par retour de sortie des systèmes multivariables

Chapitre 1
Introduction

1. Objectif

Ce chapitre a pour objectif de présenter un rappel de quelques notions fondamentales sur les systèmes dynamiques et certains outils mathématiques indispensables pour la compréhension du reste de cours.

2. Définitions

2.1 Système

Un système est un ensemble d'objets interconnectés dans le but de réaliser une tache spécifique. Un système communique avec l'extérieur par l'intermédiaire de grandeurs, fonction du temps appelés signaux.

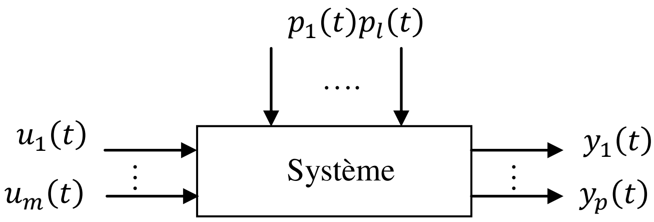


Fig 1.1 Schéma bloc d'un système

Parmi les grandeurs physiques mises en jeu dans un système, l'on peut distinguer :

a) Grandeurs d'entrée (grandeur exogène): une grandeur d'entrée est une grandeur qui agit sur le système, il en existe deux types :

- ***Entrées maitrisables (ou simplement entrées*** $u_1(t), \dots, u_m(t)$***)***: excitations externes appliquées au système afin de contrôler l'évolution des grandeurs de sortie.
- ***Entrées non maitrisables (perturbations*** $p_1(t), \dots, p_l(t)$***)***: grandeurs physiques imprévisibles pouvant s'opposer à l'action du système.

b) Grandeurs de sortie (réponses $y_1(t), \dots, y_p(t)$***):*** grandeurs contrôlées par l'effet des entrées.

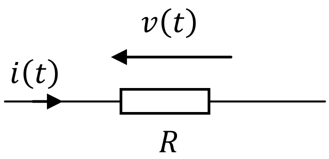
Avant d'envisager la commande d'un système, il est nécessaire d'établir un modèle traduisant le comportement de ce dernier. Modéliser un système consiste à élaborer un objet mathématique reliant l'entrée du système à sa sortie permettant de :

1- décrire et prédire le comportement du système en réponse à des excitations externes (entrées), c'est ce qu'on appelle l'étape *d'analyse.*
2- d'étudier et d'appliquer des techniques pour améliorer son comportement (ses réponses), c'est ce qu'on appelle l'étape de *synthèse* ou de *conception* de la loi de commande.

2.2 Systèmes statiques

Ce sont des systèmes décrits par des équations algébriques. La réponse de ces systèmes à une excitation extérieure (entrée) est instantanée. Le temps *t* (variable indépendante) n'intervient pas dans le fonctionnement de ces systèmes.

Exemple 1.1 : Résistance électrique pure $v(t) = Ri(t) \Rightarrow \; i(t) = \frac{1}{R}v(t)$

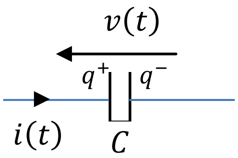


Entrée du système $u(t) = v(t)$: tension aux bornes de la résistance R.
Sortie du système $y(t) = \; i(t)$: courant qui traverse la résistance R.

2.3 Systèmes dynamiques

Ce sont des systèmes décrits par des équations différentielles. Ces systèmes ont une mémoire, c.-à-d. ont une réponse temporelle qui dépond de l'entrée présente mais également des réponses et/ou entrées passés.

Exemple 1.2 : condensateur électrique de capacité C



Entrée du système $u(t) = v(t)$: tension aux bornes du condensateur C.
Sortie du système $y(t) = \; q(t)$: charge du condensateur. $i(t)$ est l'intensité de courant.
$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt,\, i(t) = \frac{dq}{dt}$

Alors, la réponse est: $q(t) = q_0 + C\,v(t)$

où $q_0 = q(t = 0)$ est la charge du condensateur à l'instant initial.

2.4 Système linéaire

Un système est dit *linéaire* si les relations reliant ses entrées et ses sorties peuvent se mettre sous forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants. Les systèmes linéaires se caractérisent par les deux propriétés suivantes :

- ***Proportionnalité***

  Si $y(t)$ est la réponse du système à l'entrée $u(t)$, alors $\alpha\, y(t)$ est la réponse du système à l'entrée $\alpha\, u(t)$, où α est un scalaire.

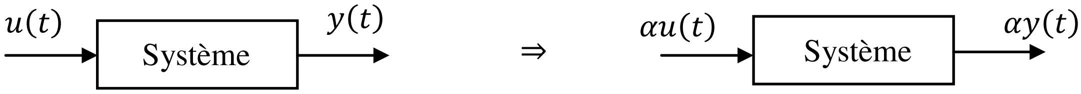


Fig.2 Principe de proportionnalité.

- ***Additivité ou superposition***

  Si $y_1(t)$ est la réponse du système à l'entrée $u_1(t)$ et si $y_2(t)$est la réponse du système à l'entrée $u_2(t)$, alors $y_1(t) + y_2(t)$est la réponse du système à l'entrée $u_1(t) + u_2(t)$.

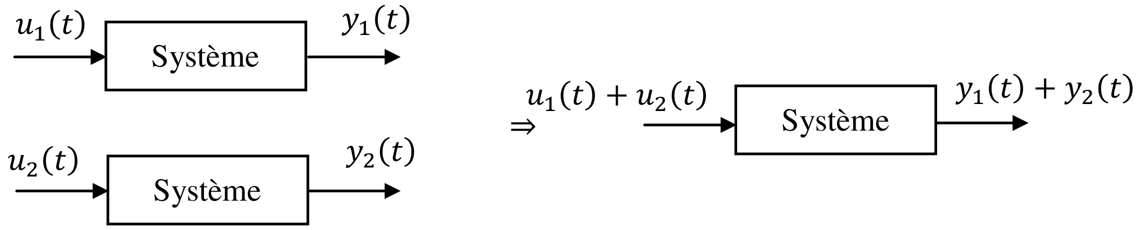


Fig.3 Principe de superposition.

On oppose les systèmes linéaires aux systèmes non linéaires. Il est à noter qu'aucun système physique n'est strictement linéaire, mais, certains systèmes non linéaires peuvent être considérés comme linéaires dans une certaine zone de fonctionnement.

2.5 Système causal

La causalité signifie « l'effet ne peut pas précéder la cause ». Le signal d'entrée d'un système représente la cause, et la réponse du système représente l'effet. Ainsi, « un système est dit causal si sa réponse temporelle dépond seulement des valeurs présentes et passées de sa grandeur d'entrée, c.-à-d., la réponse $y(t)$ à l'instant t dépond seulement des valeurs de l'entrée $u(\tau)$ où $\tau \leq t$. Ces systèmes sont aussi dits *systèmes physiquement réalisables*.

2.6 Système invariant

Un système est dit *invariant* (stationnaire) si la relation entre son entrée et sa sortie est indépendante du temps *t* (c.-à-d., les paramètres du système sont constants).

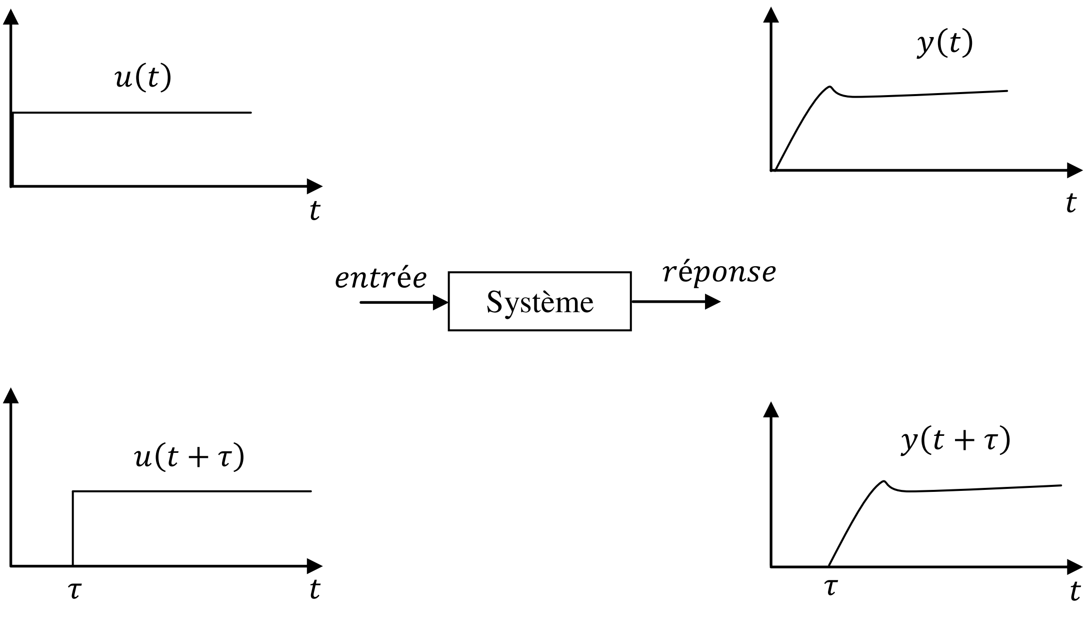


Fig.4 Comportement d'un système invariant.

2.7 Système continu / Système échantillonné

Un système est dit continu si les variations des grandeurs le caractérisant sont des fonctions de type $f(t)$ où t est une variable continu (le temps en général). Les systèmes continus s'opposent aux systèmes discrets (échantillonnés).

2.8 Système déterministe / Système aléatoire

Un système est dit *déterministe* si pour chaque entrée, il n'existe qu'une seule sortie possible. Dans le cas contraire on dit que le système est *aléatoire*, c.-à-d. pour chaque entrée, il existe plusieurs sorties possibles, chacune d'elles est affectée à une probabilité.

2.9 Système monovariable /Système multivariable

Un système est dit *monovariable* ou SISO (Single Input Sigle Output) s'il possède une seule entrée et une seule sortie. Un système est dit *multivariable* ou MIMO (Multiple Input Multiple Output) s'il possède plusieurs entrées et /ou plusieurs sorties.

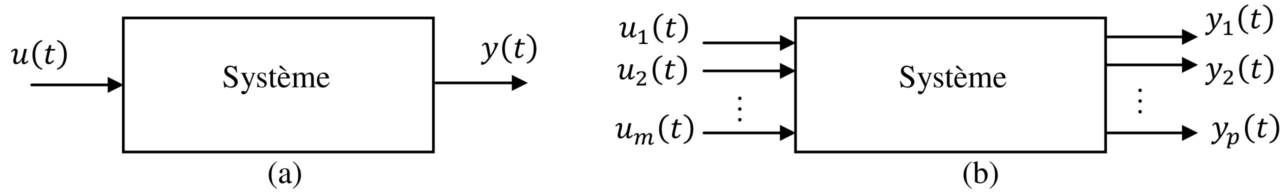


Fig.5 Système monovariable (a), système multivariable (b).

Remarque 1.1: Dans le cadre de ce cours on ne n'intéresse qu'aux systèmes linéaires, continus, invariants, causaux et déterministes.

3. Rappel sur le calcul matriciel

3.1 Matrice

Une matrice de dimensions nxm (notée A_{nxm}) est un tableau de nombres à *n* lignes et *m* colonnes. Les nombres qui composent la matrice (a_{ij}, où $i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$) sont appelés éléments ou coefficients de la matrice.

$$A_{nxm} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Matrice ligne

Une matrice ligne A_{1xm}est une matrice ayant une seule ligne et *m* colonnes.

$$A_{1xm} = [a_{11} \quad \cdots \quad a_{1m}] \tag{1.2}$$

Matrice colonne

Une matrice colonne A_{nx1}est une matrice ayant une seule colonne et *n* lignes.

$$A_{nx1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Matrice carrée

Une matrice carrée est une matrice qui possède le même nombre de lignes et de colonnes (c.-à-d. $n = m$).

Diagonale d'une matrice

La diagonale principale (ou simplement la diagonale) d'une matrice est l'ensemble des éléments a_{ii} de la matrice A.

Matrice diagonale

Une matrice diagonale est une matrice carrée dont les éléments en dehors de la diagonale principale sont nuls. Les éléments de la diagonale peuvent être ou ne pas être nuls.

Matrice unité (matrice identité)

La matrice unité ou matrice identité est une matrice diagonale ne possédant que des 1 sur la diagonale ($a_{ii} = 1$).

3.2 Opérations élémentaires sur les matrices

3.2.1 Addition de deux matrices

On ne peut additionner ou soustraire que deux matrices de même dimension. Soient deux matrices A et B de même dimension.

Addition: $C = A + B$ où $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
Soustraction : $D = A - B$ où $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

3.2.2 Transposée d'une matrice

On appelle transposée d'une matrice A de dimension nxm la matrice notée A^T de dimension mxn obtenue en permettant les lignes et les colonnes

$$A_{nxm} = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

La transposée de A est :

$$A_{mxn} = \left[a_{ji}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

3.2.3 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Le produit d'une matrice par un scalaire est la matrice obtenue en multipliant chaque élément de la matrice par ce scalaire.

3.2.4 Multiplication de deux matrices

La multiplication de deux matrices A et B n'est possible que si le nombre de colonnes de A est egal au nombre de lignes de B. La matrice obtenue C est une matrice possédant le même nombre de lignes de la matrice A et le même nombre de colonnes de la matrice B.

$$C_{nxp} = A_{nxm} \text{ x } B_{mxp} \tag{1.6}$$

Exemple 1.3 : soient deux matrices A et B.

$$A_{2\text{x}3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B_{3\text{x}2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}, C_{2\text{X}2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

avec :

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$, $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$,
$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$, $c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$.

3.3 Trace d'une matrice

La trace d'une matrice est la somme des éléments de la diagonale principale de la matrice ($\sum a_{ii}$).

3.4 Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Soit A une matrice carrée d'ordre 2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Le déterminant de A noté $det(A)$ se calcule de la manière suivante :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{1.8}$$

3.5 Mineurs

Le mineur M_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la *i*^eme^ ligne et la *j*^eme^ colonne de A.

Exemple 1.4 : soit la matrice carrée d'ordre 3.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{22} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

3.6 Cofacteur

Le cofacteur noté D_{ij} d'une matrice A est défini par la relation :

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{1.9}$$

Remarque 1.2 : Nous constatons que le mineur et le cofacteur ont la même valeur numérique, mais le signe peut être différent.

3.7 Déterminant d'une matrice d'ordre n

Soit A une matrice carrée et D_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant la méthode suivante :

1- Choisir une ligne ou une colonne de A : pour simplifier les calculs, on choisit la ligne ou la colonne contenant le plus grand nombre de zéros.
2- Multiplier chaque élément a_{ij} de la ligne ou la colonne choisie par le cofacteur D_{ij} correspondant
3- Faire la somme de ces résultats.

Exemple 1.4 : Calculer le déterminant de la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

En choisissant la première ligne :

$$\det(A) = a_{11}D_{11} + a_{11}D_{12} + a_{13}D_{13}$$
$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

En choisissant la troisième colonne :

$$\det(A) = a_{13}D_{13} + a_{23}D_{23} + a_{33}D_{33}$$
$$= a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Autre méthode pour calculer le déterminant

1- On affecte à chacun des éléments de la matrice un signe +/-.
2- On associe un signe positif à la position de a_{11}, puis on alterne les signes en se déplaçant horizontalement ou verticalement.
3- On choisit une ligne ou une colonne de A : pour simplifier les calculs, on choisit la ligne ou la colonne contenant le plus grand nombre de zéros.
4- On multiplie chaque élément a_{ij} de la ligne ou la colonne choisie par son mineur correspondant.
5- Faire la somme ou la différence de ces résultats selon le signe affecté aux éléments lors de la deuxième étape.

Exemple 1.5 : Calculer $det(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} {a_{11}}^{+} & {a_{12}}^{-} & {a_{13}}^{+} \\ {a_{21}}^{-} & {a_{22}}^{+} & {a_{23}}^{-} \\ {a_{31}}^{+} & {a_{32}}^{-} & {a_{33}}^{+} \end{bmatrix}$$

En choisissant la première ligne :

$$det(A) = a_{11}M_{11} + a_{11}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

En choisissant la deuxième colonne :

$$\det(A) = a_{13}M_{13} + a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}$$

$$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

3.8 Matrice adjointe (comatrice)

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

On appelle matrice ajointe de A, la matrice carrée d'ordre n notée $adj(A)$ définie par :

$$adj(A) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{21} & \cdots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n1} & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

$D_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ est le cofacteur de l'élément a_{ij}.

3.9 Inverse d'une matrice

Une matrice carrée A de dimension nxn (c.-à-d. d'ordre n) est dite inversible (ou régulière ou non singulière) s'il existe une matrice B d'ordre n appelée matrice inverse de A.

$$B = A^{-1} \tag{1.12}$$

tel que $A\text{x}B = B\text{x}A = I_n$ où I_n est la matrice identité d'ordre n.

La formule générale de l'inverse d'une matrice est :

$$A^{-1} = \frac{[adj(A)]^T}{det(A)} \tag{1.13}$$

où :
$det(A) \neq 0$ est le déterminant de A.
$adj(A)$ est la matrice adjointe de A

3.10 Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Si A est une matrice carrée $(n \times n)$ quelconque, les n valeurs propres *distincts* de A sont notés λ_i et sont associées aux n vecteurs propres V_i par :

$$AV_i = \lambda_i V_i \;\; i = 1 \dots n \tag{1.14}$$

Les valeurs propres de A sont les scalaires tels que:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{1.15}$$

où I est la matrice identité d'ordre n.

Cette dernière équation fonction de λ et de degré n est dite équation caractéristique de A.

Exemple 1.6 : calculer les valeurs et les vecteurs propres de la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1.$

Vecteurs propres

$Av_1 = \lambda_1 v_1 \,,\;\; v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow x_1=0, x_2=0 \text{ et on pose } x_2=1\Rightarrow v_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$Av_2=\lambda_2 v_2\,,\ \ v_2=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\Rightarrow y_2=-y_1, y_1=-y_2, y_2=-y_3 \text{ et on pose } y_1=1\Rightarrow y_2=-1, y_3=1$$

$$\Rightarrow v_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$Av_3=\lambda_3 v_3\,,\ \ v_3=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}\Rightarrow y_2=y_1, y_1=y_2, y_2=y_3 \text{ et on pose } y_1=1\Rightarrow y_2=1, y_3=1$$

$$\Rightarrow v_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

3.11 Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice A d'ordre n et défini comme étant le nombre de lignes ou de colonnes de A qui sont linéairement indépendants.

- $\det(A)\neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A)=n$ dans ce cas A est dite de *rang plein*.
- $\det(A)=0 \Leftrightarrow \text{rang}(A)<n$.

4. Exercices

Exercice 01

Soient deux matrices A et B.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\2 & 3 & -2\\0 & -1 & -1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\2 & 1 & 3\\-4 & -2 & -6\end{bmatrix}$$

1- Calculer la trace de A et B.
2- Calculer $A+B$,$+B$, $A-B$ et $A\text{x}B$.
3- Calculer la transposée de A et B.
4- Calculer le rang de A et B.

Exercice 02

Soient deux matrices A et B.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\2 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

1- Calculer les cofacteur de la matrice A et B .

2- Calculer A^{-1} et B^{-1} .
3- Calculer AA^{-1} et BB^{-1} .
4- Calculer le rang de A et B.

Exercice 03

Soit les deux matrices A et B.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1- Calculer les valeurs propres de A et B.
2- Calculer les vecteurs propres associés aux valeurs propres de chacune des deux matrices A et B.

Chapitre 2
Représentation des systèmes multivariables

1. Introduction

Les méthodes d'analyse et de commande des systèmes dynamiques linéaires étudiées jusqu'au présent reposent sur une représentation externe du système par équations différentielles ou fonction de transfert. En effet, les difficultés liées à l'emploi des équations différentielles (représentation temporelle), notamment lors de l'étude de systèmes d'ordre élevé (supérieur à deux), ont été à l'origine du développement de la transformée de Laplace conduisant à une représentation par fonction de transfert. L'utilité de la représentation par fonction de transfert a été montrée lors de l'étude de la réponse fréquentielle (lieu Bode, diagramme de Nyquist…etc) et la stabilité du système. Cependant, cette représentation présente deux inconvénients majeurs :

- C'est une représentation obtenue en supposant les conditions initiales nulles (système initialement au repos). Ceci n'est pas toujours vrai et ces conditions initiales jouent souvent un rôle très important dans l'étude des systèmes dans le domaine temporel où la réponse dépend du passé du système.
- C'est une représentation qui s'adapte mal pour décrire les systèmes MIMO.

Pour de telles raisons, les théories de commande avancée utilisent un type de modélisation moderne dite *représentation d'état* (ou *représentation interne*). Ce type de modèle fut popularisé dans les années 60 même si son origine est plus lointaine, il s'agit d'un modèle qui prend en compte la dynamique interne (état) du système et ne se limite pas à la description d'un comportement de type boite noire (entrée/ sortie).

2. Différentes représentations des systèmes

Le schéma ci-dessous montre les différents types de représentations des systèmes dynamiques linéaires en considérant les deux cas monovariable et multivariable.

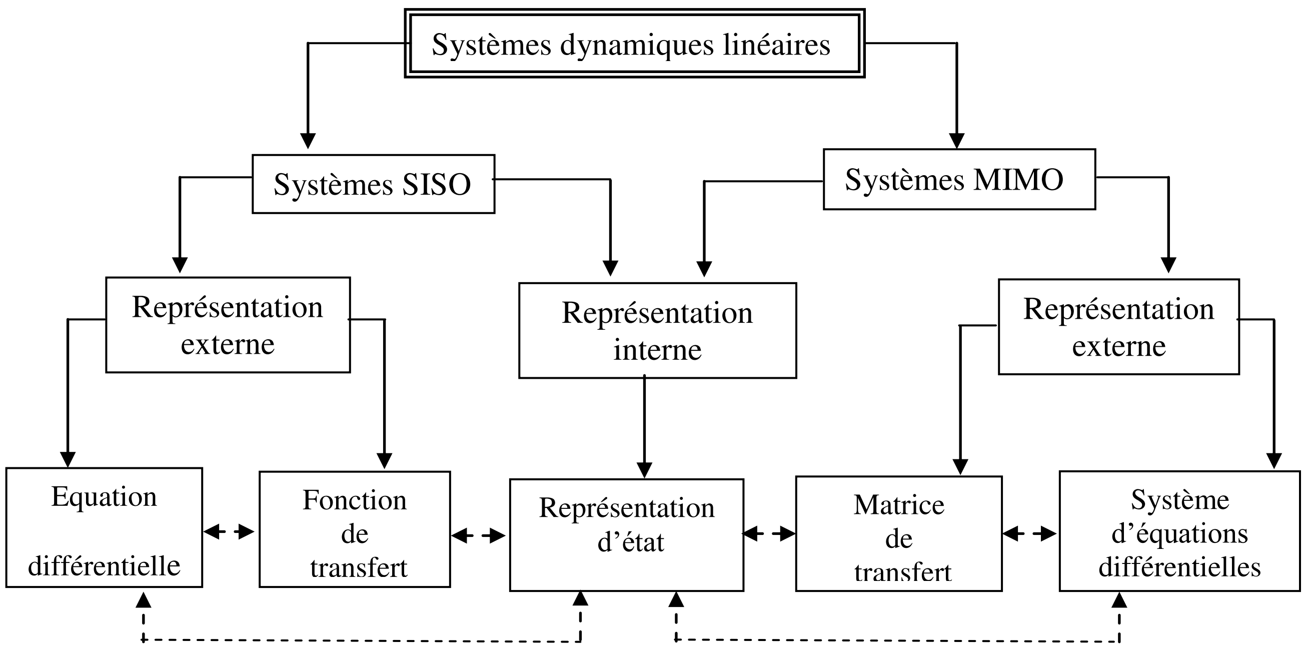


Fig.2.1 Différents types de représentations des systèmes.

Remarque 2.1 : Dans le cadre de ce cours, on ne considère que les systèmes dynamiques linéaires invariants et continus.

3. Représentation des systèmes monovariables (SISO)

3.1 Représentation externes

Cette représentation utilise directement la relation entrée/sortie considérant le système comme une boite noire.

3.1.1 Equation différentielle

Soit un système linéaire invariant monovariable d'ordre n.

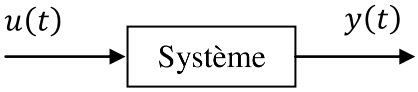


Fig.2.2 Schéma bloc d'un système monovariable

Un tel système est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{n-1}\frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t) \qquad (2.1)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système, et $n \geq m$ (système causal).

3.1.2 Fonction de transfert

La fonction de transfert ou transmittance d'un système donné est le rapport entre la transformée de Laplace de sa sortie et celle de son entrée. En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (2.1) et en prenant les conditions initiales nulles, on obtient :

$$Y(s)[s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0] = U(s)[b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0] \quad (2.2)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad (2.3)$$

3.2 Représentation internes (ou d'état)

Le principe général de la représentation d'état consiste à décrire un système en considérant sa *dynamique interne* et pas seulement une relation entre son entrée et sa sortie (comme le fait la fonction de transfert). Ainsi, il convient de redonner de l'importance à des grandeurs qui ne sont ni entrée, ni sortie, tout en prenant en compte l'ensemble des phénomènes dynamiques et statiques qui confère au système son comportement. Une telle préoccupation conduit aux définitions suivantes

3.2.1 Définitions

État : l'état à l'instant t_0 d'un système d'ordre n représente l'ensemble de n informations que l'on doit posséder sur le système à cet instant pour pouvoir déterminer son évolution ultérieur ($t > t_0$), à partir de la seule connaissance de l'entrée ultérieure (pour $t > t_0$).

Variables d'état : l'ensemble de ces informations constitue les variables d'état du système à l'instant t_0: $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$.

Vecteur d'état : les variables d'état sont toujours rassemblées dans un vecteur x nommé vecteur d'état, ainsi à $t = t_0$, on aura $x(t_0) = [x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]^T$, on peut dire que les variables d'état représentent l'évolution des conditions initiales, ou encore qu'elles résument tous le passé du système, les variables d'état sont la mémoire du passé.

Espace d'état : Il s'agit tout simplement de l'espace vectoriel dans lequel le vecteur d'état x est susceptible d'évoluer, à chaque instant le vecteur x étant associé à un point de cet espace. Cet espace est donc R^n.

Dans la plupart des cas, l'évolution en fonction du temps du système peut être décrite par les deux équations (équation d'état et équation de sortie) suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x,u,t) \\ y(t) &= g(x,u,t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dans le cas où le système considéré est linéaire, la représentation d'état se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Si le système est supposé, en outre invariant (stationnaire), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

où :

$x(t) \in R^n$	:	Vecteur d'état
$y(t) \in R$	:	Vecteur de sortie (vecteur de mesure)
$u(t) \in R$	:	Vecteur d'entrée (vecteur de commande)
$A \in R^{nxn}$	:	Matrice d'évolution ou dynamique
$B \in R^{nx1}$	:	Vecteur de commande (vecteur d'entrée)
$C \in R^{1xn}$		Vecteur d'observation (vecteur de sortie)
$D \in R$	:	Constante de transmission directe (souvent nul).

Exemple 2.1 : Considérons un moteur à courant continu (MCC) commandé par la tension $u(t)$ aux bornes de l'inducteur (stator) et supposons qu'il fonctionne en régime linéaire (courant de l'induit constant). Trouver une représentation d'état pour le MCC. La sortie étant la vitesse de rotation $y(t)$.

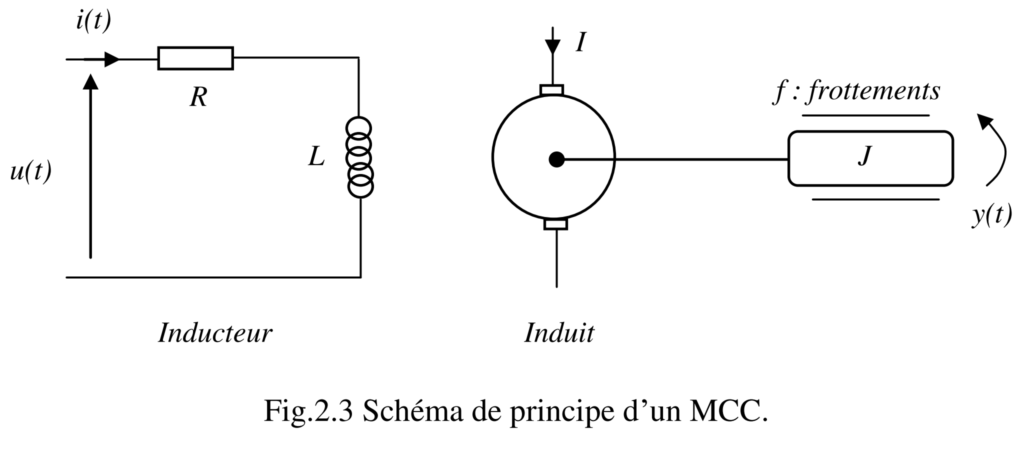


Fig.2.3 Schéma de principe d'un MCC.

Le moteur admet trois équations :

Equation électrique :

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} \tag{2.7}$$

Equation mécanique :

$$T(t) = fy(t) + J\frac{dy(t)}{dt} \tag{2.8}$$

Equation de couplage :

$$T(t) = Ki(t) \tag{2.9}$$

où $i(t)$ est le courant inducteur, $T(t)$ est le couple, f est le coefficient de frottement visqueux et K est la constante de couple.

Par le jeu de substitution, on peut éliminer le couple et le courant et on obtient l'équation différentielle d'ordre 2 régissant le fonctionnement du moteur.

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \tag{2.10}$$

avec : $a_1 = (Lf + JR)/JL, a_0 = Rf/JL, b_0 = K/JL$.

On pose :
$x_1(t) = y(t)$
$x_2(t) = \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = b_0u(t) - a_1\dot{y}(t) - a_0y(t)$
$= b_0u(t) - a_1x_2(t) - a_0x_1(t)$

On a alors :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = b_0u(t) - a_1x_2(t) - a_0x_1(t)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ b_0\end{bmatrix}u(t) \tag{2.11}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Les variables d'état du moteur sont: la vitesse $x_1(t)$ et l'accélération $x_2(t)$.

Remarques 2.2: Un système donné possède une fonction de transfert unique, par contre, il possède une infinité de représentations d'état (une nouvelle représentation d'état s'obtient, par exemple, en permutant les définitions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$).

Exemple 2.2 : Dans l'exemple du MCC, on peut choisir comme variables d'état le courant et la vitesse de rotation :

A partir de (2.7) on aura :

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{u(t)}{L} - \frac{R}{L}i(t) \tag{2.13}$$

A partir des équations (2.8) et (2.9), on obtient:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{K}{J}i(t) - \frac{f}{J}y(t) \tag{2.14}$$

Posons : $x_1(t) = i(t)$ et $x_2(t) = y(t)$

Sous forme matricielle, (2.13) et (2.14) donne :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-R/L & 0\\ K/J & -f/J\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/L\\ 0\end{bmatrix}u(t) \tag{2.15}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Remarque 2.3 : Toutes les représentations d'état d'un même système possèdent le même *nombre minimal* de variable d'état, ce *nombre minimal* est égal à l'ordre n du système.
Remarque 2.4 : Les variables d'état peuvent avoir un sens physique ou non.

4. Représentation des systèmes multivariables (MIMO)

En général, la représentation des systèmes multivariable se fait par extension des techniques du cas monovariable.

4.1 Représentation externes

4.1.1 Système d'équations différentielles

Un système linéaire invariant multivariable d'ordre n possédant m entrées et p sorties peut être décrit par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Apres application des lois de la physique, de nombreux systèmes multivariables peuvent être décrits par des équations différentielles et algébriques de la forme :

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t)\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t)\end{cases}$$
$$\begin{cases}y_1(t) = h_1(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t)\\ \quad\vdots\\ \dot{y}_p(t) = h_p(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t)\end{cases} \tag{2.17}$$

où $u_i(t), i = 1 \dots m$ et $y_j(t), j = 1 \dots p$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système. Dans le cadre de notre cours les fonctions f_i et h_i sont linéaires.

4.1.2 Matrice de transfert

Dans le cas SISO, la fonction reliant l'entrée et la sortie du système est appelée fonction de transfert, dans le cas MIMO, on a plusieurs fonctions de transfert représentant l'effet de chaque entrée sur chaque sortie. L'ensemble de ces fonctions rangées en tableau constitue la matrice de transfert du système.

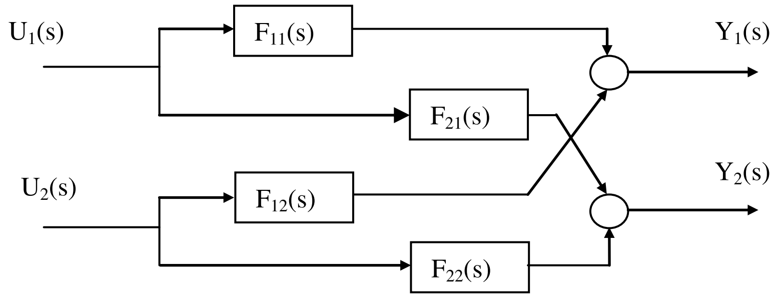


Fig.2.4 Schéma bloc d'un système multivariable à deux entrées et deux sorties

Cas des systèmes SISO:

$$F(S) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{2.18}$$

Cas des systèmes MIMO:

$$\begin{bmatrix}Y_1(s)\\ Y_1(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}F_{11}(s) & F_{12}(s)\\ F_{21}(s) & F_{22}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1(s)\\ U_2(s)\end{bmatrix} \tag{2.19}$$

4.2 Représentation internes (ou d'état)

La représentation d'état étant particulièrement adaptés aux systèmes multivariables, elle est obtenue à partir des autres représentations (particulièrement à partir de la matrice de transfert). Un système linéaire multivariable et invariant possédant *m* entrées et *p* sorties, peut être représenté par:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

où :

$x(t) \in R^n$: Vecteur d'état
$u(t) \in R^m$: Matrice d'entrée (ou de commande),
$y(t) \in R^p$: Matrice de sortie (ou de mesure),
$A \in R^{nxn}$: Matrice dynamique (ou d'évolution),
$B \in R^{nxm}$: Matrice de commande (ou d'entrée),
$C \in R^{pxn}$ Matrice d'observation (ou de sortie),
$D \in R^{pxm}$: Matrice de transmission directe.

Remarque 2.6 : Différentes méthodes de passage de la représentation par matrice de transfert à la représentation d'état seront présentées dans le quatrième chapitre.

5. Représentation analogique des modèles d'état

Soit la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Le schéma analogique de cette représentation est le suivant :

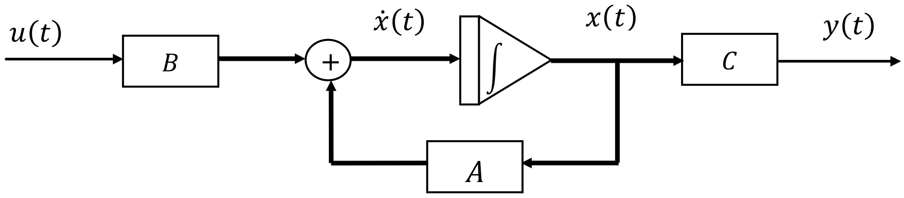


Fig.2.5 Schéma analogique d'un modèle d'état.

Exemple 2.3 : Pour la représentation d'état du moteur :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t),\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Le schéma analogique correspondant est le suivant :

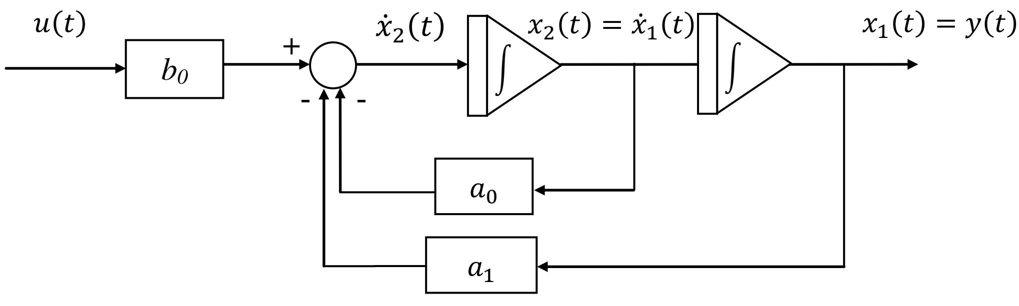


Fig.2.6 Schéma analogique du MCC.

6. Avantages de la représentation d'état

- C'est une représentation qui s'adapte bien aux systèmes multivariables, contrairement, à la représentation classique par fonction de transfert qui ne s'applique que dans le cas monovariable.
- C'est une représentation interne permettant d'accéder aux grandeurs internes (variables d'état) du système, on est capable de suivre, à tout instant, l'évolution de chacune des variables internes, alors que la représentation par fonction de transfert n'aurait fourni que la sortie.
- Dans la représentation d'état les conditions initiales apparaissent explicitement, comme dans toute équation différentielle, au contraire, la représentation externe par fonction de transfert impose que les conditions initiales soient nulles (ceci n'est pas toujours vérifié en réalité).

7. Résolution de l'équation d'état

Considérons un système d'ordre *n* représenté par le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Il s'agit de trouver l'expression de la sortie $y(t)$ à une entrée $u(t)$.

7.1 Cas d'une équation scalaire

Dans un premier temps, pour fixer les idées, on se place dans le cas scalaire c.-à-d., le système est d'ordre $n = 1$ et a une seule variable d'état $x(t)$. Dans ce cas, les équation (2.20) peut s'écrire comme suit :

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad \text{avec: } x(t_0 = 0) = x_0 \tag{2.21}$$
$$y(t) = cx(t) + du(t) \tag{2.22}$$

où a, b, c et d sont des constantes.

- ***Réponse libre**:* Il s'agit ici de voir comment le système réagit librement à la seule condition initiale et en absence de l'entrée. C'est la réponse du système autonome.

$$\dot{x}(t) = ax(t) \;\Rightarrow\; \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = a \;\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\left[ln\big(x(t)\big)\right]}{\mathrm{dt}} = a$$

Intégrons le dernier terme entre $t_0 = 0$ et t, on aura :

$$\left[ln\big(x(t)\big)\right]_{t_0}^{t} = a[t]_0^t$$

$$ln\big(x(t)\big) - ln\big(x(t_0)\big) = a\,t \;\Rightarrow ln\left(\frac{x(t)}{x(t_0)}\right) = a\,t \Rightarrow \frac{x(t)}{x(t_0)} = e^{a\,t}$$

Finalement, la réponse libre de l'équation (2.21) est:

$$x(t) = x_0 e^{a\,t} \tag{2.23}$$

- ***Réponse complète (totale)**:* Il s'agit ici de voir comment le système réagit en présence de l'entrée. On utilise la méthode de variation des constantes :

$$x(t) = k(t) e^{a\,t} \tag{2.24}$$

$$\dot{x}(t) = a\ \underbrace{k(t)e^{at}}_{x(t)} + \dot{k}(t)e^{at} = ax(t) + \dot{k}(t)e^{at}$$

$$\dot{x}(t) = ax(t) + \dot{k}(t)e^{at} = ax(t) + bu(t)$$

$$\Rightarrow \dot{k}(t) = e^{-at}bu(t)$$

$$\Rightarrow k(t) = k(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$

En remplaçant l'expression $k(t)$ dans (2.24), on obtient :

$$x(t) = k(t)e^{at} = \left[k(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)\,d\tau\right] e^{at}$$

A partir de (2.24), on a : $k(t_0) = x(t_0) = x_0$

$$x(t) = k(t)e^{at} = \left[x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau\right] e^{at}$$

Alors, on a :

$$x(t) = x_0e^{at} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \qquad (2.25)$$

Finalement, en remplaçant (2.25) dans l'équation de sortie de (2.20), on obtient la réponse totale du système :

$$y(t) = \underbrace{cx_0e^{at}}_{\substack{Réponse\\ libre}} + \underbrace{c\int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}b\,u(\tau)d\tau + du(t)}_{Réponse\ forcée} \qquad (2.26)$$

Remarque 2.7 : Dans la réponse (2.26), l'on peut faire une distinction utile dans le membre de droite et faire apparaitre deux réponses:

Le réponse libre *:* elle correspond au premier terme et ne dépend que du modèle du système (présence du pôle a) et de la condition initiale (présence de x_0). Elle ne dépend pas de l'action extérieure (commande).
Le réponse forcée *:* elle est associée aux deux derniers termes et correspond en fait à la réaction du système à l'excitation $u(t)$. Elle dépend du modèle du système (présence de a) mais aussi de la nature du signal $u(t)$.

En outre, pour un système stable, lorsque la réponse $y(t)$ tend vers une valeur constante pour une entrée constante par exemple (échelon), l'on peut distinguer deux régimes:

Le régime transitoire qui est le temps durant lequel $y(t)$subit une évolution avant de se rapprocher d'une valeur constante. La durée du régime transitoire correspond à un temps appelé *temps de réponse* t_r. La réponse de régime transitoire disparaît lorsque $t \to \infty$
Le régime permanent qui succède au régime transitoire, qui commence donc à t_r et qui correspond à l'intervalle de temps durant lequel $y(t)$ est considéré comme restant toujours proche de sa valeur finale. La réponse de régime permanent persiste lorsque $t \to \infty$

7.2 Cas d'une équation matricielle

Dans le cas où le système est d'ordre $n > 1$, donc possède n variables d'état $x_i(t)$.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

avec : $x(t) = [x_1(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T$ est le vecteur d'état, $x(t_0) = x_0 = [x_1^0 \quad \dots \quad x_n^0]^T$ est la condition initiale et A, B, C et D sont des matrices de dimensions appropriées.

La solution d'un tel système matriciel est analogue à celle obtenue dans le cas scalaire, donc, en remplaçant les scalaires a, b, c et d dans (2.25) et (2.26) par les matrices A, B, C et D respectivement, il vient :

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{2.27}$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{\substack{Réponse \\ libre}} + \underbrace{C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\substack{Réponse \\ forcée}} \tag{2.28}$$

Cependant cela nous amène à considérer une fonction matricielle de type nouveau, e^{At} où A est une *matrice*.

Posons :

$$\Phi(t) = e^{At} \tag{2.29}$$

Remplaçons (2.29) dans (2.27), il vient :

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \tag{2.30}$$

$\Phi(t)$ est une matrice dite *matrice de transition d'état*.

Le problème de la résolution des équations d'état se ramène au problème de calcul de la matrice de transition. Avant de décrire différentes méthodes pour l'obtention de la matrice de transition, nous montrons quelques propriétés de cette matrice.

7.2.1 Propriétés de la matrice de transition d'état

Propriété 1 : $\Phi(0) = e^{A\times 0} = I$ (où I matrice identité).

Propriété 2 : $\Phi(t) = e^{At} = [e^{-At}]^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1}$, $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$.

Propriété 3 : $\Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$.

Propriété 4 : $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$.

Propriété 5 : $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1)$.

7.2.2 Calcul de la matrice de transition d'état

Il s'agit de calculer e^{At} , et bon nombre de possibilités sont offertes :

a) Méthode de transformée de Laplace

Soit l'équation d'état $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, avec : $x(t_0 = 0) = x_0$.

En posant $u(t) = 0$.
$\dot{x}(t) = Ax(t)$
$TL\,[\dot{x}(t)] = TL[Ax(t)]$
$sX(s) - X_0 = AX(s)$
$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 \Rightarrow TL^{-1}[X(s)] = x(t) = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}]x_0$

Finalement :

$$x(t) = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}]x_0 \tag{2.31}$$

D'autre part, d'après la section précédente, la réponse libre de équation d'état à $t_0 = 0$:

$$x(t)= e^{At}x_0 \tag{2.32}$$

Par identification de (2.31) et (2.32), on aura :

$$e^{At} = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

Exemple 2.4
Soit un système d'ordre deux :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

Calculer la matrice de transition e^{A}.

$$(sI - A)^{-1} = \frac{[adj(sI-A)]^T}{det(sI-A)} = \frac{\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\left(\frac{\alpha_1}{(s+1)} + \frac{\alpha_2}{(s+2)}\right) & \left(\frac{\alpha_3}{(s+1)} + \frac{\alpha_4}{(s+2)}\right)\\ -2\left(\frac{\alpha_3}{(s+1)} + \frac{\alpha_4}{(s+2)}\right) & \left(\frac{\alpha_5}{(s+1)} + \frac{\alpha_6}{(s+2)}\right)\end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \lim_{s\to -1}(\,s+1)\left(\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right) = 2, \alpha_2 = \lim_{s\to -2}(\,s+2)\left(\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right) = -1$$
$$\alpha_3 = \lim_{s\to -1}(\,s+1)\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right) = 1, \alpha_4 = \lim_{s\to -2}(\,s+2)\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right) = -1$$
$$\alpha_5 = \lim_{s\to -1}(\,s+1)\left(\frac{s}{(s+1)(s+2)}\right) = -1, \alpha_4 = \lim_{s\to -2}(\,s+2)\left(\frac{s}{(s+1)(s+2)}\right) = 2$$
$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix}\left(\frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right) & \left(\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right)\\ -2\left(\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right) & \left(\frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)}\right)\end{bmatrix}$$
$$e^{At} = TL^{-1}\begin{bmatrix}\left(\frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right) & \left(\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right)\\ -2\left(\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right) & \left(\frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)}\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t}\\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

b) Méthode de diagonalisation de la matrice A

Si la matrice d'état A est diagonale, on montre facilement que :

$$A = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix} \Rightarrow e^{A} = \begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n}\end{bmatrix}$$

d'où l'idée de passer par un changement de variables judicieux, de la représentation d'état initiale vers une autre représentation faisant intervenir une matrice d'état diagonale.

Si A est une matrice carrée $(n \times n)$ quelconque, les *n* valeurs propres *distincts* de A sont notés λ_i, elles sont associées aux *n* vecteurs propres V_i par :

$$AV_i = \lambda_i V_i \qquad i = 1 \dots n \tag{2.33}$$

d'où

$$\begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ AV_2 = \lambda_2 V_2 \\ \quad \vdots \\ AV_n = \lambda_n V_n \end{cases} \tag{2.34}$$

Sous forme matricielle :

$$A[V_1 \;\; V_2 \; \dots V_n] = [V_1 \;\; V_2 \; \dots V_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

En multipliant à gauche les deux membres de (2.35) par$[V_1 \;\; V_2 \; \dots V_1]^{-1}$:

$$\underbrace{[V_1 \;\; V_2 \; \dots V_n]^{-1}}_{T^{-1}} A \underbrace{[V_1 \;\; V_2 \; \dots V_n]}_{T} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Delta} \tag{2.36}$$

$$T^{-1}AT = \Delta \;\Rightarrow\; A = T\Delta\, T^{-1} \tag{2.37}$$

Finalement :

$$e^{At} = T\mathrm{e}^{\Delta \mathrm{t}}\, T^{-1} \tag{2.38}$$

Exemple 2.5 : Calculer la matrice de transition e^Adu système donné dans l'exemple 2.4.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres :

$det(\lambda I - A) = 0$

$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

$\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Vecteurs propres :$z = [z_1 \quad z_2]^T$, $v = [v_1 \quad v_2]^T$.

$Az = \lambda_1 z$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1 = -z_2$, on pose $z_1 = 1 \;\Rightarrow z_2 = -1,\; z = [1 \quad -1]^T$

$Aw = \lambda_2 v$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} v_1 \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow -2v_1 = v_2$, on pose $v_2 = 2 \;\Rightarrow z_1 = -1, v = [-1 \quad 2]^T$

Alors :$T = [z \quad w] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Vérification : $A = T\Delta\, T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$$e^{At} = T\mathrm{e}^{\Delta \mathrm{t}}\, T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

c) Méthode de SYLVESTER

Si la matrice *A* possède *n* valeurs propres distinctes λ_i, on montre que :

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\left[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{(A-\lambda_j I)}{(\lambda_i - \lambda_j)}\right] \tag{2.39}$$

Remarque 2.8: pour les valeurs propres multiples, une autre formule de Sylvester, plus compliquées est utilisée.

Exemple 2.6 : Calculer la matrice de transition e^{A}du système donné dans l'exemple 2.4.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres : $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{2} e^{\lambda_i t}\left[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2} \frac{(A-\lambda_j I)}{(\lambda_i - \lambda_j)}\right] = e^{\lambda_1 t}\left[\frac{(A-\lambda_2 I)}{(\lambda_1 - \lambda_2)}\right] + e^{\lambda_2 t}\left[\frac{(A-\lambda_1 I)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}\right]$$

$$= e^{-t}\left[\frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}{1}\right] + e^{-2t}\left[\frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}{-1}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

d) Méthode de CAYLEY-HAMILTON

Cette méthode est basée sur le fait qu'une matrice est toujours solution de son équation caractéristique :

L'équation caractéristique de la matrice *A* de dimensions $(n \times n)$ est :

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

On a toujours :

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0 \Rightarrow A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1 A - a_0 I = 0$$

Donc, pour toutes matrice carrée possédant *n* valeurs propres distinctes, toutes puissance de *A* supérieure ou égale à *n* peut s'exprimer en fonction d'une combinaison des puissances de *A* inferieures à *n* . Donc :

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!}$$

$$e^{At} = \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} + \alpha_{n-2}(t)A^{n-2} + \cdots + \alpha_1(t)A + \alpha_0(t)I \tag{2.40}$$

Notons que tous les valeurs propres λ_i de la matrice *A* vérifient également cette équation, c-à-d :

$$e^{\lambda_i t} = \alpha_{n-1}(t)\,{\lambda_i}^{n-1} + \alpha_{n-2}(t)\,{\lambda_i}^{n-2} + \cdots + \alpha_1(t)\,\lambda_i + \alpha_0(t)I \tag{2.41}$$

En résumé cette méthode consiste à calculer e^{At} de la façon suivante :

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i \tag{2.42}$$

où les fonctions $\alpha_i(t)$ sont à calculer en résolvant le système d'équations suivant :

$$e^{\lambda_i t} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) \lambda_i^j \tag{2.43}$$

Exemple 2.7 : Calculer la matrice de transition e^Adu système donné dans l'exemple 2.4.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres : $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{1} \alpha_i(t) A^i = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) I$$

avec :

$$e^{-t} = \sum_{j=0}^{1} \alpha_j(t) \lambda_1^j = \alpha_0(t) - \alpha_1(t)\ , \quad e^{-2t} = \sum_{j=0}^{1} \alpha_j(t) \lambda_2^j = \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t)$$

$$\begin{cases} e^{-t} = \alpha_0(t) - \alpha_1(t) \\ e^{-2t} = \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1(t) = e^{-t} - e^{-2t} \\ \alpha_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}$$

$$e^{At} = \alpha_i(t) I + \alpha_i(t) I = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

7.2.3 Réponse impulsionnelle

On donne la réponse générale d'un système donné sous forme de représentation d'état (par souci de simplicité, on pose $D = 0$):

$$y(t) = C \left[e^{At} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right]$$

Pour calculer la réponse à une entrée de type impulsion de Dirac $u(t) = \delta(t)$, on utilise la propriété suivante :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$ où f est une fonction continue à l'origine

Alors :

$$y(t) = C \left[e^{At} x_0 + e^{At} \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} B\ \delta(\tau) d\tau \right] = C[\ e^{At} x_0 + e^{At} B]$$

$$y(t) = C e^{At} [x_0\ + B] \tag{2.44}$$

7.2.4 Réponse indicielle

L'entrée est l'échelon unitaire également appelée fonction de Heavyside $u(t) = \Gamma(t)$ définie par :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$y(t) = C\left[e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}B\,d\tau\right]$$
$$y(t) = C\left[e^{At}x_0 + \left[-e^{A(t-\tau)}A^{-1}B\right]_0^t\right]$$
$$y(t) = C[e^{At}x_0 - A^{-1}B + e^{At}A^{-1}B]$$

$$y(t) = Ce^{At}[x_0 + A^{-1}B] - CA^{-1}B \qquad (2.45)$$

8. Stabilité

La notion de stabilité est très importante en automatique. À quelques rares exceptions près, les systèmes ne vérifiant pas cette qualité sont inutilisables voire dangereux. Par une formulation simple, on définit la stabilité par l'une des propositions suivantes: un système linéaire est stable :

- Lorsque sa réponse à un échelon prend une valeur finie en régime permanent, ou
- Lorsque sa réponse à une impulsion tend vers 0, ou
- Lorsque sa réponse à une sinusoïde est une sinusoïde de même fréquence et d'amplitude finie.

Dans le domaine de la stabilité des systèmes on considère :

a) ***la notion de stabilité externe***, définie par rapport à la variable de sortie $y(t)$. Cette stabilité est dénommée aussi stabilité au sens entrée bornée-sortie bornée ou stabilité BIBO (Bounded Input Bounded Output stability).
b) ***la notion de stabilité interne***, qui est définie par rapport à la variable d'état $x(t)$. Cette stabilité est aussi dénommée stabilité asymptotique.

8.1 Stabilité externe (Stabilité BIBO)

D'une façon générale, un système est BIBO-stable si à tout signal *d'entrée borné* correspond un *signal borné en sortie*.

Pour traduire en sens mathématique la définition de la stabilité BIBO, on considère un système dont la fonction de transfert contient tous les genres de pôles : α pôles à l'origine ($p_1 = 0$), deux pôles réels distincts (p_2 et p_3), un seul pôle double (p_4) et deux pôles complexes conjugués ($p_5 = \sigma + j\omega$ $p_6 = \sigma - j\omega$) et un nombre m de zéros z_i avec ($m \leq n$).

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{s^{\alpha}(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)^2(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)}$$

La réponse indicielle $U(s) = \frac{1}{s}$ (entrée bornée) :

$$Y(s) = \frac{N(s)}{s^{\alpha+1}(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)^2(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)}$$

La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(s) = \frac{N(s)}{s^{\alpha+1}(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)^2(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{A_{\alpha+1}}{s^{\alpha+1}} + \frac{A_\alpha}{s^\alpha} + \cdots + \frac{A_1}{s}}_{réponse\ du\ pôle\ à\ l'origine} + \underbrace{\frac{B_1}{(s-p_2)} + \frac{B_2}{(s-p_3)}}_{Réponse\ des\ 2\ pôles\ réels} + \underbrace{\frac{C_1}{(s-p_4)} + \frac{C_2}{(s-p_4)^2}}_{réponse\ du\ pôle\ double} +$$

$$\underbrace{\frac{D_1}{(s-\sigma-j\omega)} + \frac{D_2}{(s-\sigma+j\omega)}}_{Réponse\ des\ 2\ pôles\ complexes\ distincts}$$

ou A_i, B_i et C_i sont des nombres réels, et D_i des nombres complexes conjugués.

La réponse indicielle est obtenue en calculant la transformée inverse de Laplace de $Y(S)$ (voir la table de la TL)

$$y(t) = \underbrace{\frac{A_{\alpha+1}}{\alpha!} t^\alpha + \frac{A_\alpha}{(\alpha-1)!} t^{\alpha-1} + \cdots + A_1}_{(I) Réponse\ du\ pôle\ à\ l'origine} + \underbrace{B_1 e^{p_2 t} + B_2 e^{p_3 t}}_{(II) Réponse\ des\ 2\ pôles\ réels} + \underbrace{C_1 e^{p_4 t} + C_2 t e^{p_4 t}}_{(III) Réponse\ du\ pôle\ double} + \underbrace{|D_1| e^{\sigma t} cos(\omega t + \theta)}_{(IV) Réponse\ des\ 2\ pôles\ complèxes}$$

Pour que le système soit stable, il faut que sa réponse soit bornée, il faut que :

- Le polynôme (*I*) soit de degré zéro (terme constant), donc que $\alpha = 0$ (pas de pôles à l'origine).
- Tous les exponentielles soient amorties (tendent vers zéro quand t tend vers l'infini) donc, que tous les pôles p_i de la fonction de transfert soient à partie réelle strictement négative.

Théorème 2.1 : Un système linéaire et invariant est *stable (BIBO stable)* si tous les *pôles* de sa fonction de transfert sont à *partie réelle strictement négative*.

8.2 Stabilité interne (Stabilité asymptotique).

Pour envisager rigoureusement d'étudier la stabilité d'un système, il faut donc d'abord définir la notion d'état d´équilibre et celle de stabilité d'un état d'équilibre.

8.2.1 Etat d'équilibre

Un système se trouve dans un état d'équilibre si cet état n'est pas modifié lorsque le système est abandonné à lui-même. Un tel état d'équilibre se détermine en posant à la fois $u(t) = 0$ (système livré à lui-même) et $\dot{x}(t) = 0$ (pas modifié).

Soit un système donné :

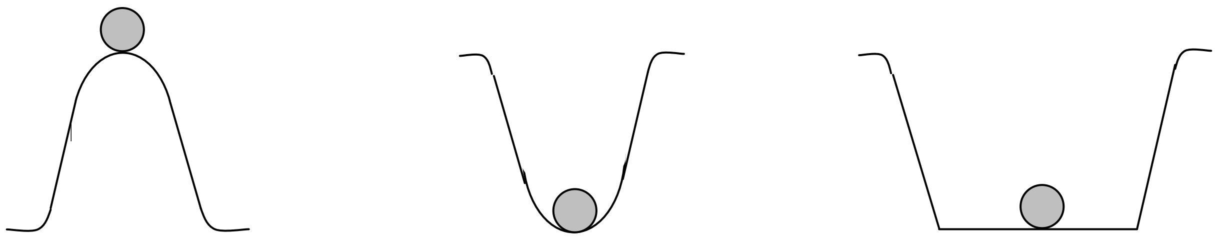
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

La recherche des états d'équilibre possibles d'un tel système revient donc à résoudre $Ax(t) = 0$. De cette dernière équation, l'on comprend qu'il peut exister un seul ou plusieurs états d'équilibre selon le rang de la matrice A :

Cas 1 : $rang(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ n'a pas de valeurs propres nulles : alors il existe un seul état d'équilibre qui est l'origine $x(t) = x_0 = 0$
Cas 2 : $rang(A) < n \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ possède au moins une valeur propre nulle : alors il existe une infinité d'états d'équilibre.

- Un état d'équilibre est dit *asymptotiquement stable* si, lorsque le système est écarté de cet état sous l'effet d'une perturbation, il y revient (en un temps infini).
- L'état d'équilibre est dit *instable*, si après perturbation, le système s'en éloigne davantage.
- L'état d'équilibre est dit *simplement stable* si après perturbation, le système reste dans un voisinage du point d'équilibre.

Pour illustrer ces trois cas, l'on procède très souvent à une analogie mécanique. Cette dernière consiste à décrire l'état d'équilibre d'une bille dans trois positions différentes comme le montre la Fig.2.7.



Equilibre instable *Equilibre asymptotiquement stable* *Equilibre simplement stable*

Fig.2.7 Les trois états d'équilibre possibles d'une bille.

Soit $x_e = 0$ un état d'équilibre. En partant de cet état, on donne, à $t = 0$ un écart Δx . On obtient l'état $x(t) = x_e + \Delta x$. Le système est stable (asymptotiquement stable) si :

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e = 0 \tag{2.46}$$

En partant de $x(t) = x_e$ écarté de Δx, l'état $x(t)$ tend à revenir à l'état d'équilibre x_e.

La réponse du système dans ce cas est la réponse libre :

$$\begin{aligned} x\,(t) = x_{libre}(t) &= \Phi(t)\,\Delta x \\ &= e^{At}\Delta x \end{aligned} \tag{2.47}$$

Pour simplifier les développements, on suppose que le système est sous forme canonique de Jordan (A diagonale) et possède n valeurs propres distinctes:

$$x(t) = e^{At}\Delta x = diag\,(e^{\lambda_1 t}, \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_1 t})\Delta x \tag{2.48}$$

La condition de stabilité exige que :

$$\lim_{t\to\infty} x(\mathrm{t}) = \lim_{t\to\infty} diag\,(e^{\lambda_1 t}, \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_1 t})\Delta x = 0 \tag{2.49}$$

Ceci est vérifié si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative ($\lambda_i < 0,\ \ i = 1 \dots n$).

Théorème 2.2 **:** Un système linéaire et invariant décrit par une représentation d'état est dit :
- *asymptotiquement stable* si toutes les valeurs propres de la matrice dynamique A sont à partie réelle strictement négative.
- *simplement stable* si au moins une des valeurs propres de A est nulle (ou à partie réelle nulle).
- *instable* si au moins une des valeurs propres de A est à partie réelle strictement positive.

Remarque 2.9 **:**

- On constate que la stabilité d'un modèle d'état dépond seulement de la matrice dynamique A.
- Un système est BIBO stable s'il est asymptotiquement stable.

Dans la suite de ce cours, on qualifie un système *asymptotiquement stable* par le mot *stable*.

9. Exercices

Exercice 1 Soit un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

1- Donner une représentation d'état pour le système.
2- Calculer les valeurs propres(λ_1, λ_2). Le système est-il stable?
3- Calculer les vecteurs propres associés $(z = [z_1 \quad z_2]^T, v = [v_1 \quad v_2]^T)$. Montrer que $A = T\Delta\, T^{-1}$ où T $= [z \quad v]$ et $\Delta = diag[\lambda_i]$.
4- Calculer la matrice de transition e^{At} en utilisant la méthode de la diagonalisation de A.
5- Calculer la réponse impulsionnelle du système pour $x_0 = [1 \quad 0]^T$.

Exercice 2 Soit la représentation d'état d'un système donné :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

1- Le système est-il stable ?
2- Calculer la matrice de transition e^{At} en utilisant :
a- La méthode de Sylvester, *b*- La méthode de Cayley-Hamilton.
3- Calculer la réponse indicielle du système avec la condition initiale: $x_0 = [0 \quad 1]^T$.

Exercice 3 Soit la représentation d'état d'un système donné:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \text{ avec : } \begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \dot{x}_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$y(t) = [0 \ 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

1- Calculer les valeurs propres$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Le système est-il stable?

2- Calculer les vecteurs propres associés ($z = [z_1 \quad z_2 \quad z_3]^T, v = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T, w = [w_1 \quad w_2 \quad w_3]^T$). Montrer que $A = T\Delta\, T^{-1}$ où $T = [z \quad v \quad w]$ et $\Delta = \mathrm{diag}[\lambda_i]$.

3- Calculer la réponse indicielle du système (en utilisant la méthode de diagonalisation de A pour calculer e^{At}), calculer la valeur finale $y_f = \lim_{t\to\infty} y(t)$, avec$x_0 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$.

Chapitre 3
Commandabilité et observabilité

1. Introduction

En effet, l'utilisation de la représentation d'état suscite deux questions importantes :

1- Est-ce que pour tout couple $x_0 = x(t_0)$ et $x_1 = x(t_1)$, il existe un vecteur de commande $u(t)$ défini sur l'intervalle$[t_0, t_1]$ permettant de passer de l'état x_0 à l'état x_1, c'est le problème de commandabilité du système.

2- Est-ce que la connaissance de $y(t)$ et de $u(t)$ sur l'intervalle$[t_0, t_1]$ permet d'obtenir $x_0 = x(t_0)$, c'est le problème d'observabilité du système.

Ces deux propriétés sont nécessaires que ce soit pour la commande où il faudra que le système soit commandable, ou pour la synthèse d'observateur où il faudra que le système soit observable. Pour cela, il sera nécessaire de partir d'une représentation d'état minimale (commandable et observable) en éliminant (du modèle) les parties non commandables et non observables à la condition impérative que celles-ci soient asymptotiquement stables.

2. Cas des systèmes monovariables

Considérons un système monovariable linéaire et stationnaire représenté par le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

2.1 Commandabilité

Un système décrit par un modèle d'état est dit *commandable* si pour tout état x_f du vecteur d'état, il existe un signal d'entrée $u(t)$ d'énergie finie qui permet au système de passer de l'état initial x_0 à l'état x_f en un temps fini.
Un système est dit *complètement commandable* s'il est commandable à tout point de l'espace d'état.

Théorème 1 : Critère de commandabilité de Kalman
Un système linéaire est complètement commandable si et seulement si : $rang[Q_c] = n$, c-à-d, Q_c est régulière où n est l'ordre du système (nombre de variables d'état) et

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B \ldots A^{n-1}B]$$

est dite matrice de commandabilité.

Exemple 3.1 **:**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X}$$

$$Q_c = [B \quad AB \ ] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow det(Q_c) = 2 \neq 0$$

Le système est commandable.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}}_{B}u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}_{X}$$

$$Q_c = [B \quad AB\ ] = \begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow det(Q_c) = 0$$

Le système n'est pas commandable.

2.2 Observabilité

On dit qu'un état $x(t_0)$ est *observable*, s'il peut être identifié à partir de la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ sur un intervalle de temps fini $[t_0\,, t_1]$.

Le système est dit *complètement observable* si $\forall\, X(t_0) \in$ *à l'espace d'état*, il est possible de restituer ou identifier sa valeur à partir de la seule connaissance de $u(t)$ et $y(t)$.

> ***Théorème 2 : Critère d'observabilité de Kalman***
> Un système linéaire est complètement observable si et seulement si : $rang[Q_o] = n$, c-à-d, Q_o est régulière, où *n* est l'ordre du système (nombre de variables d'état) et
>
> $$Q_o = \begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}$$
>
> est dite matrice d'observabilité.

Exemple 3.2 **:**

Etudier l'observabilité des deux systèmes donnés dans l'exemple 3.1.

Premier système : $Q_o = \begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow det(Q_c) = -2 \neq 0.$

Deuxième système : $Q_o = \begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow det(Q_c) = 1 \neq 0.$

Les deux systèmes sont observables.

Remarque 2.1 :

- La Commandabilité d'un système est liée seulement aux matrices A et B.
- L'observabilité d'un système est liée seulement aux matrices A et C.
- Si la matrice A est *diagonale*, le système est complètement commandable si tous les éléments de B sont non nuls. le système est complètement observable si tous les éléments de C sont non nuls.
- Il est possible que : $rang[Q_c] = r < n$, donc, la commandabilité ne se vérifie que pour une partie du vecteur d'état (r variables d'état). Les r variables d'état sont les variables d'états commandables du système et les *n-r* variables d'état sont les variables non commandables du système, dans ce cas le système est dit *partialement commandable* et sa commande consiste à rendre sa partie non commandable inopérante afin de le contrôler entièrement via sa partie commandable. De même il est possible que $rang[Q_o] < n$, donc l'observabilité ne se vérifie que pour une partie du vecteur d'état.

2.3 Commandabilité/observabilité et fonction de transfert

Dans cette partie, on montre la relation entre la fonction de transfert et ces deux propriétés (commandabilité et observabilité) à travers un exemple. Soit un système d'ordre 4 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{B}u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}}_{X}$$

A est diagonale, donc :

La variable d'état x_1 : est commandable et observable (CO)
La variable d'état x_2 : est commandable et non observable (CNO)
La variable d'état x_3 : est non commandable et observable (NCO)
La variable d'état x_4 : est non commandable et non observable (NCNO)

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \quad \Rightarrow X_1(s) = U(s)/(s+1)$$
$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t) \Rightarrow X_2(s) = U(s)/(s+2)$$
$$\dot{x}_3(t) = -3x_3(t) \qquad \Rightarrow X_3(s)(s+3) = 0$$
$$\dot{x}_4(t) = -3x_4(t) \qquad \Rightarrow X_4(s)(s+4) = 0$$
$$y(t) = x_1(t) + \; x_3(t) \quad \Rightarrow U(s) = x_1(s) + \; x_3(s)$$

Le système peut être décomposé en quatre sous-systèmes (CO,CNO, NCO,NCNO) comme :

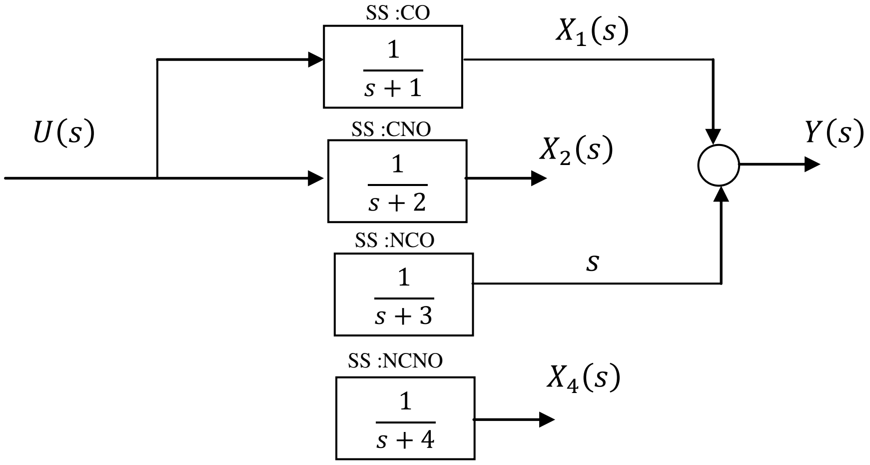


Fig.3.1 Différents modes d'un système.

On calcule la fonction de transfert :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

Cependant, d'après la représentation d'état ce système est d'ordre 4, donc, on peut écrire :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Remarque 3.2

- Les modes (pôles) qui se compensent avec des zéros sont les modes non commandales, non observales ou non commandable et non observables. Donc, un système dont la fonction de transfert possède des zéros qui se compensent avec des pôles est un système non commandable et/ou non observable.
- Un système dont la fonction de transfert a tous ses zéros différents de ses pôles est un système commandable et observable.
- La commandabilité et l'observabilité sont des propriétés structurelles du système qui n'apparaissent pas dans la représentation par fonction de transfert. Donc, la fonction de transfert est quelques fois insuffisante pour décrire un système.
- Un système à la fois commandable et observable est dit *minimal*.
- L'ordre de la représentation d'état n'est pas toujours le même que celui de la fonction de transfert. Tout dépend de la commandabilité et de l'observabilité de ce dernier. Lorsqu'il est complètement commandable et observable, les deux ordres sont égaux.

2.4 Formes canoniques pour les systèmes monovariables

En général, on désigne par *forme canonique* d'un système linéaire continu une représentation d'état dont les matrices A, B et C ont une forme très simple et par conséquent, possèdent un nombre réduit d'éléments différents de zéro dans leurs structures. Les formes canoniques les plus connues et utilisées sont : *la forme compagne de commandabilié* et *la forme compagne d'observabilité*. Comme on va le voir plus tard ces deux formes seront très utiles, quand on étudie le problème de la commande et de l'observation.

Soit la fonction de transfert d'un système donné, le système est supposé commandable et observable, donc, la fonction de transfert n'admet pas de pôles et zéros communs.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad n \geq m \tag{3.2}$$

2.4.1 Forme compagne de commandabilité

En effet, si le système est commandable, on peut le mettre sous une forme d'état dite *forme compagne de commandabilité*.

$$G(s) = \frac{V(s)Y(s)}{U(s)V(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} \dots + a_1 s + a_0} \tag{3.3}$$

où $V(s)$ correspond à une variable interne au système, telle que :

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} \dots + a_1 s + a_0} \tag{3.4}$$

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} \dots + b_1 s + b_0 \tag{3.5}$$

A partir de (3.4), il vient :

$$s^n V(s) = U(s) - a_{n-1} \underbrace{s^{n-1}V(s)}_{x_n(s)} - \cdots - a_1 \underbrace{sV(s)}_{x_2(s)} - a_0 \underbrace{V(s)}_{x_1(s)} \tag{3.6}$$

On peut choisir les variables d'état de la façon suivante :

$X_1(s) = V(s)$

$X_2(s) = sV(s) = sX_1(s) \underset{TL^{-1}}{\Longrightarrow} \dot{x}_1(t) = x_2(t)$

…

$X_n(s) = s^{n-1}V(s) = sX(s) \underset{TL^{-1}}{\Longrightarrow} \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t)$

On multiplie la dernière équation par *s* et en utilisant (3.6), on aura :

$sX_n(s) = U(s) - a_{n-1}X_n(s) - \cdots - a_1X_2(s) - a_0X_1(s)$

$\Rightarrow \dot{x}_n(t) = u(t) - a_{n-1}x_n(t) - \cdots - a_1x_2(t) - a_0x_1(t)$

A partir de (3.5), on obtient :

$$\begin{cases} Y(s) = V(s)\ (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} \ldots + b_1 s + b_0) \\ Y(s) = b_m X_{m+1}(s) + b_{m-1}X_m(s) \ldots + b_1X_2(s) + b_0X_1(s) \\ \Rightarrow y(t) = b_m x_{m+1}(t) + b_{m-1}x_m(t) \ldots + b_1x_2(t) + b_0x_1(t) \end{cases}$$

Ceci conduit à la forme compagne commandable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [b_0\ \ b_1 \ldots b_m\ \ 0 \ldots\ \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Remarque 3.3

- La matrice d'évolution A contient tous les coefficients $(-a_i)$du dénominateur de la fonction de transfert en une seule ligne, ce sont les coefficients du polynôme caractéristique $(sI - A)$ de la matrice A.
- Bien qu'une seule variable d'état x_n soit directement influencée par le signal de commande (entrée), les autres variables le sont mais indirectement par intégration successive.

Exemple 3.3

Trouver la forme compagne de commandabilité du système défini par la fonction de transfert suivante :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 4s + 1}{s^3 + 2s^2 + S}$$

$$\frac{V(s)Y(s)}{U(s)V(s)} = \frac{2s^2 + 4s + 1}{s^3 + 2s^2 + s}$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s} \tag{3.7}$$

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = 2s^2 + 4s + 1 \tag{3.8}$$

A partir de (3.7), il vient :

$$s^3V(s) = U(s) - 2\underbrace{s^2V(s)}_{X_{3(s)}} - \underbrace{sV(s)}_{X_{2(s)}} - 0\ \underbrace{V(s)}_{X_{1(s)}} \tag{3.9}$$

On pose :

$X_1(s) = V(s)$

$X_2(s) = sV(s) = sX_1(s) \ \Rightarrow\ \dot{x}_1(t) = x_2(t)$

$X_3(s) = s^2V(s) = sX_2(s) \Rightarrow\ \dot{x}_2(t) = x_3(t)$

On multiple la dernière équation par S et en utilisant (3.9) :

$$sX_3(s) = s^3V(s) = U(s) - 2X_3(s) - X_2(s) \Rightarrow \dot{x}_3(t) = u(t) - 2x_3(t) - x_2(t)$$

A partir de (3.8), on obtient :

$$Y(s) = 2s^2V(s) + 4sV(s) + V(s)$$
$$Y(s) = 2x_3(s) + 4x_2(s) + x_1(s)$$
$$y(t) = 2x_3(t) + 4x_2(t) + x_1(t)$$

D'où la forme compagne commandable:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = [1\ \ 4\ \ 2]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

2.4.2 Forme compagne d'observabilité

Si le système est observable, on peut le mettre sous une forme d'état dite *forme compagne d'observabilité*.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad n \geq m$$

On divise le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert par s^n.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{m-n} + b_{m-1}s^{m-n-1} + \cdots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1}s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$Y(s)[1 + a_{n-1}s^{-1} \ldots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}] = [b_m s^{m-n} + \cdots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}]U(s)$$

$$Y(s) = -[a_{n-1}s^{-1} \ldots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}]Y(s) + [b_m s^{m-n} + \cdots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}]U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\ldots(b_0U - a_0Y)s^{-1}}_{X_{1(s)}} + b_1U - a_1Y)s^{-1}}_{X_2(s)} + \cdots)\ldots) + b_mU - a_mY)s^{-1}}_{X_{m+1}(s)} - a_{m+1}Y)s^{-1}}_{X_{m+2}(s)} - \cdots)s^{-1} - a_{n-1}Y)s^{-1}}_{X_n(s)}$$

On pose :

$Y(Ss) = X_n(s) \Rightarrow y(t) = x_n(t)$

$X_1(s) = [b_0U(s) - a_0Y(s)]s^{-1} = [b_0U(s) - a_0X_n(s)]s^{-1} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = -a_0x_n(t) + b_0u(t)$

$X_2(s) = [X_1(s) + b_1U(s) - a_1X_n(s)]s^{-1} \qquad \Rightarrow \dot{x}_2(t) = x_1(t) - a_1x_n(t) + b_1u(t)$

….

$X_{m+1}(s) = [X_m(s) + b_mU(s) - a_mX_n(s)]s^{-1} \Rightarrow \dot{x}_{m+1}(t) = x_m(t) - a_mx_n(t) + b_mu(t)$

$X_{m+2}(s) = [X_{m+1}(s) - a_{m+1}X_n(s)]s^{-1} \qquad \Rightarrow \dot{x}_{m+2}(t) = x_{m+1}(t) - a_{m+1}x_n(t)$

….

$X_n(s) = [X_{n-1}(s) - a_{n-1}X_n(s)]s^{-1} \qquad \Rightarrow \dot{x}_n(t) = x_{n-1}(t) - a_{n-1}x_n(t)$

Ceci conduit à la forme compagne observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \;\; 0 \dots 0 \;\; 0 \;\; 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Exemple 3.4 : Trouver la forme compagne d'observabilité du système défini par la fonction de transfert suivante :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 4s + 1}{s^3 + 2s^2 + s}$$

On divise le numérateur et le dénominateur par s^3

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^{-1} + 4s^{-2} + s^{-3}}{1 + 2s^{-1} + s^{-2}}$$

$Y(s)[1 + 2s^{-1} + s^{-2}] = [2s^{-1} + 4s^{-2} + s^{-3}]U(s)$

$Y(s) = -[2s^{-1} + s^{-2}]Y(s) + [2s^{-1} + 4s^{-2} + s^{-3}]U(s)$

$Y(s) = -2\,Y(s)\,s^{-1} - Y(s)s^{-2} + 2U(s)s^{-1} + 4\,U(s)s^{-2} + U(s)s^{-3}$

$$Y(s) = \underbrace{[\underbrace{[\underbrace{U(s)s^{-1}}_{X_{1(s)}} + 4\,U(s) - Y(s)]s^{-1}}_{X_{2(s)}} + 2U(s) - 2\,Y(s)]s^{-1}}_{X_{3(s)}}$$

On pose :

$Y(s) = X_3(s) = \quad \Rightarrow \quad y(t) = x_3(t)$

$X_1(s) = U(s)s^{-1} \Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = u(t)$

$X_2(s) = [X_1(s) + 4U(s) - X_3(s)]s^{-1} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_3(t) + 4\,u(t)$

$X_3(s) = [X_2(s) + 2U(s) - 2X_3(s)]s^{-1} \Rightarrow \quad \dot{x}_3(t) = x_2(t) - 2x_3(t) + 2u(t)$

D'où :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 2\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=[0\;\;0\;\;1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

2.5 Passage d'une réalisation à l'autre

2.5.1 Changement de base

On peut passer d'une forme d'état à une autre tout simplement par un changement de base dans l'espace d'état R^n. Considérons l'équation d'état (pour des raisons de lisibilité, on omet la variable *t*) :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A\,x + Bu\\ y &= Cx\end{aligned}$$

On peut appliquer au vecteur d'état x un changement de repère de sorte à obtenir un nouveau vecteur d'état $\tilde{x}$. Ainsi, soit le changement de base $x = M\tilde{x}$ où M est une matrice de *rang plein* appelée matrice de passage, il vient :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= M^{-1}A\,M\,\tilde{x} + M^{-1}Bu\\ y &= CM\tilde{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u\\ y &= \tilde{C}\tilde{x}\end{aligned}$$

où $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$. Comme il existe une infinité de matrices de passage M utilisables, il existe aussi une infinité de formes équivalentes qui correspondent toutes à la même fonction de transfert. En effet :

$$\begin{aligned}\tilde{G}(S) &= \tilde{C}\left(SI-\tilde{A}\right)^{-1}\tilde{B}+\tilde{D} = CM(SI-M^{-1}A\,M)^{-1}M^{-1}B+D\\ &= CM(M^{-1}(SI-A)\,M)^{-1}M^{-1}B+D = C(SI-A)^{-1}B+D = G(S)\end{aligned}$$

Remarque 3.4:

- En outre, puisque $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$, les valeurs propres de la matrice d'état (A *ou* $\tilde{A}$) sont les mêmes quelle que soit la forme considérée. De ce fait, ce sont toujours les pôles de $G(S)$, c-à-d, les racines du polynôme caractéristique.
- Le passage d'une forme à une autre peut se révéler utile quand la seconde forme a une forme particulière (facilitant les calculs ou montrant certaines caractéristiques du système).

2.5.2 Obtention d'une forme compagne de commandabilité

Considérons une représentation d'état quelconque :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A\,x + Bu\\ y &= Cx\end{aligned} \tag{3.10}$$

Si le système est commandable, on peut le mettre sous forme compagne de commandabilité :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u\\ y &= \tilde{C}\tilde{x}\end{aligned} \tag{3.11}$$

tel que :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_0 & -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{C} = [b_0 \;\; b_1 \dots b_m \;\; 0 \dots \;\; 0]$$

$x = M\tilde{x}$ (M matrice carrée de dimension *n* inversible)

En remplaçant $x = M\tilde{x}$ dans (3.10), on aura :

$$\begin{aligned} M\dot{\tilde{x}} &= A\,M\tilde{x} + Bu \\ y &= CM\tilde{x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= M^{-1}A\,M\tilde{x} + M^{-1}Bu \\ y &= CM\tilde{x} \end{aligned}$$

d'où $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = \; CM$

Calcul de la matrice de passage M

$$\tilde{A} = M^{-1}A\,M \Rightarrow \tilde{A}M^{-1} = M^{-1}A$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-1}(1) \\ M^{-1}(2) \\ M^{-1}(3) \\ \vdots \\ M^{-1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1}(1) \\ M^{-1}(2) \\ M^{-1}(3) \\ \vdots \\ M^{-1}(n) \end{bmatrix} A$$

où $M^{-1}(i)$ est la ligne *i* de M, avec : *i*=1*…n*.

$M^{-1}(2) = M^{-1}(1)A$
$M^{-1}(3) = M^{-1}(2)A = M^{-1}(1)A^2$
$M^{-1}(4) = M^{-1}(3)A = M^{-1}(1)A^3$
.
.
.
$M^{-1}(n) = M^{-1}(n-1)A = M^{-1}(1)A^{n-1}$
$-a_0M^{-1}(1) - a_1M^{-1}(2) - a_2M^{-1}(3) - \cdots - a_{n-1}M^{-1}(n) = M^{-1}(n)A$
$-a_0M^{-1}(1) - a_1M^{-1}(1)A - a_2M^{-1}(1)A^2 - \cdots - a_{n-1}M^{-1}(1)A^{n-1} = M^{-1}(1)A^n$
$M^{-1}(1)\,\underbrace{[A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I]}_{=0} = 0$

(*Selon le théorème de Cayley-Hamilton*)

$\tilde{B} = M^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1}(1) \\ M^{-1}(2) \\ M^{-1}(3) \\ \\ M^{-1}(n) \end{bmatrix} B \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} M^{-1}(1)B &= 0 \\ M^{-1}(2)B &= 0 \\ M^{-1}(3)B &= 0 \\ \\ M^{-1}(n)B &= 1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} M^{-1}(1)B &= 0 \\ M^{-1}(1)AB &= 0 \\ M^{-1}(1)A^2B &= 0 \\ \\ M^{-1}(1)A^{n-1}B &= 1 \end{aligned}$$

$$M^{-1}(1)\;\underbrace{[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-2}B \quad A^{n-1}B]}_{Q_c} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

$M^{-1}(1)\, Q_c = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \Rightarrow M^{-1}(1) = Q_c^{-1}(n) \;\; (n - ième\ ligne\ de\ Q_c^{-1})$

Résumé: Calcul de la matrice de passage M vers une forme compagne de commandabilité à partir d'une forme quelconque

1- *Calculer la matrice de Commandabilité Q_c, si le système est commandable, c-à-d $|Q_c| \neq 0$, alors, suivre les étapes suivantes :*
2- *Calculer Q_c^{-1}*
3- *Mettre $M^{-1}(1) = Q_c^{-1}(n)$: c à d, 1-iere ligne de M^{-1}= n-ieme ligne de Q_c^{-1}*
4- *Calculer les autres lignes de M comme suit :*

$$\begin{gathered} M^{-1}(2) = M^{-1}(1)A \\ M^{-1}(3) = M^{-1}(1)A^2 \\ M^{-1}(4) = M^{-1}(1)A^3 \\ \dots \\ M^{-1}(n) = M^{-1}(1)A^{n-1} \end{gathered}$$

2.5.3 Obtention d'une forme compagne d'observabilité

Considérons une représentation d'état quelconque :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Si le système est observable, on peut le mettre sous forme compagne observable :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned}$$

tel que :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [0 \;\; 0 \dots 0 \;\; 0 \;\; 1]$$

$x = N\tilde{x}$ (N matrice carrée de dimension *n* inversible)

En remplaçant $x = N\tilde{x}$ dans l'équation d'état et l'équation de sortie, on aura :

$$\begin{aligned} N\dot{\tilde{x}} &= A\,N\tilde{x} + Bu \\ y &= CN\tilde{x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= N^{-1}A\,N\tilde{x} + N^{-1}Bu \\ y &= CN\tilde{x} \end{aligned}$$

d'où $\tilde{A} = N^{-1}A\,N$, $\tilde{B} = N^{-1}B$, $\tilde{C} = CN$

2.5.4 Concept de dualité

Il existe une analogie entre les formes compagne commandable et compagne observable, cette analogie est liée à la notion de *dualité*. On appellera systèmes duaux deux systèmes définis respectivement par les équations :

Système S	Système S^*
$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $y(t) = Cx(t)$	$\dot{x}^*(t) = A^T x^*(t) + C^T u(t)$ $y^*(t) = B^T x^*(t)$

Ces systèmes sont tels que :

- Si S est commandable, alors S^* est observable.
- Si S est observable, S^* est commandable.

Il est donc possible de tester l'observabilité d'un système en vérifiant la commandabilité de système dual.

Résumé : passage d'une forme quelconque vers une forme compagne d'observabilité

1-Soit un système S : (A, B, C).

2-Calculer le système dual S^*: $(A^* = A^T, B^* = C^T, C^* = B^T)$

3-Calculer la matrice de passage M^* $(M^{*\,-1})$ pour rendre le système S^* sous forme compagne de commandabilité. Le système obtenu $\tilde{S}^*$: $(\tilde{A}^* = (M^{*\,-1}A^*M^*$ $\tilde{B}^* = (M^{*\,-1}B^*, \tilde{C}^* = C^*M^*$)

4-Calculer le système dual du système $\tilde{S}^*$, le système obtenu $\tilde{S}$: $(\tilde{A} = \tilde{A}^{*T}, \tilde{B} = \tilde{C}^{*T}, \tilde{C} = \tilde{B}^{*T})$ est sous forme compagne d'observabilité.

3. Cas des systèmes multivariables

3.1 Commandabilité

Soit un système multivariable linéaire représenté par le modèle d'état suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

avec : $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^p$ $A(nxn)$, $B(nxm)$, $C(pxn)$ et $D(pxm)$

Suivant le critère de commandabilité de Kalman, le système est commandable si et seulement si $rang[Q_c] = n$.

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B \ldots A^{n-1}B]$$

On a : $B = [b_1 \ldots b_m]$

$$Q_c = [|b_1\, b_2 \ldots b_m||Ab_1 Ab_2 \ldots Ab_m||A^2b_1\, A^2b_2 \ldots A^2b_m| \ldots |A^{n-1}b_m\, A^{n-1}b_m \ldots A^{n-1}b_m|]$$

Dans un système multi-entrées ($m > 1$), la matrice Q_c n'est pas carrée ($Q_c\big((n)\text{x}(nxm)\big)$, et pour que le système soit commandable, il faudra trouver n vecteurs linéarement indépendants dans Q_c en utilisant la méthode suivante (méthode d'indice de commandabilité).

3.1.1 Indice commandabilité

L'indice de commandabilité (IC) n_i relatif à l'entrée u_i est le nombre d'états que l'on peut commander par la seule entrée u_i.

a. Choix par lignes

1- On construit le tableau suivant :

b_1	b_2	b_3	...	b_m	
X	X	X	...	X	A^0
X	0	X	...	X	A^1
0		0	...	X	
			⋮		
			...		A^{n-1}

2- On remplit le tableau ligne par ligne,
3- On indique les vecteurs linéairement indépendants en mettant une croix (X) dans leurs cellules correspondantes
4- Une fois un vecteur linéairement dépondant aux vecteurs précédents est trouvé, on met dans sa cellule un zéro (0). Toutes les cellules se trouvant au-dessous de cette cellule sont laissées vides car les vecteurs correspondants sont aussi linéairement dépendants.
5- On arrête la procédure dès qu'on trouve n vecteurs linéairement indépendants (n croix dans le tableau).
6- L'indice de commandabilité n_i relatif à l'entrée u_i est égal au nombre de croix (X) dans la colonne b_i.

b. Choix par colonnes

Dans ce cas on remplit le tableau colonne par colonne en suivant la même procédure.

3.1.2 Critère de commandabilité des systèmes multivariables

- On calcule les indices de commandabilité $n_i, (i = 1 \dots m)$.
- Le système est dit commandable si $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$.
- Dans ce cas, la matrice de commandabilité Q_c se reduit à la matrice carrée réguière suivante :

$$Q_c = [|b_1\ Ab_1 \dots A^{n_1-1}b_1||b_2\ Ab_2 \dots A^{n_2-1}b_1| \dots |b_m\ Ab_m \dots\ A^{n_m-1}b_m|]$$

- On peut décomposer le système en m sous-systèmes chacun d'ordre n_i commandable par u_i.

Exemple 3.5 : Soit un système à deux entrées :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Trouver les indices de commandabilité de u_1 et u_2 et tester la commandabilité du système.

$$Q_c = [b_1\ b_2\ Ab_1\ Ab_2\ A^2b_1\ A^2b_2\ A^3b_1\ A^3b_2\ ]$$

$$Q_c = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & Ab_1 & Ab_2 & A^2b_1 & A^2b_2 & A^3b_1 & A^3b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 7 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

Choix par lignes

b_1	b_2	
X	X	A^0
X	X	A^1
0		A^2
		A^3

Les indices de commandabilité sont : $n_1 = 2,\ n_2 = 2$.
On a : $\sum_{i=1}^{2} n_i = 4$, le système est commandable.

Choix par colonnes

b_1	b_2	
X	X	A^0
X		A^1
X		A^2
0		A^3

Les indices de commandabilité sont : $n_1 = 3, n_1 = 1$.

On a : $\sum_{i=1}^{2} n_i = 4$, le système est commandable.

3.1.3 Sous espace de commandabilité

Si $rang(Q_c) = r < n$, alors on a :
r états commandables et $n - r$ états non commandables.
Par définition, le sous-espace de commandabilité est composé de r états commandables.

Théorème : Décomposition canonique d'un système non commandable

Si le système n'est pas commandable, il existe une matrice T inversible tel que : $z = Tx$.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_C \\ \dot{z}_{NC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_C \\ z_{NC} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_C \\ z_{NC} \end{bmatrix}$$

avec : $A_1(r\text{x}r)$, $A_2\big(r\text{x}(n-r)\big)$, $A_3\big((n-r)\text{x}(n-r)\big)$. z_C contient les r états commandables et z_{NC} contient les $n - r$ états non commandables.

Cherchons la fonction de transfert du système :

$$H(S) = C(SI - A)^{-1}B$$

$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$

$(SI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} (SI - A_1)^{-1} & A_2(SI - A_1)^{-1}(SI - A_3)^{-1} \\ 0 & (SI - A_3)^{-1} \end{bmatrix}$

alors :

$$H(S) = C_1(SI - A_1)^{-1}B_1$$

On remarque que la fonction de transfert ne dépend que des pôles de sous-système commandable.

3.1.4 Commandabilité de la sortie

On dit que la sortie d'un système est commandable, s'il existe une commande admissible qui peut ramener le système d'un état y_0 à t_0 à un état y_1 en un temps fini. Une condition nécessaire et suffisante est:

$$rang(Q_s) = [C \;\; CAB \;\; CA^2B \; Ab_2 \; \ldots CA^{n-1}B\,] = p$$

où p est le nombre de sorties du système.

3.2 Observabilité

Suivant le critère d'observabilité de Kalman, le système est observable si et seulement si $rang[Q_o] = n$.

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \\ c_1A \\ \vdots \\ c_pA \\ c_1A^2 \\ \vdots \\ c_pA^2 \\ \vdots \\ c_1A^{n-1} \\ \vdots \\ c_pA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Dans un système multi-sorties ($p > 1$), la matrice Q_o n'est pas carrée ($Q_o((p\text{x}n)\text{x}n)$, et pour que le système soit observable, il faudra trouver n vecteurs linéarement indépendants dans Q_o en utilisant la méthode suivante (méthode d'indice d'observabilité).

3.2.1 Indice d'observabilité

L'indice d'observabilité (IO) τ_i relatif à la sortie y_i est le nombre d'états que l'on peut observer en connaissant y_i et u. Pour le calcul de l'indice d'observabilité, on suit la même procédure utilisée pour le calcul de l'indice de commandabilité en remplaçant les b_i par les c_i dans le tableau.

3.2.2 Critère d'observabilité des systèmes multivariables

- On calcule les indices d'observabilité $\tau_i, (i = 1 \dots p)$.
- Le système est dit observable si $\sum_{i=1}^{p} \tau_i = n$.
- Dans ce cas, la matrice d'observabilité Q_o se reduit à la matrice carrée régulière suivante :

$$Q_o = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1A \\ \vdots \\ c_1A^{\tau_1-1} \\ c_2 \\ c_2A \\ \vdots \\ c_2A^{\tau_2-1} \\ \vdots \\ c_p \\ c_pA \\ \vdots \\ c_pA^{\tau_p-1} \end{bmatrix}$$

Exemple 3.6 : Soit un système à deux entrées :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -3 & -4 & 6 \\ -3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Trouver les indices d'observabilité de y_1 et y_2 et tester l'observabilité du système.

$$Q_o = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1A \\ c_2A \\ c_1A^2 \\ c_2A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -4 & 6 \\ -4 & -6 & 8 \\ -3 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Choix par lignes

c_1	c_2	
X	X	A^0
0	0	A^1
		A^2

On a : $c_1A = 5c_1 - 3c_2$ et $c_2A = c_1A - c_2 + c_1$, alors : $rang(Q_o) = 2$.
Les indices d'observabilité sont : $\tau_1 = 1,\ \tau_1 = 1$.
$\sum_{i=1}^{2} \tau_i = 2$, le système n'est observable.

3.2.3 Sous espace d'observabilité

Si $rang(Q_o) = r < n$, alors on a :
r états observables et $n - r$ états non observables.
Par définition, le sous-espace d'observabilité est composé de r états observables.

Théorème : Décomposition canonique d'un système non observable

Si le système n'est pas observable, il existe une matrice T_1 inversible tel que : $z = T_1x$.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_O \\ \dot{z}_{NO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_{N0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_{N0} \end{bmatrix}$$

avec : $A_1(r\text{x}r)$, $A_2\big(r\text{x}(n-r)\big)$, $A_3\big((n-r)\text{x}(n-r)\big)$. z_O contient les r états observables et z_{NO} contient les $n - r$ états non observables.

Cherchons la fonction de transfert du système :

$$\begin{aligned} H(S) &= C(SI - A)^{-1}B \\ &= C_1(SI - A_1)^{-1}B_1 \end{aligned}$$

On remarque que la fonction de transfert ne dépend que des pôles de sous-système observable.

3.3 Décomposition canonique d'un système multivariable

L'espace d'état peut être décomposé en quatre sous-espaces $Z_{CNO}, Z_{CO}, Z_{NCNO}$ et Z_{NCO}.

1- Z_{CNO} contient les états commandables et non observables,
2- Z_{CO} contient les états commandables et observables,
3- Z_{NCNO} contient les états non commandables et non observables,
4- Z_{NCO} contient les états non commandables et observables.

Donc, les équations d'état peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_{CNO} \\ \dot{Z}_{CO} \\ \dot{Z}_{NCNO} \\ \dot{Z}_{NCO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & \boldsymbol{A_{22}} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{CNO} \\ \boldsymbol{Z_{CO}} \\ Z_{NCNO} \\ Z_{NCO} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \boldsymbol{B_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad \boldsymbol{C_2} \quad 0 \quad C_4] \begin{bmatrix} Z_{CNO} \\ Z_{CO} \\ Z_{NCNO} \\ Z_{NCO} \end{bmatrix}$$

$$H(S) = C_2(SI - A_{22})^{-1}B_2$$

Les états non commandables et/ou non observables n'apparaissent pas dans la fonction de transfert.

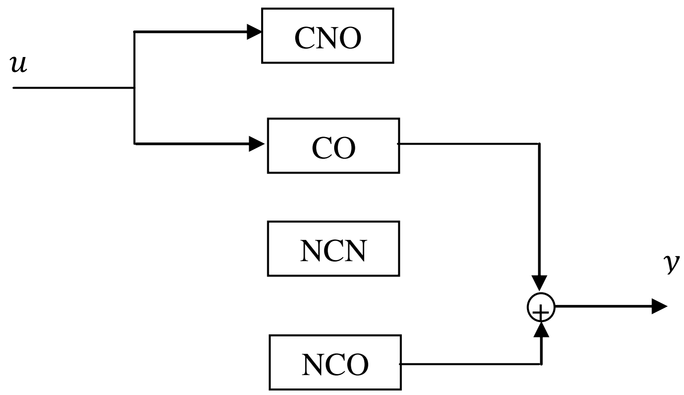


Fig.3.2 Décomposition canonique d'un système.

3.4 Formes compagnes (formes canoniques) pour les systèmes multivariables

Dans cette section trois décompositions fondamentales seront étudiées :

1. Décomposition en r sous-systèmes mono-entrée commandables avec: $r < m$, où m est le nombre d'entrées.
2. Décomposition en m sous-systèmes mono-entrée commandables.
3. Décomposition en p sous systèmes mono-sortie observables, où p est le nombre de sorties.

Les deux premières décompositions ont pour but de mettre sous une forme particulière l'ensemble des matrices A et B et on verra leurs importances dans l'étude du problème de commande par retour d'état. La troisième décomposition a pour but de simplifier les formes de A et C et sera utilisée dans le problème d'observation d'état.

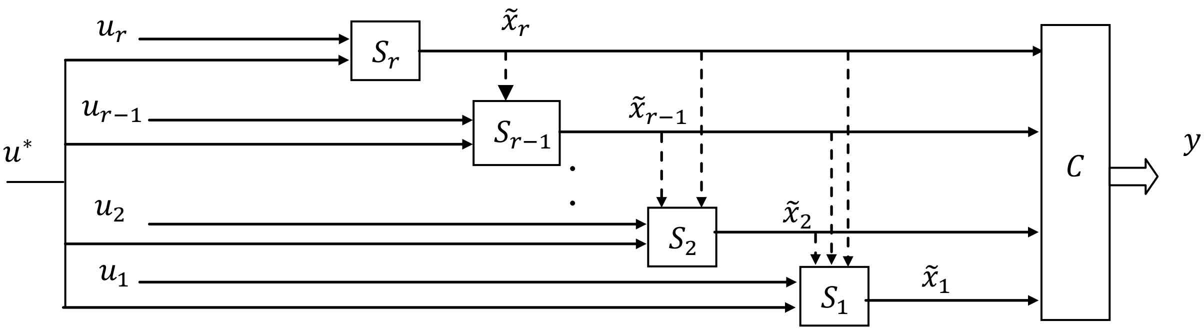
3.4.1 Décomposition en r <m sous systèmes mono-entrée commandables

On cherche à décomposer le système global de dimension n et possédant m entrées en un nombre de sous-systèmes r avec $r < m$ tel que :

- Chaque sous-système soit commandable par une seule entrée,
- Ils soient hiérarchisés de telle sorte que :

S_r agisse sur S_{r-1}.... S_1 ,
S_{r-1} agisse sur S_{r-2}.... S_1,
.....
S_2 agisse sur S_1.

Il est à noter que les $m - r$ composantes de u soit $u^* = [u_{r+1} \dots u_m]^T$ peuvent éventuellement agir sur tous les sous-systèmes.
On désigne par n_i la dimension du sous-système i et par $\tilde{x}_i$ son vecteur d'état.



L'équation d'état du sous-système S_i est donc de la forme :

$$\dot{\tilde{x}}_i = \tilde{A}_{ii}\tilde{x}_i + \left[\tilde{A}_{i,i+1}\tilde{x}_{i+1} \dots + \tilde{A}_{ir}\tilde{x}_r\right] + B_i u_i + B^* u^*$$

La quantité entre crochet traduit l'interaction sur le sous-système S_i des sous-systèmes S_{i+1} jusqu'à S_r . Donc, les matrices $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont sous la forme triangulaire :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \dots & \tilde{A}_{1r} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \dots & \tilde{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{r1} & \tilde{A}_{r2} & \dots & \tilde{A}_{rr} \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{\qquad r \qquad} & \xleftrightarrow{m-r} \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 & B_1^* \\ 0 & b_2 & \dots & 0 & B_2^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_r & B_r^* \end{bmatrix} \end{array}$$

avec :

$$\tilde{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0^i & -a_1^i & \dots & -a_{n_i-1}^i \end{bmatrix} \quad \underset{i<j}{\tilde{A}_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \dots & * \end{bmatrix} \quad \underset{i>j}{\tilde{A}_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique globale est sous la forme :

$$\left|SI - \tilde{A}\right| = \prod_{i=1}^{r} \left|SI - \tilde{A}_{ii}\right| = \prod_{i=1}^{r} \left(S^{n_i} + a_{n_{i-1}}^i S^{n_i - 1} + \cdots + a_0^i\right)$$

Maintenant, pour mettre le système sous cette forme (en r sous-systèmes mono-entrée et commandables), il suffit de trouver une matrice de passage régulière M tel que $x = M\tilde{x}$.

Détermination de la matrice de passage M

Soit un système de dimension n:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

On pose $x = M\tilde{x}$ avec M est une matrice régulière, alors, il vient :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

où: $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$

On a : $\tilde{A} = M^{-1}A\,M \Rightarrow \tilde{A}M^{-1} = M^{-1}A$

M est une matrice carrée inversible de dimensin nxn composée de r blocs (M_1 ,M_2 ...M_r) et chaque bloc M_i ($i = 1 \dots r$) contient n_i lignes (idem pour M^{-1})

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^1 & -a_1^1 & \dots & -a_{n_1-1}^1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} & \dots &
\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^2 & -a_1^2 & \dots & -a_{n_2-1}^2 \end{bmatrix} & \dots &
\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} & \dots &
\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^r & -a_1^r & \dots & -a_{n_r-1}^r \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} M_1^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_1^{-1}(n_1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_2^{-1}(n_2) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(n_r) \end{bmatrix}
\begin{array}{c} \updownarrow n_1 \\ \\ \\ \updownarrow n_2 \\ \\ \\ \\ \updownarrow n_r \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
= \begin{bmatrix} M_1^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_1^{-1}(n_1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_2^{-1}(n_2) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(n_r) \end{bmatrix} A
$$

- Determination des lignes du 1$^{\text{ier}}$ bloc de M^{-1}, c-à-d $M_1^{-1}(i)$ pour : $i = 2 \dots n_1$

$$
\begin{gathered}
M_1^{-1}(2) = M_1^{-1}(1)A \\
M_1^{-1}(3) = M_1^{-1}(2)A = M_1^{-1}(1)A^2 \\
\vdots \\
M_1^{-1}(n_1) = M_1^{-1}(n_1 - 1)A = M_1^{-1}(1)A^{n_1-1}
\end{gathered}
$$

- Determination des lignes du 2$^{\text{ième}}$ bloc de M^{-1}, c-à-d $M_2^{-1}(i)$ pour : $i = 2 \dots n_2$

$$
\begin{gathered}
M_2^{-1}(2) = M_2^{-1}(1)A \\
M_2^{-1}(3) = M_2^{-1}(2)A = M_2^{-1}(1)A^2 \\
\vdots \\
M_2^{-1}(n_2) = M_2^{-1}(n_2 - 1)A = M_2^{-1}(1)A^{n_2-1}
\end{gathered}
$$

- Determination des lignes du $r^{\text{ième}}$ bloc de M^{-1}, c-à-d $M_r^{-1}(i)$ pour : $i = 2 \dots n_r$

$$
\begin{gathered}
M_r^{-1}(2) = M_r^{-1}(1)A \\
M_r^{-1}(3) = M_r^{-1}(2)A = M_r^{-1}(1)A^2 \\
\vdots \\
M_r^{-1}(n_r) = M_r^{-1}(n_r - 1)A = M_r^{-1}(1)A^{n_r-1}
\end{gathered}
$$

D'une façon générale, les lignes du $i^{\text{ième}}$ bloc de M^{-1} pour $i = 2 \dots n_i$

$$
\begin{gathered}
M_i^{-1}(2) = M_i^{-1}(1)A \\
M_i^{-1}(3) = M_i^{-1}(2)A = M_i^{-1}(1)A^2 \\
\vdots \\
M_i^{-1}(n_i) = M_i^{-1}(n_i - 1)A = M_i^{-1}(1)A^{n_i-1}
\end{gathered}
$$

- Determination de la 1ière ligne de chaque bloc de M^{-1}, c-à-d $M_i^{-1}(1)$ pour : $i = 1 \dots n_r$

On a: $\tilde{B} = M^{-1}B$

$$\begin{array}{c} \overset{r}{\longleftrightarrow} \quad \overset{m-r}{\longleftrightarrow} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & B_1^* \\ 1 & * & * & \dots & * & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & B_2^* \\ 0 & 1 & * & \dots & * & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & B_r^* \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} M_1^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_1^{-1}(n_1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_2^{-1}(n_2) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(n_r) \end{bmatrix} [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_r \quad \dots \quad b_m]$$

En développant

$$\begin{array}{c} \overset{r}{\longleftrightarrow} \quad \overset{m-r}{\longleftrightarrow} \\ \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & B_1^* \\ 1 & * & * & \dots & * & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & B_2^* \\ 0 & 1 & * & \dots & * & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & B_r^* \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \overset{r}{\longleftrightarrow} \qquad \overset{m-r}{\longleftrightarrow} \\ \left[\begin{array}{cccc:cc} M_1^{-1}(1)b_1 & M_1^{-1}(1)b_2 & \dots & M_1^{-1}(1)b_r & \dots & M_1^{-1}(1)b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_1^{-1}(n_1)b_1 & M_1^{-1}(n_1)b_2 & \dots & M_1^{-1}(n_1)b_r & \dots & M_1^{-1}(n_1)b_m \\ M_2^{-1}(1)b_1 & M_2^{-1}(1)b_2 & \dots & M_2^{-1}(1)b_r & \dots & M_2^{-1}(1)b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_2^{-1}(n_2)b_1 & M_2^{-1}(n_2)b_2 & \dots & M_2^{-1}(n_2)b_r & \dots & M_2^{-1}(n_2)b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_r^{-1}(1)b_1 & M_r^{-1}(1)b_2 & \dots & M_r^{-1}(1)b_r & \dots & M_r^{-1}(1)b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_r^{-1}(n_r)b_1 & M_r^{-1}(n_r)b_2 & \dots & M_r^{-1}(n_r)b_r & \dots & M_r^{-1}(n_r)b_m \end{array}\right] \end{array}$$

Par identification des blocs, on peut écrire :

$$\begin{aligned} &M_1^{-1}(1)b_1 = 0 \\ &M_1^{-1}(2)b_1 = M_1^{-1}(1)Ab_1 = 0 \\ &\quad\vdots \\ &M_1^{-1}(n_1)b_1 = 1 = M_1^{-1}(1)A^{n_1-1}b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &M_2^{-1}(1)b_2 = 0 \\ &M_2^{-1}(2)b_2 = M_2^{-1}(1)Ab_2 = 0 \\ &\quad\vdots \\ &M_2^{-1}(n_2)b_2 = 1 = M_2^{-1}(1)A^{n_2-1}b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &M_r^{-1}(1)b_r = 0 \\ &M_r^{-1}(2)b_r = M_r^{-1}(1)Ab_r = 0 \\ &\quad\vdots \\ &M_r^{-1}(n_r)b_r = 1 = M_r^{-1}(1)A^{n_r-1}b_r \end{aligned}$$

Sous forme compacte :

$$\begin{aligned} M_1^{-1}(1)[b_1 \quad Ab_1 \quad \dots \quad A^{n_1-1}b_1] &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \\ M_2^{-1}(1)[b_2 \quad Ab_2 \quad \dots \quad A^{n_2-1}b_2] &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \\ &\vdots \\ M_r^{-1}(1)[b_r \quad Ab_r \quad \dots \quad A^{n_r-1}b_r] &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} M_1^{-1}(1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \end{bmatrix} \underbrace{[b_1 \quad Ab_1 \quad \dots \quad A^{n_1-1}b_1 \quad b_2 \quad Ab_2 \quad \dots \quad A^{n_2-1}b_2 \quad \dots b_r \quad Ab_r \quad \dots \quad A^{n_r-1}b_r]}_{Q_c} =$$

$$\begin{array}{c} \overleftrightarrow{\;n_1\;} \quad \overleftrightarrow{\;n_2\;} \quad \overleftrightarrow{\;n_r\;} \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} M_1^{-1}(1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} Q_c^{-1}$$

On pose :

$$Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{n1} \\ \vdots \\ q_{n1+n_2} \\ \vdots \\ q_{n_1+n_2+\dots+n_r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1^{-1}(1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \overleftrightarrow{\quad n_1+n_2+\dots+n_r \quad} \\ \overleftrightarrow{\quad n_1+n_2 \quad} \\ \overleftrightarrow{\;n_1\;} \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{n1} \\ \vdots \\ q_{n1+n_2} \\ \vdots \\ q_{n_1+n_2+\dots+n_r} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \updownarrow n_1 \quad \updownarrow n_1+n_2 \quad \updownarrow n_1+n_2+\dots+n_r \end{array}$$

d'où :

$$M_i^{-1}(1) = q_{\sigma_i}$$

avec :

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$$

3.4.1.1 Résumé : Décomposition d'un système MIMO en r<m sous-systèmes mono-entrée commandables

Soit un système MIMO d'ordre n:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

1. *Calculer les indices de commandabilité $n_1, n_2, \dots, n_r$ en utilisant le choix par colonnes.*
2. *Déterminer la matrice de commandabilité :*

$$Q_C = [b_1 \quad Ab_1 \quad \ldots \quad A^{n_1-1}b_1 \,\vdots\, b_2 \quad Ab_2 \quad \ldots \quad A^{n_2-1}b_2 \,\vdots \ldots \vdots\, b_r \quad Ab_r \quad \ldots \quad A^{n_r-1}b_r]$$

3. *Calculer* Q_c^{-1}

$$Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \text{avec } q_i \text{ la } i^{\text{ième}} \text{ ligne de } Q_c^{-1}$$

4. *Pour i =1…r, on définit :*

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$$

5. *Calculer* M^{-1}

$$M^{-1} == \begin{bmatrix} q_{\sigma_1} \\ q_{\sigma_1}A \\ \vdots \\ q_{\sigma_1}A^{n_1-1} \\ \hdashline q_{\sigma_2} \\ q_{\sigma_2}A \\ \vdots \\ q_{\sigma_2}A^{n_2-1} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline q_{\sigma_r} \\ q_{\sigma_r}A \\ \vdots \\ q_{\sigma_r}A^{n_r-1} \end{bmatrix}$$

6. *Calculer M et déterminer :* $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$ *où :*

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

Exemple 3.7 Soit le système :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Décomposer le système en r sous systèmes mono-entrée commandables.

$m = 2 \Rightarrow r = 1$

1- Indices de commandabilité (choix par colonnes)

$$Q_c = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & A^2b_1 & b_2 & Ab_2 & A^2b_2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$n_1 = 3, n_2 = 0$

b_1	b_2	
X		A^0
X		A^1
X		A^2

2-

$$Q_c = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & A^2b_1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

3-

$$Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 5/2 & 4 & -3/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

4- $i = 1 \Rightarrow \sigma_1 = n_1 = 3$

5- $M^{-1} = \begin{bmatrix} q_{\sigma_1} \\ q_{\sigma_1}A \\ q_{\sigma_1}A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_3A \\ q_3A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \\ 1/2 & 4 & -9/2 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

6-

$$\tilde{A} = M^{-1}A\,M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \tilde{B} = M^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

3.4.2 Décomposition du système en m sous systèmes mono-entrée commandables

Soit le système multivariable d'ordre n :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

On veut décomposer ce système en *m* sous systèmes mono-entrée commandables où $m = rang(B)$.
Il est possible de trouver une matrice de passage M tel que $x = M\tilde{x}$, donc :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

avec : $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$.
où :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^1 & -a_1^1 & \dots & -a_{n_1-1}^1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^2 & -a_1^2 & \dots & -a_{n_2-1}^2 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^m & -a_1^m & \dots & -a_{n_m-1}^m \end{bmatrix}
\end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & * & * & \cdots & * \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 1 & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Détermination de la matrice de passage M

Pour obtenir cette matrice on applique le même algorithme de la décomposition en *r* sous-systèmes, le seul changement est dans la construction de la matrice de commandabilité qui se fait cette fois-ci en suivant *le choix par lignes*.

3.4.2.1 Résumé : Décomposition d'un système multivariable en m sous-systèmes mono-entrée commandables

Soit un système mutivariable d'ordre n :

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu$$
$$y(t) = Cx$$

1. *Calculer les indices de commandabilité $n_1, n_2, \dots, n_m$ en utilisant le choix par ligne.*
2. *Déterminer la matrice de commandabilité :*

$$Q_C = [b_1 \quad Ab_1 \quad \dots \quad A^{n_1-1}b_1 \,\vdots\, b_2 \quad Ab_2 \quad \dots \quad A^{n_2-1}b_2 \,\vdots \dots \vdots\, b_m \quad Ab_m \quad \dots \quad A^{n_m-1}b_m]$$

3. *Calculer Q_c^{-1}*

$$Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \text{ avec } q_i \text{ la } i^{\text{ième}} \text{ ligne de } Q_c^{-1}$$

4. *Pour i =1…m, on définit :*

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$$

5. *Calculer M^{-1}*

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} q_{\sigma_1} \\ q_{\sigma_1}A \\ \vdots \\ q_{\sigma_1}A^{n_1-1} \\ \hdashline q_{\sigma_2} \\ q_{\sigma_2}A \\ \vdots \\ q_{\sigma_2}A^{n_2-1} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline q_{\sigma_m} \\ q_{\sigma_m}A \\ \vdots \\ q_{\sigma_m}A^{n_m-1} \end{bmatrix}$$

6. *Calculer M et déterminer : $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$ où :*

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

Exemple 3.8 : Décomposer le système de l'exemple précédent en $m = 2$ sous système mono-entrée commandables.

1- Indices de commandabilité (choix par lignes)

$$Q_c = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & Ab_1 & A\,b_2 & A^2b_2 & A^2b_2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -3 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

$det[b_1 \quad b_2 \quad Ab_1] = 0$ (rejeté)

$det[b_1 \quad b_2 \quad Ab_2] \neq 0$

$n_1 = 1, n_2 = 2$

b_1	b_2	
X	X	A^0
0	X	A^1
		A^2

2-

$$Q_c = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & Ab_2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

3-

$$Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

4- $i = 1 \Rightarrow \sigma_1 = n_1 = 1$

$i = 2 \Rightarrow \sigma_2 = n_1 + n_2 = 3$

5- $M^{-1} = \begin{bmatrix} q_{\sigma_1} \\ \hline q_{\sigma_2} \\ q_{\sigma_2} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 A \\ q_3 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6-

$$\tilde{A} = M^{-1} A\, M = \left[\begin{array}{cc:c} -2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -4 \end{array}\right], \tilde{B} = M^{-1} B = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

3.4.3 Décomposition du système p sous systèmes mono-sortie observables

Si la décomposition en sous-systèmes commandables est conçue dans une optique de commande, cette nouvelle décomposition est destinée à faciliter le problème de la construction du vecteur d'état et sera à la base de la réalisation des observateurs d'état.

Pour obtenir cette décomposition, on fait appel au principe de dualité :

$$\underbrace{S(A,B,C)}_{systeme\ initial} \xrightarrow{Dual} S^*(A^* = A^T, B^* = C^T, C^* = B^T) \xrightarrow[\ ]{\substack{Décomposition\ en\ "p" \\ \text{sous systemes} \\ \text{commandables} \\ \left(\text{calcul de } M^{*-1} \text{ et } M^*\right)}} \tilde{S}^*\left(\tilde{A}^*, \tilde{B}^*, \tilde{C}^*\right)$$

$$\xrightarrow{Dual} \underbrace{\tilde{S}\ \left(\tilde{A} = \tilde{A}^{*T}, \tilde{B} = \tilde{C}^{*T}, \tilde{C} = \tilde{B}^{*T}\right)}_{\substack{Système\ décomposé \\ en \\ "p"\, sous\ systemes \\ observables}}$$

4. Exercices

Exercice 01 : Soient deux systèmes monovariables:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 2 \end{bmatrix} u(t),\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1- Etudier la commandabilité et l'observabilité des deux systèmes.

Soit un système monovariable :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&1&0\\2&0&\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u,\ y=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

2- Pour quelle valeur de α le système soit non commandable.
3- Le système est-il observable pour cette valeur de α.

Exercice 02 : Soit un système monovariable :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u\ ,y=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

1- Etudier la commandabilité et l'observabilité du système.
2- Mettre le système sous la forme compagne de commandabilité (s'il est commandable).
3- Mettre le système sous forme compagne d'observabilité (s'il est observable).

Exercice 03: Considérons un système multivariable:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&-1\\0&1\\0&2\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix},\ y=\begin{bmatrix}1&-1&1&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

Etudier la commandabilité et l'observabilité du système en utilisant les deux méthodes (choix par lignes et choix par colonnes).

Exercice 04:
Considérons un système multivariable:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\2&-4&2\\0&1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix},\ y=\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

1- Décomposer le système en r(avec $r<m$) sous-systèmes mono-entrée commandables.
2- Décomposer le système en m sous-systèmes mono-entrée commandables.

Exercice 05:
Considérons un système multivariable:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&1&0&0\\0&0&0&1\\1&1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix},\ y=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

1- Décomposer le système en r(avec $r<m$) sous-systèmes mono-entrée commandables.
2- Décomposer le système en m sous-systèmes mono-entrée commandables.
3- Décomposer le système en p sous-système mono-sortie observables.

Chapitre 4
Représentation des systèmes multivariables par matrice de transfert

1. Introduction

Dans le cas systèmes monovariables, la fonction reliant l'entrée à la sortie est appelée *fonction de transfert*. Dans le cas des systèmes multivariables, nous avons plusieurs fonctions de transfert représentant l'effet de chaque entrée sur chaque sortie. L'ensemble de ces fonctions rangées en tableau constitue la *matrice de transfert*. Dans ce chapitre, nous montrons les relations de passage d'une représentation par fonction (matrice) de transfert vers une représentation d'état et vice versa.

2. Cas des systèmes monovariables

2.1 Passage de la Représentation d'état vers la fonction de transfert

Le passage de la représentation d'état vers la fonction de transfert n'offre aucune difficulté. Soit la représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Posons les conditions initiales nulles ($x(t=0)=0$) et prenons la transformée de Laplace (TL) des deux équations (4.1), on obtient :

$$SX(s) = AX(s) + BU(s) \tag{4.2}$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \tag{4.3}$$

A partir de (4.2), on peut écrire :

$$(SI - A)X(s) = BU(s) \tag{4.4}$$

A partir de (4.3) et (4.4):

$$Y(s) = C(SI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \tag{4.5}$$

La fonction de transfert est :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(SI - A)^{-1}B + D \tag{4.6}$$

Exemple 4.1 : Montrer que la fonction de transfert du MCC est unique, c.-à-d. calculer la fonction de transfert en utilisant les deux représentations d'état du MCC (exemples 2.1 et 2.2 donnés dans le deuxième chapitre) :

Première représentation du MCC

On a : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], D = 0.$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 & s + a_1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\left(adj \begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 & s + a_1 \end{bmatrix}\right)^T}{det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 & s + a_1 \end{bmatrix}\right)} = \frac{\left(\begin{bmatrix} s + a_1 & -a_0 \\ 1 & s \end{bmatrix}\right)^T}{(s(s + a_1) + a_0)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{[1\ 0]\begin{bmatrix} s + a_0 & 1 \\ -a_0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}}{(s(s + a_0) + a_0)} = \frac{b_0}{(s^2 + a_1 s + a_0)} = \frac{K}{JLs^2 + (fL + JR)s + Rf}$$

Deuxième représentation du MCC

On a :$A = \begin{bmatrix} -R/L & 0 \\ K/J & -f/J \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1]$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s + \dfrac{R}{L} & 0 \\ \dfrac{-K}{J} & s + \dfrac{f}{J} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\left(adj \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & 0 \\ \frac{-K}{J} & s + \frac{f}{J} \end{bmatrix} \right)^{T}}{det \left(\begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & 0 \\ \frac{-K}{J} & s + \frac{f}{J} \end{bmatrix} \right)} = \frac{\left(\begin{bmatrix} s + \frac{f}{J} & \frac{K}{J} \\ 0 & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \right)^{T}}{\left(s + \frac{f}{J}\right)\left(s + \frac{R}{L}\right)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{[0\ 1] \begin{bmatrix} s + \frac{f}{J} & 0 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}{\left(s + \frac{f}{J}\right)\left(s + \frac{R}{L}\right)} = \frac{K}{JLs^2 + (fL + JR)s + Rf}$$

Remarque2.1: A partir de la relation de passage donnée par l'équation (4.6), on remarque que le dénominateur de la fonction de transfert n'est autre que le polynôme caractéristique $(\mathrm{sI} - \mathrm{A})$ de la matriceA, donc les *pôles* du système sont les *valeurs propres* de la matrice$A$.

2.2 Passage de la fonction de transfert vers la représentation d'état

Comme il vient d'être mentionné, s'il existe une seule et unique fonction de transfert décrivant un système linéaire, il peut en revanche exister plusieurs représentations d'état dites *formes* ou *réalisations* du système. Dans cette partie, il est montré comment passer de la fonction de transfert à plusieurs formes (réalisations) d'état. On se place d'amblée dans le cas le plus fréquent d'un système continu, stationnaire, déterministe et causal.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} \ldots + a_1 s + a_0} \tag{4.7}$$

où $N(s)$ est le numérateur de la fonction de transfert.

2.2.1 Forme parallèle

a) Cas des pôles distincts : Dans le cas où les pôles λ_i $(i = 1 \ldots n)$ sont distincts, il est facile de réaliser la décomposition en éléments simples de $G(s)$.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s + \lambda_i)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{s + \lambda_i} \right) \tag{4.8}$$

avec :

$\alpha_i = \lim\limits_{S \to -\lambda_i} (S + \lambda_i) G(s)$

On pose $X_i(s) = \frac{\alpha_i}{s + \lambda_i} U(s)$ on aura :

$$sX_i(s) = \alpha_i U(s) - \lambda_i X_i(s) \tag{4.9}$$

A partir de (4.8), il vient

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i U(s)}{s + \lambda_i} \right) = X_1(s) + X_2(s) + \cdots + X_n(s)$$

En utilisant la transformée inverse de Laplace (TL inverse), on obtient :

$$\dot{x}_i(t) = \alpha_i u(t) - \lambda_i x_i(t)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_n(t)$$

Ce qui donne la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1\ 1 \dots 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Une telle forme est *dite diagonale* car la matrice d'évolution *A* est diagonale.

Remarque 4.2 :

- Cette forme peut être modifiée en remplaçant le vecteur B par le vecteur C^T et le vecteur C par le vecteur B^T, ceci peut être obtenu en choisissant $X_i(s) = \frac{1}{s+\lambda_i} U(s)$ au lieu de $X_i(s) = \frac{\alpha_i}{s+\lambda_i} U(s)$ dans la relation (4.8).
- La matrice d'état A est diagonale, ses valeurs propres qui sont les pôles du système sont les éléments de la diagonale.

Cette forme est constituée de *n* blocs élémentaires disposés en parallèle.

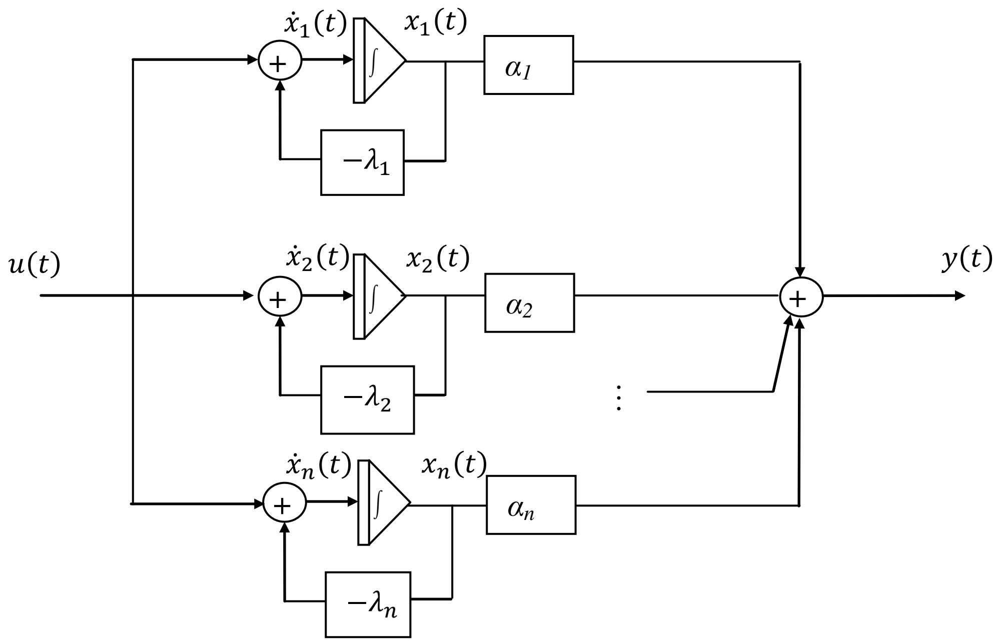


Fig.4.1 Forme parallèle de la représentation d'état.

Exemple 4.2 : Trouver la forme d'état parallèle du système défini par la fonction de transfert suivante :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Les pôles sont distincts : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$, on décompose la fonction de transfert en éléments simples :

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}=\frac{\alpha_1}{s}+\frac{\alpha_2}{s+1}+\frac{\alpha_3}{s+2}$$
$$\alpha_1=\lim_{s\to 0} sG(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\alpha_2=\lim_{s\to -1}(s+1)G(s)=\lim_{s\to -1}(s+1)\frac{1}{s(s+1)(s+2)}=-\frac{1}{2}$$
$$\alpha_3=\lim_{s\to -2}(s+2)G(s)=\lim_{s\to -2}(s+2)\frac{1}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{2}$$

d'où

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{2\,s}-\frac{1}{2(s+1)}+\frac{1}{2(s+2)}$$

$$Y(s)=\frac{U(s)}{2\,s}-\frac{U(s)}{2(s+1)}+\frac{U(s)}{2(s+2)}$$

On pose :$X_1(s)=\frac{U(s)}{2\,s}$,$X_2(s)=-\frac{U(s)}{2(s+1)}$, $X_3(s)=\frac{U(s)}{2(s+2)}$, alors, il vient :

$$Y(s)=X_1(s)+X_2(s)+X_3(s)\Rightarrow y(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$$
$$sX_1(s)=\frac{U(s)}{2}\Rightarrow \dot{x}_1(t)=\frac{1}{2}u(t)$$
$$sX_2(s)+X_2(s)=-\frac{U(s)}{2}\Rightarrow \dot{x}_2(t)=-x_2(t)-\frac{1}{2}u(t)$$
$$sX_3(s)+2X_3(s)=\frac{U(s)}{2}\Rightarrow \dot{x}_3(t)=-2x_3(t)+\frac{1}{2}u(t)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=[1\ 1\ 1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

Si on pose :$X_1(s)=\frac{U(s)}{s}$,$X_2(s)=\frac{U(s)}{(s+1)}$, $X_3(s)=\frac{U(s)}{(s+2)}$, on aura :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=[\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

b) Cas des pôles multiples : Dans ce cas, on obtient la forme quasi diagonale dite *forme de Jordan*. Dans un premier temps, pour comprendre ce qui peut être envisagé dans cette situation, l'on peut tout simplement considérer une fonction de transfert $G(s)$ ne possédant qu'un seul pôle γ de multiplicité *n*. on a alors :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{(s+\gamma)^n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_i}{(s+\gamma)^i}\right)$$

avec :$\beta_i = \lim_{s\to -\gamma} \frac{1}{(n-i)!}\left[\frac{d^{n-i}}{ds^{n-i}}[(s+\gamma)^n G(s)]\right]$

On pose $X_{n+1-i}(s) = \frac{U(s)}{(s+\gamma)^i}$, on aura : $Y(s) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{U(s)}{(s+\gamma)^i}\right)$

Pour $i = 1$: $X_n(s) = \frac{U(s)}{(s+\gamma)}$ Pour $i = 2$: $X_{n-1}(s) = \frac{U(s)}{(s+\gamma)^2} = \frac{X_n(s)}{(s+\gamma)}$

Pour $i = 3$: $X_{n-2}(s) = \frac{U(s)}{(s+\gamma)^3} = \frac{X_{n-1}(s)}{(s+\gamma)}$ . . . Pour $i = n$: $X_1(s) = \frac{U(s)}{(s+\gamma)^n} = \frac{X_2(s)}{(s+\gamma)}$

$$Y(s) = \beta_1\left(\frac{U(s)}{(s+\gamma)}\right) + \beta_2\left(\frac{U(s)}{(s+\gamma)^2}\right) + \cdots + \beta_n\left(\frac{U(s)}{(s+\gamma)^n}\right)$$
$$y(t) = \beta_1 x_n(t) + \beta_2 x_{n-1}(t) + \cdots + \beta_1 x_1(t)$$

D'une façon générale :

pour $j = n$: $X_n(s) = \frac{U(s)}{(s+\lambda)} \Rightarrow \dot{x}_n(t) = -\gamma\, x_n(t) + u(t)$

pour $j = n-1$: $X_j(s) = \frac{X_{j+1}(s)}{(s+\lambda)} \Rightarrow \dot{x}_j(t) = -\gamma\, x_j(t) + x_{j+1}(t)$

Ce qui donne la forme quasi diagonale suivante :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\gamma & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -\gamma & 1 & \vdots & \vdots\\ \vdots & 0 & -\gamma & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u(t) \tag{4.11}$$

$$y(t) = [\beta_n\ \beta_{n-1} \dots \beta_1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

Remarque 4.3 : Dans le cas où la fonction de transfert possède « p » pôles simples λ_i $(i = 1 \dots p)$ et un pôle multiple γ de multiplicité « *q* », avec « *n =p+q* », la décomposition en éléments simples donne :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} \dots + a_1 s + a_0} = \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\alpha_i}{s+\lambda_i}\right) + \sum_{j=1}^{q}\beta_j\left(\frac{U(s)}{(s+\gamma)^j}\right)$$

avec :

$$\alpha_i = \lim_{s\to -\lambda_i}(s+\lambda_i)G(s)$$

$$\beta_j = \lim_{s\to -\gamma}\frac{1}{(q-j)!}\left[\frac{d^{q-j}}{ds^{q-j}}[(s+\gamma)^q G(s)]\right]$$

Exemple 4.3 : Trouver la forme quasi diagonale du système défini par : $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)^3}$

La fonction de transfert contient un pôle simple $\lambda_1 = -1$ et un pôle multiple de multiplicité trois $\gamma = -2$, donc, la décomposition en éléments simples de la fonction de transfert donne.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)^3} = \frac{\alpha_1}{(s+1)} + \frac{\beta_1}{(s+2)} + \frac{\beta_2}{(s+2)^2} + \frac{\beta_3}{(s+2)^3}$$

avec :

$$\alpha_1 = \lim_{s\to-1}(s+1)G(s) = \lim_{s\to-1}(s+1)\frac{1}{(s+1)(s+2)^3} = 1$$

$$\beta_3 = \lim_{s\to-2}(s+2)^3 G(s) = \lim_{s\to-2}(s+2)^3\frac{1}{(s+1)(s+2)^3} = -1$$

$$\beta_2 = \lim_{s\to-2}\left[\frac{d}{ds}[(s+2)^3 G(s)]\right] = \lim_{s\to-2}\left[\frac{d}{ds}\left[(s+2)^3\frac{1}{(s+1)(s+2)^3}\right]\right] = \lim_{s\to-2}\left[\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+1)}\right]\right]$$

$$\beta_2 = \lim_{s\to-2}\left[\frac{-1}{(s+1)^2}\right] = -1$$

$$\beta_1 = \lim_{s\to-2}\left[\frac{d^2}{ds^2}[(s+2)^3 G(s)]\right] = \lim_{s\to-2}\left[\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{(s+1)}\right]\right] = \lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left[\frac{-1}{(s+1)^2}\right]$$

$$= \lim_{s\to-2}\left[\frac{2(s+1)}{(s+1)^4}\right] = -2$$

d'où :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)^3} - \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{U(s)}{(s+1)} - \frac{U(s)}{(s+2)^3} - \frac{U(s)}{(s+2)^2} - \frac{2\,U(s)}{(s+2)}$$

On pose : $X_4(s) = \frac{U(s)}{(s+2)}$, $X_3(s) = \frac{U(s)}{(s+2)^2}$, $X_2(s) = \frac{U(s)}{(s+2)^3}$ et $X_1(s) = \frac{U(s)}{(s+1)}$, alors :

$$Y(s) = X_1(s) - X_2(s) - X_3(s) - 2X_4(s) \Rightarrow y(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) - 2x_4(t)$$

$$X_4(s) = \frac{U(s)}{(s+2)} \Rightarrow \dot{x}_4(t) = -2x_4(t) + u(t)$$

$$X_3(s) = \frac{U(S)}{(s+2)^2} = \frac{X_4(s)}{(s+2)} \Rightarrow \dot{x}_3(t) = -2x_3(t) + x_4(t)$$

$$X_2(s) = \frac{U(s)}{(s+2)^3} = \frac{X_3(s)}{(s+2)} \Rightarrow \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + x_3(t)$$

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{(s+1)} \Rightarrow \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

2.2.2 Forme série

Dans ce cas la fonction de transfert peut être écrite sous forme de produit d'éléments élémentaires.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{\prod_{i=1}^{n}(s+\lambda_i)} = k \; \frac{1}{(s+\lambda_1)} \frac{1}{(s+\lambda_2)} \dots \frac{1}{(s+\lambda_n)}$$
$$\Rightarrow Y(s) = k \; \frac{U(s)}{(s+\lambda_1)} \frac{1}{(s+\lambda_2)} \dots \frac{1}{(s+\lambda_n)}$$

On pose :

$X_1(s) = \frac{U(s)}{(s+\lambda_1)}$, $X_2(s) = \frac{X_1(s)}{(s+\lambda_2)}, \dots, X_n(s) = \frac{X_{n-1}(s)}{(s+\lambda_n)}$, on a alors :

$$Y(s) = kX_n(s) \Rightarrow b \;\; y(t) = K\, x_n(t)$$
$$X_1(s) = \frac{U(s)}{(s+\lambda_1)} \Rightarrow \dot{x}_1(t) = u(t) - \lambda_1 x_1(t)$$
$$X_2(s) = \frac{X_1(s)}{(s+\lambda_2)} \Rightarrow \dot{x}_2(t) = x_1(t) - \lambda_2 x_2(t)$$
$$X_n(s) = \frac{X_{n-1}(s)}{(s+\lambda_n)} \Rightarrow \dot{x}_n(t) = x_{n-1}(t) - \lambda_n x_n(t)$$

Ceci conduit à la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.12)$$
$$y(t) = [0 \;\; 0 \dots 0 \;\; k] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Cette forme est une cascade de *n* blocs élémentaires.

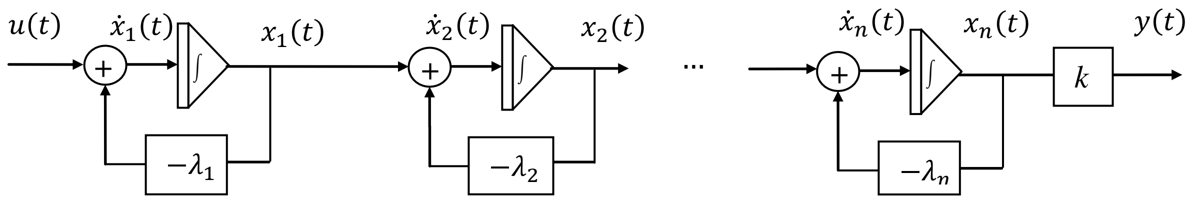


Fig.4.2 Forme série de la représentation d'état.

3. Cas des systèmes multivariables

3.1 Passage de la Représentation d'état vers la matrice de transfert

Soit la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux équations, il vient:

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + Bu(s)$$
$$Y(s) = CX(s)$$

Sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} SI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{T(s)} \begin{bmatrix} X(s) \\ -U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) \\ -Y(s) \end{bmatrix}$$

où :

$T(s)$: est appelée matrice polynomiale du système.

Dans le cas SISO, la fonction de transfert est : $F(s) = C(sI - A)^{-1}B$

Dans le cas MIMO, la matrice de transfert est :$M_{(pxm)}(s) = C(sI - A)^{-1}B$

On note $m_{ij}(s)$ l'élément qui relie la sortie i à l'entrée j de la matrice de transfert.

$$M(s) = \begin{bmatrix} m_{11}(s) & \dots & m_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ m_{p1}(s) & \dots & m_{pm}(s) \end{bmatrix}, B = [B_1 \quad \dots \quad B_m],\ C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

alors :

$$m_{ij}(s) = C_i(sI - A)^{-1}B_j$$

$$= \left(T_{1,2,\dots,n,n+j}^{1,2,\dots,n,n+i}\right)/det(sI - A)$$

représente le mineur formé par les éléments des lignes $1,2 \dots n, n+i$ et des colonnes$1,2 \dots n, n+j$ de la matrice $T(s)$.

Exemple 4.4 : Calculer la matrice de transfert du système défini par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & -1 \\ 1 & s+2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(S) = \begin{bmatrix} m_{11}(S) & m_{12}(S) \\ m_{21}(S) & m_{22}(S) \end{bmatrix}$$

$$m_{11}(s) = \frac{T_{1,2,3}^{1,2,3}}{det(sI-A)} = \frac{\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 1 & s+2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{s^2+2s+1} = \frac{1}{s+1}\ ,\ m_{12}(s) = \frac{T_{1,2,4}^{1,2,3}}{det(sI-A)} = \frac{\begin{vmatrix} s & -1 & -1 \\ 1 & s+2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{s^2+2s+1} = -\frac{1}{s+1}$$

$$m_{21}(s) = \frac{T_{1,2,3}^{1,2,4}}{det(sI-A)} = \frac{\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 1 & s+2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{s^2+2s+1} = \frac{s}{(s+1)^2}\ ,\ m_{22}(s) = \frac{T_{1,2,4}^{1,2,4}}{det(sI-A)} = \frac{\begin{vmatrix} s & -1 & -1 \\ 1 & s+2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s+1} \\ \frac{S}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

Remarque 4.4 : Il existe une deuxième méthode de passage (algorithme de Leverrier).

3.2 Passage de la matrice de transfert vers la représentation d'état

3.2.1 Réalisation minimale

3.2.1.1 Méthode de Gilbert

a) Cas des pôles simples : Dans le cas où tous les pôles de la matrice de transfert sont simples et réels, Gilbert a proposé une méthode permettant de trouver facilement une réalisation complètement commandable et observable (réalisation minimale). On note que cette réalisation est diagonale.

Etant donné la matrice rationnelle $M(S)$ dont les éléments ont un nombre fini de pôles simples.

$$\lambda_i \text{ où } i = 1 \dots n$$

On décompose $M(S)$ en éléments simples :

$$M(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{s - \lambda_i}; \quad M_i = \lim_{S \to \lambda_i} (s_i - \lambda_i) M(s)$$

Si le rang n_i du pôle λ_i est défini comme étant le rang de M_i, c-à-d $n_i = rang\ (M_i)$, donc il faut choisir n_i lignes linéairement indépendants factorisant M_i alors $M(s)$ admet une représentation minimale d'ordre n.

$$n = \sum n_i \text{ tel que : } A = bloc\ diag\big(\lambda_i\ I_{n_i}\big),\ M_i = C_i B_i$$

Exemple 4.5

$$M(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s^2+6 & s^2+s+4 \\ 2s^2-7s-2 & s^2-5s-2 \end{bmatrix}$$

Déterminer la forme d'état de cette matrice.

$$M(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{s - \lambda_i}; \quad M_i = \lim_{s \to \lambda_i} (s_i - \lambda_i) M(s)$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$

$M_1 = \lim\limits_{s \to 1} (s-1) M(s) = \begin{bmatrix} 7/6 & 1 \\ -7/6 & -1 \end{bmatrix}$

$M_2 = \lim\limits_{s \to -1} (s+1) M(s) = \begin{bmatrix} -7/2 & -2 \\ -7/2 & -2 \end{bmatrix}$

$M_3 = \lim\limits_{s \to -2} (s+2) M(s) = \begin{bmatrix} 10/3 & 6/3 \\ 20/2 & 12/3 \end{bmatrix}$

$n_1 = rang\ (M_1) = 1$, on peut choisir une seule ligne factorisant M_1:

$$M_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{C_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 7/6 & 1 \end{bmatrix}}_{B_1}$$

$n_2 = rang\ (M_2) = 1$, on peut choisir une seule ligne factorisant M_2 :

$$M_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{C_2} \underbrace{\begin{bmatrix} -7/2 & -2 \end{bmatrix}}_{B_2}$$

$n_3 = rang\ (M_3) = 1$, on peut choisir une seule ligne factorisant M_3 :

$$M_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{C_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 10/3 & 6/3 \end{bmatrix}}_{B_3}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/6 & 1 \\ -7/2 & -2 \\ 10/3 & 6/3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b) Cas des pôles multiples

Lorsque $M(S)$ possède des pôles multiples $D(s) = \prod_{i=1}^{r}(s-\lambda_i)^{n_i}$, dans ce cas :

$$M(s) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{M_i}{(s-\lambda_i)^{n_i-j}}$$

La méthode précédente s'applique, mais conduit en général à une réalisation non minimale.

3.2.2 Réalisation sous forme canonique de commandabilité

Etape 1 : Déterminer le dénominateur commun de chaque colonne $D_1(s), D_2(s), \dots, D_m(s)$ et écrire $M(s)$ sous la forme :

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{N_{11}(s)}{D_1(s)} & \cdots & \frac{N_{1m}(s)}{D_m(s)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N_{p1}(s)}{D_1(s)} & \cdots & \frac{N_{pm}(s)}{D_m(s)} \end{bmatrix} = N(s)D^{-1}(s)$$

où

$\begin{bmatrix} N_{11}(s) & \dots & N_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{p1}(s) & \dots & N_{pm}(s) \end{bmatrix}$ et $D(s) = diag[D_1(s) \quad \dots \quad D_m(s)]$

Etape 2 :$D_i(s) = s^{n_i} + a_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + \cdots + a_1^i s + a_0^i \qquad i = 1 \dots . m$

n_i est l'indice de commandabilité de u_i

$$D_i(S) = s^{n_i} + \left[a_0^i a_1^i \dots \ a_{n_i-1}^i\right] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{n_i-1} \end{bmatrix}}_{S_i}$$

Etape 3 :

$$N(s) = C\ s \text{ où } s = \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_m \end{bmatrix}$$

Etape 4 :

$$A = diag[A_1(s) \quad \dots \quad A_m(s)] \text{ avec } A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & 1 \\ -a_0^i & -a_1^i & & \dots & -a_{n_i-1}^i \end{bmatrix}$$

$$B = diag[b_1 \quad \dots \quad b_m] \text{ avec } b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 4.6: Soit la matrice de transfert :

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Trouver une réalisation sous forme canonique de commandabilité.

Etape 1 :

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s+2)}{s(s+2)} & \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s}{s(s+2)} & \frac{(s+1)}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$M(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} (s+2) & 2(s+2) \\ S & (s+1) \end{bmatrix}}_{N(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}}_{D^{-1}(s)}$$

$m = 2, p = 2.$

Etape 2 :

$$D_1(s) = s(s+2) = s^2 + 2s = s^2 + [\underbrace{0 \quad 2}_{a_0^1 \ a_1^1}] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}}_{S_1} \Rightarrow \ n_1 = 2$$

$$D_2(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2 = s^2 + [\underbrace{2 \quad 3}_{a_0^2 \ a_1^2}] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}}_{S_2} \Rightarrow n_2 = 2$$

Etape 3 :

$$N(s) = C\,s = C\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}_{s}$$

Etape 4:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.3 Réalisation sous forme canonique d'observabilité

***Etape 1* :** Déterminer le dénominateur commun de chaque ligne $D_1(s), D_2(s), \dots, D_m(s)$ et écrire $M(s)$ sous la forme :

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{N_{11}(s)}{D_1(s)} & \dots & \frac{N_{1m}(s)}{D_1(s)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N_{p1}(s)}{D_m(s)} & \dots & \frac{N_{pm}(s)}{D_p(s)} \end{bmatrix} = D^{-1}(s)N(s)$$

où

$$\begin{bmatrix} N_{11}(s) & \dots & N_{1m}(s) \\ & \ddots & \vdots \\ N_{p1}(s) & \cdots & N_{pm}(s) \end{bmatrix} \text{ et } D(s) = diag[D_1(s) \quad \dots \quad D_p(s)]$$

Etape 2 : $D_i(s) = s^{\tau_i} + a^i_{\tau_i - 1}s^{\tau_i - 1} + \cdots + a^i_1 s + a^i_0 \qquad i = 1 \dots . p$

τ_i est l'indice d'observabilité de y_i

$$D_i(s) = s^{\tau_i} + \left[a^i_0 a^i_1 \dots \; a^i_{\tau_i - 1}\right]\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{\tau_i - 1} \end{bmatrix}}_{s_i}$$

Etape 3 :

$$N(s) = sB$$

$$s = diag\left[s_1^T \quad \dots \quad s_p^T\right] = \begin{bmatrix} s_1^T & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_p^T \end{bmatrix}$$

Etape 4 :

$$A = diag[A_1(s) \quad \dots \quad A_m(s)] \text{ avec } A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a^i_0 \\ 1 & 0 & 0 & & -a^i_1 \\ 0 & 1 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & -a^i_{\tau_i - 1} \end{bmatrix}$$

$$C = diag[c_1 \quad \cdots \quad c_p] \text{ avec } c_i = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

Exemple 4.7 Soit la matrice de transfert :

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Trouver une réalisation sous forme canonique d'observabilité.

Etape 1 :

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s+1)}{s(s+1)} & \frac{2\,s}{s\,(s+2)} \\ \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$M(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix}}_{D^{-1}(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} s+1 & 2\,s \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{N(s)}$$

Etape 2 :

$$D_1(s) = s(s+1) = s^2 + s = s^2 + [\underbrace{0}_{a_0^1} \quad \underbrace{1}_{a_1^1}] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}}_{S_1} \Rightarrow \tau_1 = 2$$

$$D_2(s) = s + 2 = s + \underbrace{[2]}_{a_0^2} \underbrace{[1]}_{S_2} \Rightarrow \tau_2 = 1$$

Etape 3 :

$$N(s) = s\,B = C \begin{bmatrix} s_1^T & 0 \\ 0 & s_2^T \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{B}$$

Etape 4:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Exercices

Exercice 01

Calculer la fonction de transfert des trois systèmes monovariables définis par :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0]x$$
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Exercice 02

Trouver une représentation d'état pour chacun des trois systèmes monovariables définis :

$$H_1(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{(s+3)(s+4)(s+5)},\ H_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^3},\ H_3(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Exercice 03

Calculer la matrice de transfert du système multivariable défini par :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Exercice 04

Déterminer la forme d'état de cette matrice de transfert :

$$M(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s^2 + 6 & s^2 + s + 4 \\ 2s^2 - 7s - 2 & s^2 - 5s - 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 05

Soit un système multivariable défini par la matrice de transfert suivante:

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

1- Déterminer la réalisation sous forme canonique de commandabilité.
2- Déterminer la réalisation sous forme canonique d'observabilite.

Chapitre 5
Commande par retour d'état des systèmes multivariables

1. Introduction

Le placement de pôles est la méthode générale utilisée pour la correction des systèmes linéaires. Son principe consiste à déterminer une loi de commande (un régulateur) par retour d'état de façon à ce que le système en boucle fermée ait des pôles spécifiés par l'opérateur, cette approche assure la stabilité du système bouclé d'une manière naturelle et permet également d'obtenir le comportement dynamique désiré par un choix approprié des modes (pôles) du système en boucle fermée.

2. Cas particulier : Systèmes monovariables

Etant donné un système en boucle ouverte défini par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Le système est supposé commandable.

Le principe de la méthode consiste à utiliser une loi de commande par retour d'état de la forme :

$$u(t) = g\, y_c(t) - K\, x(t) \tag{5.2}$$

$y_c(t)$: est la consigne (sortie desirée).
g : est un scalire de préreglage.
$K = [k_0\ k_1 \cdots k_{n-1}]$ est un vecteur ligne de *n* composantes appelé vecteur des gains du retour d'état
$x \in R^n$ vecteur d'état (vecteur colonne).

La fonction de transfert en boucle ouverte du système est :

$$G_{BO}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B \tag{5.3}$$

L'équation caractéristique du système en boucle ouverte est :

$$det(sI - A) \quad = s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{5.4}$$

Les pôles en boucle ouverte sont les valeurs propres de A obtenues à partir de l'équation (5.4).

En remplaçant la loi de commande dans l'équation d'état (5.1), on obtient la représentation d'état en boucle ouverte :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(g\, y_c - K\, x(t)) \\ \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + Bg\, y_c \end{aligned} \tag{5.5}$$

La fonction de transfert en boucle fermée du système est :

$$\begin{aligned} G_{BF}(s) &= \frac{Y(s)}{Y_c(s)} \\ &= C(sI - (A - BK))^{-1}Bg \end{aligned} \tag{5.6}$$

L'équation caractéristique du système en boucle fermée est :

$$det(sI-(A+BK)) \quad = s^n+\beta_{n-1}(K)\, s^{n-1}+\cdots+\ \beta_1(K)s+\beta_0(K)=0 \qquad (5.7)$$

Les pôles en boucle fermée sont les valeurs propres de $(A-BK)$ obtenues à partir de l'équation (5.7).

Remarque 5.1

Les coefficients de l'équation caractéristique du système en BF sont fonction de K, d'où un choix approprié du vecteur K permet d'imposer les pôles du système en BF, donc il nous permet d'améliorer la stabilité et les performances dynamiques (rapidité et amortissement) du système. Le but est donc de réaliser un asservissement modifiant convenablement la matrice d'état du système.

$$Dynamique\ en\ BO : A \xrightarrow{application\ de\ la\ commande\ par\ retour\ d'etat} Dynamique\ en\ BF\!: (A-BK)$$

Alors, le problème de la commande par retour d'état consiste à trouver K qui stabilise le système en BF.

2.1 Calcul de la commande

Le système (5.1) étant commandable à partir de la seule entrée, donc, qu'il existe M tel que : $x=M\tilde{x}$ (M inversible) qui permet de mettre le système sous forme canonique compagne de commandabilité.

$$\dot{\tilde{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}=M^{-1}A\,M}\tilde{x}+\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}=M^{-1}B}\ u(t)$$

Le polynôme caractéristique du système en boucle ouverte :

$$D_{BO}(s)=s^n+a_{n-1}\, s^{n-1}+\cdots+\ a_1s+a_0$$

En appliquant la commande par retour d'état :

$$u(t)=g\, y_c(t)-K\, x(t) \qquad (5.8)$$

avec : $K=[k_0\ k_1\cdots k_{n-1}]$.

Dans la base canonique compagne de commandabilité, la commande devient :

$$x=M\tilde{x}\Rightarrow u(t)=g\, y_c(t)-\underbrace{K\, M}_{\tilde{K}}\,\tilde{x}(t)$$

$$u(t)=g\, y_c(t)-\tilde{K}\,\tilde{x}(t) \qquad (5.9)$$

avec $\tilde{K}=K\, M=[\tilde{k}_0\ \tilde{k}_1\cdots\tilde{k}_{n-1}]$

Considérons le système dans la base canonique compagne de commandabilité :

$$\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

En remplaçant la commande obtenue dans la base canonique compagne de commandabilité, on obtient la représentation d'état en boucle fermée (pour la clarté des expressions, on omet la variable *t*):

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (g\, y_c - \tilde{K}\, \tilde{x})$$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_0 + \tilde{k}_0) & -(a_1 + \tilde{k}_1) & -(a_2 + \tilde{k}_2) & \dots & -(a_{n-1} + \tilde{k}_{n-1}) \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g\, y_c \qquad (5.10)$$

Le système en boucle fermée est sous forme compagne de comandabilité, donc, le polynôme caractéristique en boucle fermée est :

$$D_{BF}(s) = s^n + (a_{n-1} + \tilde{k}_{n-1})\, s^{n-1} + \dots + (a_1 + \tilde{k}_1)s + (a_0 + \tilde{k}_0) \qquad (5.11)$$

En imposant « *n* » pôles en boucle fermée : $p_1 \cdots p_n$.

Le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée s'écrit :

$$D_{BF}^d(s) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)$$
$$D_{BF}^d(s) = s^n + \alpha_{n-1}\, s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 \qquad (5.12)$$

En identifiant (5.11) et (5.12) terme à terme, il vient :

$$\begin{cases} \alpha_0 = a_0 + \tilde{k}_0 \\ \alpha_1 = a_1 + \tilde{k}_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} = a_{n-1} + \tilde{k}_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{k}_0 = \alpha_0 - a_0 \\ \tilde{k}_1 = \alpha_1 - a_1 \\ \vdots \\ \tilde{k}_{n-1} = \alpha_{n-1} - a_{n-1} \end{cases}$$

D'une manière générale : $\tilde{k}_i = \alpha_i - a_i$ avec: $i = 0 \dots n - 1$

où :

a_i sont les coefficients du polynôme caractéristique en boucle ouverte.
α_i sont les coefficients du polynôme caractéristique désirée en boucle fermée.

Finalement, on revient à la base initiale : $K = \tilde{K} M^{-1}$

2.1.1 Résume : Algorithme de placement de pôles –retour d'état

Soit un système à commander :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

L'on dispose d'un spectre désiré (n pôles désirés en BF)

La commande par retour d'état à appliquer au système est : $u(t) = g\, y_c(t) - K\, x(t)$

Etape 1 *: Vérification de la commandabilité du système : calcul du* $det(Q_c)$

Etape 2 *: Mettre le système sous forme compagne commandable :* $x = M\tilde{x}$ *(calcul de* M *et* M^{-1}*)*

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

Avec : $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$

Etape 3 *: Détermination du polynôme caractéristique en BO :*

$$D_{BO}(s) = s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Etape 4 *: Détermination du polynôme caractéristique désiré en BF :*

$$D_{BF}^{d}(s) = s^n + \alpha_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Etape 5 *: Calcul du retour d'état* $\tilde{K} = [\tilde{k}_0\ \tilde{k}_1 \cdots \tilde{k}_{n-1}]$ *dans la base canonique de commandabilité.*

$$\tilde{k}_i = \alpha_i - a_i \quad \text{avec:}\, i = 0 \dots n-1$$

Etape 6 *: Calcul de retour d'état* $K = [k_0\ k_1 \cdots k_{n-1}]$ *dans la base initiale :*

$$K = \tilde{K}M^{-1}$$

Exemple 5.1 Soit un système donné :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -4\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y(t) = [1 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Concevoir un retour d'état de sorte que le système corrigé (c à d en boucle fermée) ait le pôle double -1.

Etape 1 *:* $Q_c = \begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $det(Q_c) = -1$

Etape 2 *: :* $Q_c^{-1} = \begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $M^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\tilde{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, $\tilde{B} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$, $\tilde{C} = [1 \quad 0]$

Etape 3 *:* $D_{BO}(s) = s^2 - 3\,s - 2$

Etape 4 *:* $D_{BF}^{d}(s) = s^2 + 2\,s + 1$

Etape 5 *:* $\widetilde{K} = [\tilde{k}_0\ \tilde{k}_1] = [3\ \ 5]$

Etape 6 *:* $K = [k_0\ k_1] = \widetilde{K}M^{-1} = [3\ \ 8]$.

2.1 Performances statique et retour d'état- le préréglage

Dans le cas où le système ne subit aucune perturbation extérieure, l'objectif de la commande est d'amener le système (et notamment sa sortie) à un nouveau point d'équilibre. Le placement de pôles permet de satisfaire les contraintes dynamiques imposées au système (rapidité et stabilité). Les contraintes statiques (erreur statique) doivent être traitées séparément. L'on se contente ici de déterminer une loi de commande telle que le gain statique du modèle en boucle fermée est unitaire (sortie=consigne, donc erreur statique nulle). Pour obtenir ce gain statique, l'on utilise le dernier degré de liberté disponible, à savoir le scalaire de préréglage g.

La fonction de transfert d'un système bouclé par retour d'état est : (voir équation 6)

$$G_{BF}(s) = \frac{Y(s)}{Y_c(s)} = C(sI - (A - BK))^{-1}B\ \ g$$

Ainsi le gain statique d'une telle fonction de transfert est :

$$G_{BF}(0) = \frac{Y(0)}{Y_c(0)} = -C(A - BK)^{-1}B\ g$$

Ce qui signifie que si l'on souhaite obtenir$G_{BF}(0) = 1$, il suffit de calculer g ainsi :

$$-C(A - BK)^{-1}B\ g \ \ = 1$$

Pour avoir une erreur statique (de position) nulle, il faut choisir g tel que :

$$g\ =\ \ [-C(A - BK)^{-1}B]^{\,-1}$$

2.2 Rejet de perturbations et retour d'état (adjonction d'intégrateurs)

Indépendamment du gain statique, il peut être souhaitable de réduire l'effet d'une perturbation exogène agissant, en tant qu'entrée non contrôlée, sur le système. Il est parfois très difficile de réduire l'effet de la perturbation et les quelques techniques existantes nécessitent souvent la connaissance d'un modèle de la perturbation. L'on peut noter que toute perturbation de type impulsion de Dirac est rejetée *en régime permanent* dès lors que le système est asymptotiquement stable.

Si la perturbation est plus franche, il faut envisager de sophistiquer la loi de commande et ceci peut s'avérer délicat. Toutefois, lorsque cette perturbation peut être assimilée à un *échelon*, alors, il est possible d'ajouter un intégrateur dans la chaîne directe. Il est bien connu qu'un système de classe 1 (c'est-à-dire comportant un intégrateur dans la chaîne directe) est précis en position c'est-à-dire que l'erreur de position de ce système, une fois bouclé, est nulle quand on lui applique un échelon en consigne. Enfin, en présence d'une perturbation elle aussi en échelon, cet intégrateur n'a l'effet escompté que s'il est placé en amont du point d'entrée de la perturbation dans la chaîne directe. Sur la base de ces constatations, l'on peut choisir d'ajouter un intégrateur à l'entrée d'un système avant de réaliser un retour d'état.

Cependant, dès lors qu'un intégrateur est ajouté, le modèle en boucle ouverte change. Il devient d'ordre $n + 1$, c'est-à-dire que le vecteur d'état X de dimension n est augmenté d'une $(n + 1)^{\text{ème}}$ composante.

La FTBO du nouveau système devient :

$\overline{H}(s) = \frac{1}{s} H(s)$, où $H(s)$ est la FTBO du système initial.

Il convient donc, de calculer une loi de commande de type retour d'état utilisant les $n + 1$ composantes de nouveau vecteur d'état. L'entrée du système devient $\overline{U}(s)$ telle que :$U(s) = \frac{1}{s} \overline{U}(s)$

Remarque 5.2: Ce problème ne sera pas abordé en détails dans ce cours.

3. Cas général : Systèmes multivariables

Soit le système multivariable de dimension n :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

avec : $A(n\text{x}n), B(n\text{x}m),\ C(p\text{x}n)$

La loi de commande par retour d'état est :

$$u = g\, y_c - K\, x \tag{5.13}$$

y_c : Vecteur regroupant les consignes (sorties desirées) de dimension (px1)
g : est un matrice de préreglage de dimension (mxp).
Kest une matrice de dimension (mxn) appelé matrice des gains du retour d'état.

3.1 Système complètement commandable par r (r<m) entrées

On décompose le système en r sous-systèmes commandables chacun par une seule entrée, alors, on pose $x = M\tilde{x}$, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned} \tag{5.14}$$

où $\tilde{A} = M^{-1}A\, M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$, $u = g\, y_c - \widetilde{K}\tilde{x}$ avec : $\widetilde{K} = KM$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix}0&1&\dots 0&0\\0&0&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\\-a_0^1&-a_1^1&\dots&-a_{n_1-1}^1\end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{11}} & \begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\ \vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\\ *&\cdots&\cdots&*\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\ \vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\\ *&\cdots&\cdots&*\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\ \vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\\0&\cdots&\cdots&0\end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix}0&1&\dots 0&0\\0&0&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\\-a_0^2&-a_1^2&\dots&-a_{n_2-1}^2\end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{22}} & \cdots & \begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\ \vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\\ *&\cdots&\cdots&*\end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\ \vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\\0&\cdots&\cdots&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\ \vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\\0&\cdots&\cdots&0\end{bmatrix} & \cdots & \underbrace{\begin{bmatrix}0&1&\dots 0&0\\0&0&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\\-a_0^r&-a_1^r&\dots&-a_{n_r-1}^r\end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{rr}} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad r \quad & m\text{-}r \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 0&0&0& \\ \vdots&\vdots&\vdots&B_1^*\\ 1&*&*& \\ 0&0&0& \\ \vdots&\vdots&&B_2^*\\ 0&1&*& \\ \vdots&\vdots&\vdots& \\ 0&0&0&B_r^*\\ \vdots&\vdots&\vdots& \\ 0&0&1& \end{array}\right] & \begin{array}{c} n_1 \\ \\ \\ n_2 \\ \\ \\ \\ n_r \\ \\ \end{array} \end{array}$$

L’equation caracteristique du système global en boucle ouverte s’ecrit comme :

$$D_{BO}(s)=\left|sI-\tilde{A}\right|=\prod_{i=1}^{r}\left|sI-\tilde{A}_{ii}\right|=\prod_{i=1}^{r}\left(s^{n_i}+a_{n_{i-1}}^{i}s^{n_i-1}+\cdots+a_0^i\right)$$

On désigne par n_i l’indice de commandabilité de u_i qui est la dimension du sous-système i, donc chaque entrée u_i commande un sous-système monovariable composé de n_i états.

$$u=g\,y_c-\tilde{K}\tilde{x} \tag{5.15}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\ \vdots\\u_r\\ \vdots\\u_m\end{bmatrix}}_{u}=-\begin{array}{c} r \\ \\ m\text{-}r \end{array}\underbrace{\left[\begin{array}{ccccccccccc} \tilde{k}_0^1&\tilde{k}_1^1\ \dots\ \tilde{k}_{n_1-1}^1&&0&\dots&0&\dots&0&\dots&0\\ 0&\dots&0&\tilde{k}_0^2&\tilde{k}_1^2\ \dots\ \tilde{k}_{n_2-1}^2&&\dots&&\vdots&\\ &\vdots&&&\vdots&&\ddots&0&\dots&0\\ 0&\dots&0&0&\dots&0&&\tilde{k}_0^r&\tilde{k}_1^r\ \dots\ \tilde{k}_{n_r-1}^r&\\ \hdashline 0&\dots&0&0&\dots&0&\dots&0&\dots&0\\ &\vdots&&&\vdots&&\vdots&&\vdots&\\ 0&\dots&0&0&\dots&0&\dots&0&\dots&0 \end{array}\right]}_{\tilde{K}}\underbrace{\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \vdots\\ \tilde{x}_{n_1}\\ \tilde{x}_{n_1+1}\\ \vdots\\ \tilde{x}_{n_1+n_2}\\ \vdots\\ \tilde{x}_{n_1+n_2+1}\\ \vdots\\ \tilde{x}_{n_1+n_2+\cdots n_r}\end{bmatrix}}_{\tilde{x}}+gy_c$$

En remplaçant la loi de commande (5.15) dans (5.14), il vient :

$$\dot{\tilde{x}} = \underbrace{\left(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}\right)}_{\tilde{A}_{BF}} \tilde{x} + g y_c \qquad \text{où} \quad \tilde{A}_{BF} = \left(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}\right)$$

$$\tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ \tilde{k}_0^1 & \tilde{k}_1^1 \; \dots & \tilde{k}_{n_1-1}^1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ & \ddots & \\ \begin{matrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} & \vdots & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ \tilde{k}_0^r & \tilde{k}_1^r \; \dots & \tilde{k}_{n_r-1}^r \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{BF} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & & 1 \\ -(a_0^1 + \tilde{k}_0^1) & -(a_1^1 + \tilde{k}_1^1) & \dots & -(a_{n_1-1}^1 + \tilde{k}_{n_1-1}^1) \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -(a_0^r + \tilde{k}_0^r) & -(a_1^r + \tilde{k}_1^r) & \dots & -(a_{n_r-1}^r + \tilde{k}_{n_r-1}^r) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique du système global en boucle fermée est :

$$\left|sI - \tilde{A}_{BF}\right| = \prod_{i=1}^{r} \left|sI - \tilde{A}_{ii_{BF}}\right|$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \left(s^{n_i} + (a_{n_i-1}^i + \tilde{k}_{n_i-1}^i) s^{n_i-1} + \dots + (a_1^i + \tilde{k}_1^i) s + (a_0^i + \tilde{k}_0^i)\right) \tag{5.16}$$

Le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée est :

$$\left|sI - \tilde{A}_{BF}^d\right| = \prod_{i=1}^{r} \left|sI - \tilde{A}_{ii_{BF}}^{\ d}\right| = \prod_{i=1}^{r} \left(s^{n_i} + \alpha_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + \dots + \alpha_1^i \, s + \alpha_0^i\right) \tag{5.17}$$

Par identification de (5.16) et (5.17), il vient (pour $i = 1 \dots r$) :

$$\begin{matrix} \alpha_0^i = a_0^i + \tilde{k}_0^i \\ \alpha_1^i = a_1^i + \tilde{k}_1^i \\ \vdots \\ \alpha_{n_i-1}^i = a_{n_i-1}^i + \tilde{k}_{n_i-1}^i \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \tilde{k}_0^i = \alpha_0^i - a_0^i \\ \tilde{k}_1^i = \alpha_1^i - a_1^i \\ \\ \tilde{k}_{n_i-1}^i = \alpha_{n_i-1}^i - a_{n_i-1}^i \end{matrix}$$

où

a_j^i sont les coefficients de l'équation caractéristique en boucle ouverte du sous-système *i*.

α_j^i sont les coefficients de l'équation caractéristique désirée en boucle fermée du sous-système *i*.

Finalement : $K = \tilde{K} M^{-1}$

3.1.1 Résumé : Algorithme de placement de pôles – décomposition en r (r<m) sous-systèmes commandables

Soit un système à commander :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

L'on dispose d'un spectre désiré (n pôles désirés en boucle fermée)
La commande par retour d'état à appliquer au système est : $u(t) = g\, y_c(t) - K\, x(t)$

Etape 1 *: Décomposer le système en r (r<m) s. s. commandables :* $x = M\tilde{x}$ *(calcul de* M *et* M^{-1}*)*

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u \qquad \text{Avec : } \tilde{A} = M^{-1}A\,M\,, \tilde{B} = M^{-1}B\,, \tilde{C} = CM$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

Etape 2 *: Détermination du polynôme caractéristique du système global en BO :*

$$D_{BO}(s) = \left|sI - \tilde{A}\right| = \prod_{i=1}^{r}\left|sI - \tilde{A}_{ii}\right| = \prod_{i=1}^{r}\left(s^{n_i} + a_{n_{i-1}}^{i}s^{n_i-1} + \cdots + a_0^i\right)$$

Etape 3 *: Détermination du polynôme caractéristique désiré en BF :*

$$D_{BF}^{d}(s) = \left|sI - \tilde{A}_{BF}^{d}\right| = \prod_{i=1}^{r}\left|sI - \tilde{A}_{ii}{}_{BF}^{d}\right| = \prod_{i=1}^{r}\left(s^{n_i} + \alpha_{n_i-1}^{i}s^{n_i-1} + \cdots + \alpha_1^i\, s + \alpha_0^i\right)$$

Etape 4 *: Calcul du retour d'état* $\tilde{K}$ *dans la base canonique compagne de commandabilité pour* $i = 1 \dots r$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix}
\tilde{k}_0^1 & \tilde{k}_1^1 & \dots & \tilde{k}_{n_1-1}^1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \tilde{k}_0^2 & \tilde{k}_1^2 & \dots & \tilde{k}_{n_2-1}^2 & \dots & & \vdots & \\
 & \vdots & & & \vdots & & & \ddots & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & \tilde{k}_0^r & \tilde{k}_1^r & \dots & \tilde{k}_{n_r-1}^r \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_j^i = \alpha_j^i - a_j^i \quad avec\colon j = 0 \dots n_i - 1$$

Etape 5 *: Calcul de la matrice des gains K du retour d'état dans la base initiale :* $K = \tilde{K}M^{-1}$

Exemple 5.2 Soit le système :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} u,\; y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

Calculer le retour d'état K permettant d'avoir en boucle fermée les pôles : $p_1 = -1, p_2 = -2,\; p_3 = -3,\; p_4 = -4.$

Etape 1 *:* Décomposer le système en r (r<m=3) sous-systèmes commandables.

1-

$$Q_c = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & A^2b_1 & A^3b_1 & b_2 & Ab_2 & A^2b_1 & \dots \\ -1 & 0 & -2 & -2 & -1 & . & . & \dots \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & . & . & \dots \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & . & . & \dots \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & . & . & \dots \end{bmatrix}$$

$\det[b_1 \quad Ab_1 \quad A^2b_1 \quad A^3b_1] = 0$ rejeté.
$\det[b_1 \quad Ab_1 \quad A^2b_1 \quad b_2] \neq 0 \Rightarrow Q_c = [b_1 \quad Ab_1 \quad A^2b_1 \quad b_2]$

b_1	b_2	b_3	
X	X		A^0
X			A^1
X			A^2
0			A^3

$n_1 = 3,\ n_2 = 1,\ n_3 = 0 \Rightarrow r = 2$

2-

$$Q_c = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & A^2b_1 & b_2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

3-

$$Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} -2/5 & -8/15 & 1/15 & 3/5 \\ 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ -1/5 & 1/15 & -2/15 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 & 1/5 & -1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

4-

$i = 1, \sigma_1 = n_1 = 3$
$i = 2, \sigma_2 = n_1 + n_2 = 4$

5- $$M^{-1} = \begin{bmatrix} q_{\sigma 1} \\ q_{\sigma 1}A \\ q_{\sigma 1}A^2 \\ q_{\sigma 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_3A \\ q_3A^2 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 1/15 & -2/15 & -1/5 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 1/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

6- $$M = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 20/15 \\ 0 & -1 & 0 & 5/3 \\ -3 & 1 & 0 & 20/15 \\ 0 & -2 & 1 & -5/3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2/15 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$a_2^1 = -1, a_1^1 = 1, a_0^1 = 0, a_0^2 = 0$

Etape 2 : Détermination du polynôme caractéristique du système global en BO.

$$\begin{aligned} D_{BO}(s) = \left|sI - \tilde{A}\right| &= \prod_{i=1}^{r=2}\left(s^{n_i} + a_{n_{i-1}}^i s^{n_i-1} + \cdots + a_0^i\right) \\ &= (s^3 + a_2^1 s^2 + a_1^1 s + a_0^1)(s + a_0^2) \\ &= \quad (s^3 - s^2 + s + 0) \quad\quad (s + 0) \end{aligned}$$

Etape 3 : Détermination du polynôme caractéristique désiré en BF.

$$\begin{aligned} D_{BF}^d(s) = \left|sI - \tilde{A}_{BF}^d\right| &= \prod_{i=1}^{r=2}\left(s^{n_i} + \alpha_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + \cdots + \alpha_1^i\, s + \alpha_0^i\right) \\ &= (s+1)\,(s+2)(s+3)(s+4) \\ &= (s^3 + 6s^2 + 11s + 6)(s + 4) \\ &= (s^3 + \alpha_2^1 s^2 + \alpha_1^1 s + \alpha_0^1)(s + \alpha_0^2) \end{aligned}$$

$\alpha_2^1 = 6, \alpha_1^1 = 11, \alpha_0^1 = 6, \alpha_0^2 = 4$

Etape 4 : Calcul du retour d'état $\widetilde{\mathrm{K}}$ dans la base canonique compagne de commandabilité.

$\tilde{k}_0^1 = \alpha_0^1 - a_0^1 = 6$, $\tilde{k}_1^1 = \alpha_1^1 - a_1^1 = 10$, $\tilde{k}_2^1 = \alpha_2^1 - a_2^1 = 7$, $\tilde{k}_0^2 = \alpha_0^2 - a_0^2 = 4$

$$\widetilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_0^1 & \tilde{k}_1^1 & \tilde{k}_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{k}_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Etape 5 : Calcul de la matrice des gains K du retour d'état dans la base initiale.

$$K = \widetilde{K}M^{-1} = \begin{bmatrix} -11.53 & -2.93 & 9.53 & -4.53 \\ -0.80 & 1.60 & 0.80 & -0.80 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3.2 Système complètement commandable par « m » entrées

On décompose le système en $m = rang(B)$ sous systèmes commandables.

On pose $x = M\tilde{x}$, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned} \qquad (5.18)$$

où :

$\tilde{A} = M^{-1}A\,M$,$\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$, $u = g\,y_c - \widetilde{K}\tilde{x}$ avec : $\widetilde{K} = KM$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^1 & -a_1^1 & \dots & -a_{n_1-1}^1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^2 & -a_1^2 & \dots & -a_{n_2-1}^2 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^m & -a_1^m & \dots & -a_{n_m-1}^m \end{bmatrix}
\end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & * & * & \cdots & * \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 1 & * & \dots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Cette fois-ci la matrice $\tilde{A}$ n'est pas triangulaire par blocs, ceci va compliquer le calcul de l'équation caractéristique en boucle ouverte. Cependant, on peut choisir une matrice des gains K de façon que la matrice $\tilde{A}_{BF}$ soit triangulaire.

Pour des raisons de simplicité et de lisibilité des expressions, on se limite au cas où le système est décomposé en deux sous systèmes (m=2).

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ [& & a_{11} & &] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ [& & a_{12} & &] \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ [& & a_{21} & &] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ [& & a_{22} & &] \end{bmatrix}
\end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & r_{12} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ,\tilde{K}=\begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & 0 \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} \end{bmatrix}_{mxn}$$

$$\tilde{A}_{BF} = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ [& & a_{11} - \tilde{k}_{11} - r_{12}\tilde{k}_{21} & &] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ [& & a_{12} - r_{12}\tilde{k}_{22} & &] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ [& & a_{21} - \tilde{k}_{21} & &] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ [& & a_{22} - \tilde{k}_{22} & &] \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{BF}^{d} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ [& & \alpha_{11} & &] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ [& & \alpha_{12} & &] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ [& & \alpha_{21} & &] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ [& & \alpha_{22} & &] \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Pour avoir une matrice $\tilde{A}_{BF}$ triangulaire, on prend $\alpha_{21} = [0 \quad \dots \quad 0]$.

Par identification de $\tilde{A}_{BF}$ et $\tilde{A}_{BF}^{d}$ terme à terme, il vient :

$$\begin{aligned} \alpha_{22} &= a_{22} - \tilde{k}_{22} \\ a_{21} - \tilde{k}_{21} &= 0 \\ \alpha_{11} &= a_{11} - \tilde{k}_{11} - r_{12}\tilde{k}_{21} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{k}_{22} &= a_{22} - \alpha_{22} \\ \tilde{k}_{21} &= a_{21} \\ \tilde{k}_{11} &= a_{11} - r_{12}\tilde{k}_{21} - \alpha_{11} \end{aligned}$$

Dans le cas général :

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{mm} &= a_{mm} - \alpha_{mm} \\ \tilde{k}_{ij} &= a_{ij} \quad i > j \\ \tilde{k}_{ii} &= a_{ii} - \alpha_{ii} - \sum_{j=i+1}^{m} r_{ij}\tilde{k}_{ji} \end{aligned}$$

Finalement : $K = \tilde{K}M^{-1}$

3.2.1 Résumé : Algorithme de placement de pôles – décomposition en m sous-systèmes commandables

Soit un système à commander :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

On dispose de n pôles désirés en BF

La commande par retour d'état à appliquer au système est : $u(t) = g\, y_c(t) - K\, x(t)$

Etape 1 *: Décomposer le système en « m » s. s. commandables :* $x = M\tilde{x}$ *(calcul de* M *et* M^{-1}*)*

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned} \qquad \text{Avec : } \tilde{A} = M^{-1}A\,M\,, \tilde{B} = M^{-1}B\,, \tilde{C} = CM$$

Etape 2 *: Détermination des vecteurs :* a_{ij}

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [\tilde{A}_{11}] & \cdots & [\tilde{A}_{1m}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\tilde{A}_{m1}] & \cdots & [\tilde{A}_{mm}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \underbrace{[-a_0^1 & -a_1^1 & \cdots & -a_{n_1-1}^1]}_{a_{11}} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots\ \vdots\ \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \underbrace{[* & \cdots & \cdots & *]}_{a_{1m}} \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots\ \vdots\ \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \underbrace{[* & \cdots & \cdots & *]}_{a_{m1}} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \underbrace{[-a_0^m & -a_1^m & \cdots & -a_{n_m-1}^m]}_{a_{mm}} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & r_{12} & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Etape 3 *: Détermination des vecteurs :* α_{ij} *, On veut une matrice* $\tilde{A}_{BF}^d$*triangulaire, donc*

$$D_{BF}^d(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - p_i) = \prod_{i=1}^{m}\left(s^{n_i} + \alpha_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + \cdots + \alpha_1^i\, s + \alpha_0^i\right)$$

$$= \underbrace{\left(s^{n_1} + \alpha_{n_1-1}^1 s^{n_1-1} + \cdots + \alpha_0^1\right)}_{\downarrow \atop \tilde{A}_{11}^d} \times \ldots \times \underbrace{\left(s^{n_m} + \alpha_{n_m-1}^m s^{n_m-1} + \cdots + \alpha_0^m\right)}_{\downarrow \atop \tilde{A}_{mm}^d}$$

$$\tilde{A}_{BF}^d = \begin{bmatrix} [\tilde{A}_{11}^d] & \cdots & [*] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & \cdots & [\tilde{A}_{mm}^d] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \underbrace{[-\alpha_0^1 & -\alpha_1^1 & \cdots & -\alpha_{n_1-1}^1]}_{\alpha_{11}} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \underbrace{[* & \cdots & \cdots & *]}_{\alpha_{1m}} \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \underbrace{[0 & \cdots & \cdots & 0]}_{\alpha_{m1}} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \underbrace{[-\alpha_0^m & -\alpha_1^m & \cdots & -\alpha_{n_m-1}^m]}_{\alpha_{mm}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Etape 4 *: Calcul du retour d'état* $\tilde{K}$*dans la base canonique compagne de commandabilité.*

$$\tilde{K}=\begin{bmatrix}\tilde{k}_{11} & 0 & \dots & 0\\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ \tilde{k}_{m1} & \tilde{k}_{m2} & \dots & \tilde{k}_{mm}\end{bmatrix}_{(m\times n)} \qquad avec: \quad \begin{array}{l}\tilde{k}_{mm}=a_{mm}-\alpha_{mm}\\ \tilde{k}_{ij}=a_{ij} \quad i>j\\ \tilde{k}_{ii}=a_{ii}-\alpha_{ii}-\sum_{j=i+1}^{m} r_{ij}\tilde{k}_{ji}\end{array}$$

***Etape 5** : Calcul de la matrice des gains K du retour d'état dans la base initiale :* $K=\tilde{K}M^{-1}$

Exemple 5.3 Soit le système :

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}u,\; y=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}x$$

Calculer le retour d'état K permettant d'avoir en boucle fermée les pôles : $p_1=-1, p_2=-2,\ p_3=-3,\ p_4=-4$.

***Etape 1** :* Décomposer le système en *m*=3 sous-systèmes commandables.

1-

$$Q_c=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3 & Ab_1 & Ab_2 & Ab_3 & A^2b_1 & \dots\\ -1 & -1 & 2 & 0 & . & . & . & \dots\\ 0 & 1 & 1 & -1 & . & . & . & \dots\\ 0 & 2 & 0 & 1 & . & . & . & \dots\\ 1 & 0 & -1 & -1 & . & . & . & \dots\end{bmatrix}$$

$\det[b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad Ab_1]=2 \Rightarrow Q_c=[b_1 \quad Ab_1 \quad b_2 \quad b_3]$

b_1	b_2	b_3	
X	X	X	A^0
X	0		A^1
0			A^2
			A^3

$n_1=2,\ n_2=1,\ n_3=1$

2-

$$Q_c=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

3-

$$Q_c^{-1}=\begin{bmatrix}5/2 & -3/2 & 2 & 7/2\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ -1/2 & 1/2 & 0 & -1/2\\ 3/2 & -1/2 & 1 & 3/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\end{bmatrix}$$

4- Pour $i = 1 \dots 3$

$$i = 1, \sigma_1 = n_1 = 2$$
$$i = 2, \sigma_2 = n_1 + n_2 = 3$$
$$i = 3, \sigma_3 = n_1 + n_2 + n_3 = 3$$

5- $M^{-1} = \begin{bmatrix} q_{\sigma 1} \\ q_{\sigma 1}A \\ q_{\sigma 2} \\ q_{\sigma 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_2 A \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$

6- $M = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -31 & -5 & -19 & 21 \\ 3/2 & 0 & 1 & -1 \\ -15/2 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Etape 2 : Détermination du polynôme caractéristique du système global en BO.

$a_{11} = [-31 \quad -5], a_{21} = [3/2 \quad 0], a_{31} = [-15/2 \quad 0], a_{22} = 1, a_{33} = 5, a_{32} = -5$

Etape 3 : Détermination du polynôme caractéristique désiré en BF.

$$D_{BF}^d(s) = \left|sI - \tilde{A}_{BF}^d\right| = \prod_{i=1}^{m=3}\left(s^{n_i} + \alpha_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + \dots + \alpha_1^i\, s + \alpha_0^i\right)$$
$$= (s+1)\,(s+2)(s+3)(s+4)$$
$$= (s^2 + 3s + 2)(s+3)(s+4)$$
$$= (s^2 + \alpha_1^1 s + \alpha_0^1)(s + \alpha_0^2)(s + \alpha_0^3)$$

$$\tilde{A}_{BF}^d = \begin{bmatrix} [\tilde{A}_{11}^d] & [*] & [*] \\ [0] & [\tilde{A}_{22}^d] & [*] \\ [0] & [0] & [\tilde{A}_{33}^d] \end{bmatrix}$$

$\tilde{A}_{11}^d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{22}^d = -3, \tilde{A}_{22}^d = -4$

$\alpha_{11} = [-2 \quad -3], \alpha_{22} = -3, \alpha_{33} = -4$

Etape 4 : Calcul du retour d'état $\tilde{K}$ dans la base canonique compagne de commandabilité.

$\tilde{k}_{33} = a_{33} - \alpha_{33} = 9, \tilde{k}_{21} = \alpha_{21} = [3/2 \quad 0], \tilde{k}_{31} = \alpha_{31} = [-15/2 \quad 0]$, $\tilde{k}_{32} = \alpha_{32} = -5$,
$\tilde{k}_{11} = a_{11} - \alpha_{11} - \sum_{j=2}^{3} r_{1j}\, a_{j1} = a_{11} - \alpha_{11} - r_{12}a_{21} - r_{13}a_{31} = [-25/2 \quad -2]$,
$\tilde{k}_{22} = a_{22} - \alpha_{22} = 4$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & 0 & 0 \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} & 0 \\ \tilde{k}_{31} & \tilde{k}_{32} & \tilde{k}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25/2 & -2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 4 & 0 \\ -15/2 & 0 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

Etape 5 : Calcul de la matrice des gains K du retour d'état dans la base initiale.

$$K = \widetilde{K}M^{-1} = \begin{bmatrix} -14.5 & 8.5 & 10.5 & -16.5 \\ -0.50 & 0.50 & 1.50 & -0.50 \\ 8.5 & 0.5 & 1.5 & 8.5 \end{bmatrix}$$

Chapitre 6
Observateur d'état et commande par retour de sortie des systèmes multivariables

1. Introduction

Dans le chapitre précédent, on a étudié le problème de la commande par retour d'état en supposant la disponibilité (à la mesure) de toutes les variables d'état. Mais, Souvent pour des raisons de l'indisponibilité technique du capteur, de son coût, etc…, le nombre de grandeurs d'état pouvant être mesurées par des capteurs est inférieur à celui du vecteur d'état (c.-à-d., qu'il y a des grandeurs d'état non mesurables). Dans ce cas la synthèse d'une loi de commande par retour d'état est alors compromise. On pose ainsi le problème de la synthèse d'un algorithme reconstituant le vecteur d'état, sur la base de la connaissance sur un intervalle de temps, d'une part de l'entrée du système et d'autre part de sa sortie (devant être mesurables); c'est le problème de *l'observation*. Cette reconstitution ou estimation de l'état courant devant faite en temps réel, l'observateur revêt usuellement la forme d'un système dynamique auxiliaire.

2. Définition et principe

On appelle observateur un système dynamique capable de reproduire (ou estimer) les états non mesurables d'un système à partir de la seule connaissance de l'entrée et la sortie du système et éventuellement les états mesurables.

2.1 Observateur en boucle ouverte

Soit le système d'ordre *n* défini par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{6.1}$$

L'observateur est défini par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned}$$

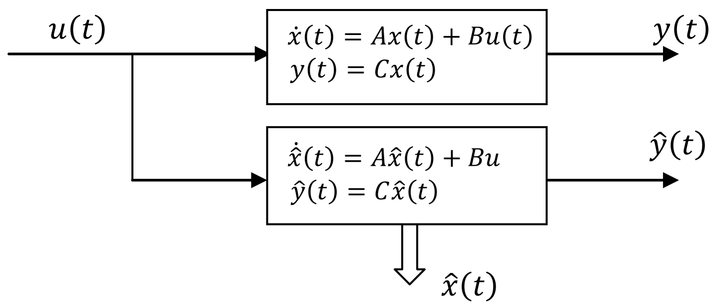


Fig.6.1 observateur d'état en boucle ouverte.

2.1.1 Erreur d'observation

L'erreur d'observation est :

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - \hat{x}\,(t) \\ \dot{e}\,(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}\,(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t)\\ &= A\big(x(t) - \hat{x}(t)\big) = A\,e(t)\\ \Rightarrow e(t) &= e(0)e^{A\,t}\end{aligned}$$

Si la partie réelle des valeurs propres de A est négative (système stable), alors, l'erreur d'observation converge vers zéro.

Remarque 6.1 : On remarque que l'observateur et le système ont la même dynamique (ont les mêmes pôles), alors que *la dynamique d'un observateur doit être plus rapide que celle du système* à observer afin de pouvoir l'insérer dans la boucle de commande.

2.2 Observateur en boucle fermée

Soit le système d'ordre *n* défini par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

L'observateur en boucle fermée est défini par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y}) \tag{6.2}$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \tag{6.3}$$

Où $L(y - \hat{y})$ est un terme de correction, L est un vecteur colonne de dimension *n*

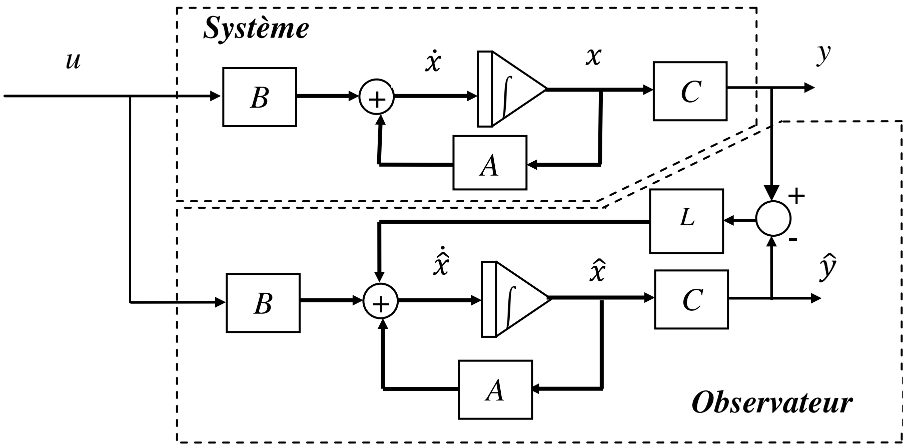


Fig.6.2 Observateur d'état en boucle fermée.

En remplaçant (6.3) dans (6.2) on obtient :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly$$

On remarque que la matrice d'état de l'observateur est $(A - LC)$, donc on peut influencer la dynamique (stabilité et rapidité) de l'observateur en agissant sur le vecteur L (désigné par l'opérateur).

2.2.1 Erreur d'observation

$$e(t) = x(t) - \hat{x}\,(t)$$

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$$
$$\dot{e}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - L(y - \hat{y})$$
$$\dot{e}(t) = A[x(t) - \hat{x}(t)] - LC(x - \hat{x})$$
$$\dot{e}(t) = \underbrace{(A - LC)}_{A_{ob}}(x - \hat{x}) = (A - LC)e(t)$$
$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

La dynamique de l'erreur d'observation est la sortie d'un système du premier ordre stable imposé par l'utilisateur (en utilisant L), donc l'erreur d'observation tend asymptotiquement vers zéro. $e(t) = e(0)e^{(A-LC)\,t}$, après un régime transitoire l'observateur suit correctement l'évolution du système à commander.

3. Commande par retour d'état avec observateur

3.1 Cas particulier : Systèmes monovariables

Le principe de la commande par retour d'état avec observateur consiste à utiliser l'état estimé par un observateur pour ensuite construire un retour d'état comme le montre sur la fig.6.4 :

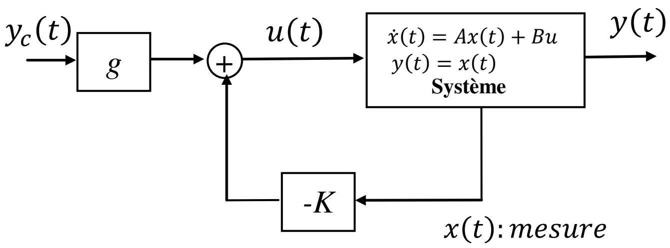


Fig.6.3. Schéma de principe de la commande par retour d'état.

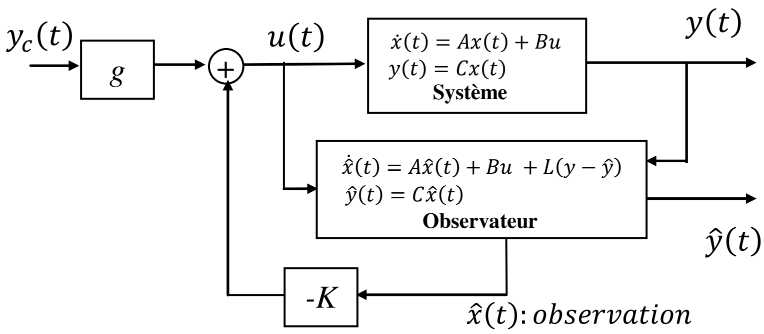


Fig.6.4. Schéma de principe de la commande par retour d'état avec d'observateur.

Soit le système monovariable d'ordre n :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{6.4}$$

avec l'observateur :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\big(y(t) - \hat{y}(t)\big) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{6.5}$$

Le retour d'état avec observateur est :

$$u(t) = g\, y_c(t) - K\, \hat{x}(t) \tag{6.6}$$

En remplçant (6.6) dans (6.4) et (6.5) : pour la clarté des expressions, on omet la variable *t*.

$$\dot{x} = Ax - B\, K\, \hat{x} + Bgy_c \tag{6.7}$$
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - B\, K\, \hat{x} + Bgy_c + LC(x - \hat{x}) \tag{6.8}$$

On met (6.7) et (6.8) sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -B\,K \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{A_G} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} gy_c \tag{6.9}$$

$A_G = \begin{bmatrix} A & -B\,K \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}$ est la matrice d'évolution globale (système+observateur)

1ière colonne= 1ière colonne +2ième colonne :

$$A_G = \begin{bmatrix} A - B\,K & -B\,K \\ A - BK & A - BK - LC \end{bmatrix}$$

2ième ligne= 2ième ligne - 1ière ligne :

$$A_G = \begin{bmatrix} A - B\,K & -B\,K \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}$$

L'équitation caractéristique du système global est :

$$det\big[\big(sI - (A - B\,K\,)\big) \times \big(sI - (A - LC)\big)\big] = 0$$

$$|sI - (A - B\,K)| \times |sI - (\,A - LC)| = 0 \tag{6.10}$$

$$\begin{cases} |sI - (A - B\,K)| = 0 \\ |sI - (\,A - LC)| = 0 \end{cases}$$

$(A - B\,K)$: matrice dynamique du système bouclé.
$(\,A - LC)$: matrice dynamique de l'observateur.

3.1.1 Théorème de séparation

La dynamique du système global est constituée par la dynamique due au retour d'état plus celle due à l'observateur. Donc, le vecteur K (gain de commande) et le vecteur L (gain d'observateur) se calculent indépendamment (séparément).

Calcul de K (déjà fait au chapitre précèdent)
Calcul de L :
Dans la base initiale, on a

$$\text{Système : } \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$\text{Observateur : } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu + L\big(y(t) - \hat{y}(t)\big) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

Observateur: $\begin{cases}\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t)\end{cases}$

La matrice d'évolution de l'observateur : $A_{obs} = A - LC$, où $L = [l_0 \quad l_1 \quad \cdots \quad l_{n-1}]^T$.

Afin de faciliter les calculs, il faut mettre le système sous forme compagne d'observabilité.

Système : $\begin{cases}\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}\,(t)\end{cases}$

Observateur : $\begin{cases}\dot{\hat{\tilde{x}}}(t) = \tilde{A}\hat{\tilde{x}}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{L}\left(y(t) - \hat{\tilde{y}}(t)\right) \\ \hat{y}(t) = \tilde{C}\hat{\tilde{x}}(t)\end{cases}$

Observateur: $\begin{cases}\dot{\hat{\tilde{x}}}(t) = (\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C})\hat{\tilde{x}}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{L}y(t) \\ \hat{y}(t) = \tilde{C}\hat{\tilde{x}}(t)\end{cases}$

La matrice d'évolution de l'observateur : $\tilde{A}_{obs} = \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}$, où : $\tilde{L} = \left[\tilde{l}_0 \quad \tilde{l}_1 \quad \cdots \quad \tilde{l}_{n-1}\right]^T$.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = [0 \;\; 0 \dots 0 \;\; 0 \;\; 1]$$

Le polynôme caractéristique du système en boucle ouverte:

$$D_{BO}(s) = s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + \; a_1 s + a_0 \tag{6.11}$$

La matrice d'évolution de l'observateur dans la base observable est :

$$\tilde{A}_{ob} = \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{l}_0 \\ \tilde{l}_1 \\ \vdots \\ \\ \tilde{l}_{n-1} \end{bmatrix} [0 \;\; 0 \dots \;\; 0 \;\; 1]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\left(a_0 + \tilde{l}_0\right) \\ 1 & 0 & & \vdots & -\left(a_1 + \tilde{l}_1\right) \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\left(a_{n-2} + \tilde{l}_{n-2}\right) \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\left(a_{n-1} + \tilde{l}_{n-1}\right) \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

Le polynôme caractéristique de l'observateur en boucle fermée :

$$D_{BF}^{obs}(s) = s^n + (a_{n-1} + \tilde{l}_{n-1})\, s^{n-1} + \cdots + \; (a_1 + \tilde{l}_1)s + (a_0 + \tilde{l}_0) \tag{6.13}$$

En imposant *n* pôles pour l'observateur en boucle fermée : $p'_1 \cdots p'_n$

Le polynôme caractéristique désiré de l'observateur en boucle fermée s'écrit :

$$D_{BF-d}^{obs*}(s) = (s - p'_1)(s - p'_2) \cdots (s - p'_n)$$

En développant, on obtient :

$$D_{BF}^{obs*}(s) = s^n + \beta_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0 \qquad (6.14)$$

En identifiant (6.13) et (6.14) terme à terme, il vient :

$$\begin{cases} \alpha_0 = a_0 + \tilde{l}_0 \\ \alpha_1 = a_1 + \tilde{l}_1 \\ \quad\vdots \\ \alpha_{n-1} = a_{n-1} + \tilde{l}_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{l}_0 = \beta_0 - a_0 \\ \tilde{l}_1 = \beta_1 - a_1 \\ \quad\vdots \\ \tilde{l}_{n-1} = \beta_{n-1} - a_{n-1} \end{cases}$$

D'une manière générale :

$$\tilde{l}_i = \beta_i - a_i \quad avec: i = 0 \ldots n-1$$

où :

a_i sont les coefficients de l'équation caractéristique du système en boucle ouverte.

β_i sont les coefficients de l'équation caractéristique désirée de l'observateur en boucle fermée.

Retour à la base initiale (calcul de L en fonction de $\tilde{\mathbf{L}}$)

La matrice d'évolution de l'observateur dans la base canonique observable est : $\tilde{A}_{obs} = \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}$. A partir de cette matrice, on veut arriver à la matrice d'évolution exprimée dans la base initiale soit :

$$A_{obs} = A - LC$$

Pour cela, on va remonter le problème de la mise sous forme compagne observable (voir le tableau).

Matrice d'évolution de l'observateur	***Passage :*** *forme observable* $\longleftrightarrow$ *forme initiale*
$A_{obs} = A - \underbrace{\left(M^{*-1}\right)^T \tilde{L}}_{L}\, C$	*Système* $S: (A, B, C)$
Dual $\updownarrow$	dual $\updownarrow$
$A_{obs}^T = A^T - C^T \tilde{L}^T M^{*-1}$	$S^*(A^T, C^T, B^T)$
$\downarrow$ $\tilde{A}_{obs}^T = M^{*-1} A_{obs}^T M^*$ $A_{obs}^T = M^* \tilde{A}_{obs}^T M^{*-1}$ $\uparrow$	$\downarrow$ $\tilde{A}^T = M^{*-1} A^T M^*$, $\tilde{C}^T = M^{*-1} C^T$, $\tilde{B}^T = B^T M^*$ $\uparrow$ $A^T = M^* \tilde{A}^T M^{*-1}$, $C^T = M^* \tilde{C}^T$, $B^T = \tilde{B}^T M^{*-1}$
$\tilde{A}_{obs}^T = \tilde{A}^T - \tilde{C}^T \tilde{L}^T$	$\tilde{S}^{T*}: (\tilde{A}^T, \tilde{C}^T, \tilde{B}^T)$
dual $\updownarrow$	Dual $\updownarrow$
$\tilde{A}_{obs} = \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}$	Système sous forme compagne d'observabilité $\tilde{S}: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$

Finalement, on revient à la base initiale :

$$L = \left(M^{*-1}\right)^T \tilde{L}$$

3.1.2 Résume: algorithme de synthèse d'un observateur d'état (cas des systèmes SISO)

Soit un système à commander :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

L'observateur en BF est défini par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\big(y(t) - \hat{y}(t)\big)$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$$

L'on dispose d'un spectre désiré pour l'observateur (n pôles désirés de l'observateur en BF)

<u>Etape 1</u> *: Vérification de l'observabilité du système : calcul du* $det(Q_o)$

<u>Etape 2</u> *: Mettre le système sous forme compagne observable :*

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

<u>Etape 3</u> *: Détermination du polynôme caractéristique en BO :*

$$D_{BO}(s) = s^n + a_{n-1}\,s^{n-1} + \cdots + \ a_1 s + a_0$$

<u>Etape 4</u> *: Détermination du polynôme caractéristique désiré de l'observateur en BF:*

$$D_{BF}^{obs*}(s) = s^n + \beta_{n-1}\,s^{n-1} + \cdots + \ \beta_1 s + \beta_0$$

<u>Etape 5</u> *: Calcul du vecteur* $\tilde{L} = [\tilde{l}_0\ \tilde{l}_1 \cdots \tilde{l}_{n-1}]^T$ *dans la base canonique compagne d'observabilité.*

$$\tilde{l}_i = \beta_i - a_i \quad avec\colon i = 0 \ldots n-1$$

<u>Etape 6</u> *: Calcul du vecteur* $L = [l_0\ l_1 \cdots l_{n-1}]^T$ *, c-à-d, retour à la base initiale :*

$$L = \left(M^{*-1}\right)^T \tilde{L}$$

Exemple 6.1: Soit un système donné :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -4\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y(t) = [1 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Concevoir un observateur d'état ayant en boucle fermée le pôle double $p = -5$.

Etape 1 : Vérification de l'observabilité du système : calcul du $det(Q_o)$

$$det(Q_o) = [C \quad CA]^T = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1$$

Etape 2 : Mettre le système sous forme compagne observable :

Système dual: $A^* = A^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, B^* = C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C^* = B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$

Mettre le système dual sous forme compagne de commandabilité

$Q_c^* = [B^* \quad A^*B^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, Q_c^{*-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$M^{*-1}(1) = Q_c^{*-1}(2) = [-1 \quad 1]$

$M^{*-1}(2) = Q_c^{*-1}(1)A = [-2 \quad 3]$

$M^{*-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, M^* = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Système dual sous forme compagne de commandabilité

$\tilde{A}^* = M^{*-1}A^*M^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \tilde{B}^* = M^{*-1}B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{C}^* = C^*M^* = [1 \quad 0]$

Alors, la forme compagne d'observabilité du système est :

$\tilde{A} = \tilde{A}^{*T} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \tilde{C}^{*T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \tilde{B}^{*T} = [0 \quad 1]$

Etape 3 : Détermination du polynôme caractéristique en BO :

$$D_{BO}(s) = s^2 - 3\,s - 2 \Rightarrow a_0 = 2, a_1 = -3$$

Etape 4 : Détermination du polynôme caractéristique désiré de l'observateur en BF:

$$D_{BF}^{obs*}(s) = (s+5)(s+5) = s^n + 10\,s + 25 \Rightarrow \beta_0 = 25, \beta_1 = 10$$

Etape 5 : Calcul du vecteur $\tilde{L} = [\tilde{l}_0 \ \tilde{l}_1]^T$ *dans la base canonique compagne d'observabilité*

$$\tilde{l}_0 = \beta_0 - a_0 = 27$$
$$\tilde{l}_1 = \beta_1 - a_1 = 13$$

Etape 6 : Calcul du vecteur $L = [l_0 \ l_1]^T$ *, c-à-d, retour à la base initiale :*

$$L = \left(M^{*-1}\right)^T \tilde{L} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -53 \\ 66 \end{bmatrix}$$

3.2 Cas général : Systèmes multivariables

En utilisant le théorème de séparation, la matrice K(gain de commande) et la matrice L (gain d'observateur) se calculent indépendamment (séparément).

Calcul de K (déjà fait au chapitre précèdent)

Calcul de L :

Dans la base initiale, on a

$$\text{Système :} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$\text{Observateur:} \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

$A_{obs} = A - LC$ est la matrice d'évolution de l'observateur, où $L(nxp)$

Afin de faciliter les calculs, on décompose le système en p sous-systèmes observables.

$$\text{Système : } \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{cases}$$

$$\text{Observateur : } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C})\hat{x}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{L}y(t) \\ \hat{y}(t) = \tilde{C}\hat{x}(t) \end{cases}$$

La matrice d'évolution de l'observateur : $\tilde{A}_{obs} = \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}$, où : $\tilde{L}(nxp)$

Alors, en suivant l'algoritme suivant, on décompose le système en p sous-systèmes observables :

$$\underbrace{S(A,B,C)}_{systeme\ initial} \xrightarrow{systeme\ dual} S^*(A^* = A^T, B^* = C^T, C^* = B^T) \xrightarrow[\text{(calcul de } M^{*^{-1}} \text{ et } M^*)]{\substack{d\acute{e}composition\ en\ "p" \\ \text{sous systemes} \\ \text{commandables:} \\ x=M^*\tilde{x}}} \tilde{S}^*(\widetilde{A}^*, \widetilde{B}^*, \widetilde{C}^*)$$

$$\xrightarrow{systeme\ dual} \underbrace{\tilde{S}(\widetilde{A} = \widetilde{A}^{*T}, \widetilde{B} = \widetilde{C}^{*T}, \widetilde{C} = \widetilde{B}^{*T})}_{\substack{syst\grave{e}me\ d\acute{e}compos\acute{e} \\ en \\ "p"sous\ systemes \\ observables}}$$

Le système sous forme compagne observable:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & -a_0^1 \\ 1 & 0 & & -a_1^1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n_1-1}^1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & * \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & * \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & -a_0^2 \\ 1 & 0 & & -a_1^2 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n_2-1}^2 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & * \end{bmatrix} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & * \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & -a_0^p \\ 1 & 0 & & -a_1^p \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n_p-1}^p \end{bmatrix}
\end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix}
[0 & \dots & 1] & [0 & \dots & 0] & \dots & [0 & \dots & 0] \\
[0 & \dots & r_{12}] & [0 & \dots & 1] & \dots & [0 & \dots & 0] \\
& \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
[0 & \dots & r_{1p}] & [0 & \dots & r_{1p}] & \dots & [0 & \dots & 1]
\end{bmatrix}$$

Cette fois-ci la matrice $\tilde{A}$ n'est pas triangulaire par bloc, ceci va compliquer le calcul de l'équation caractéristique en boucle ouverte. Cependant, on peut choisir une matrice des gains L de façon que la matrice $\tilde{A}_{obs} = \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}$ soit triangulaire.
Pour des raisons de simplicité et de lisibilité des expressions, on se limite au cas où le système est décomposé en deux sous-systèmes observables ($p = 2$).

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & a_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} [0 & \dots & 1] & [0 & \dots & 0] \\ [0 & \dots & r_{21}] & [0 & \dots & 1] \end{bmatrix}, \tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{12} \\ 0 & \tilde{l}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{obs} = \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & a_{11} - \tilde{l}_{11} - r_{21}\tilde{l}_{12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{12} - \tilde{l}_{12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{11} - r_{21}\tilde{l}_{12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & a_{22} - \tilde{l}_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A_{obs}^{d} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & \beta_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \beta_{12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \beta_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & \beta_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Pour avoir une matrice $\tilde{A}_{obs}$ triangulaire, on prend $\beta_{12} = [0 \quad \dots \quad 0]^T$.

Par identification de $\tilde{A}_{obs}$ et $\tilde{A}_{obs}^{d}$ terme à terme, il vient :

$$\begin{array}{lcl} \beta_{22} = a_{22} - l_{22} & & \tilde{l}_{22} = a_{22} - \beta_{22} \\ \beta_{21} - \tilde{l}_{21} = 0 & \Rightarrow & \tilde{l}_{21} = a_{21} \\ \beta_{11} = a_{11} - \tilde{l}_{11} - r_{12}\tilde{l}_{21} & & \tilde{l}_{11} = a_{11} - r_{12}\tilde{l}_{21} - \beta_{11} \end{array}$$

Dans le cas général :

$$\tilde{l}_{pp} = a_{pp} - \beta_{pp}$$
$$\tilde{l}_{ij} = a_{ij} \quad j > i$$
$$\tilde{l}_{ii} = a_{ii} - \beta_{ii} - \sum_{j=i+1}^{p} r_{ji}\tilde{l}_{ij}$$

Finalement : $L = \left(M^{*-1}\right)^T \tilde{L}$

3.2.1 Résumé 1 : Algorithme de calcul de l'observateur L – décomposition en p sous-systèmes observables

Soit un système donné:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

L'on dispose de n pôles désirés pour l'observateur d'état : $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y})$

<u>Etape 1</u> *: Décomposer le système en p sous-systèmes observables : (calcul de M^{*-1} et M^*)*

$$\underbrace{S(A,B,C)}_{systeme\ initial} \xrightarrow{systeme\ dual} S^*(A^* = A^T, B^* = C^T, C^* = B^T) \xrightarrow[\text{(calcul de } M^{*-1} \text{ et } M^*)]{\substack{décomposition\ en\ "p" \\ \text{sous systemes} \\ \text{commandables:} \\ x = M^*\tilde{x}}} \tilde{S}^*(\tilde{A}^*, \tilde{B}^*, \tilde{C}^*)$$

$$\xrightarrow{systeme\ dual} \underbrace{\tilde{S}(\tilde{A} = \tilde{A}^{*T}, \tilde{B} = \tilde{C}^{*T}, \tilde{C} = \tilde{B}^{*T})}_{\substack{système\ décomposé \\ en \\ "p"sous\ systemes \\ observables}}$$

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

<u>Etape 2</u> *: Détermination des vecteurs :* a_{ij}

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [\tilde{A}_{11}] & \cdots & [\tilde{A}_{1p}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\tilde{A}_{p1}] & \cdots & [\tilde{A}_{pp}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots 0 & -a_0^1 \\ 1 & 0 & \ddots & -a_1^1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n_1-1}^1 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots 0 & * \\ \vdots & \vdots & & * \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots 0 & * \\ \vdots & \vdots & & * \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots 0 & -a_0^p \\ 1 & 0 & \ddots & -a_1^p \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n_p-1}^p \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} [0 & \ldots & 1] & [0 & \ldots & 0] & \ldots & [0 & \ldots & 0] \\ [0 & \ldots & r_{21}] & [0 & \ldots & 1] & \ldots & [0 & \ldots & 0] \\ & \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ [0 & \ldots & r_{p1}] & [0 & \ldots & r_{p2}] & \ldots & [0 & \ldots & 1] \end{bmatrix}$$

$$a_{11}=\begin{bmatrix}-a_0^1\\-a_1^1\\\vdots\\-a_{n_1-1}^1\end{bmatrix},a_{1p}=\begin{bmatrix}*\\*\\\vdots\\*\end{bmatrix},a_{p1}=\begin{bmatrix}*\\*\\\vdots\\*\end{bmatrix},a_{pp}=\begin{bmatrix}-a_0^p\\-a_1^p\\\vdots\\-a_{n_1-1}^p\end{bmatrix}$$

Etape 3 *: Détermination des vecteurs : β_{ij} , On veut une matrice $\tilde{A}_{obs}^d$ triangulaire, donc :*

$$D_{obs}^d(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=\prod_{i=1}^{p}\left(s^{n_i}+\beta_{n_i-1}^i s^{n_i-1}+\cdots+\beta_1^i\,s+_0^i\right)$$

$$=\underbrace{\left(s^{n_1}+\beta_{n_1-1}^1 s^{n_1-1}+\cdots+\beta_0^1\right)}_{\downarrow\ \tilde{A}_{obs\,11}^d}\times\ldots\times\underbrace{\left(s^{n_p}+\beta_{n_p-1}^p s^{n_p-1}+\cdots+\beta_0^p\right)}_{\downarrow\ \tilde{A}_{obs\,pp}^d}$$

$$\tilde{A}_{obs}^d=\begin{bmatrix}[\tilde{A}_{obs\,11}^d] & \ldots & [0]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ [*] & \ldots & [\tilde{A}_{obs\,pp}^d]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&\ldots 0&-\beta_0^1\\1&0&\ddots&-\beta_1^1\\0&\ddots&0&\vdots\\0&0\ 1&&-\beta_{n_1-1}^1\end{bmatrix} & \ldots & \begin{bmatrix}0&0&\ldots 0&0\\\vdots&\vdots&&\\0&0&0&\vdots\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \begin{bmatrix}0&0&\ldots 0&*\\\vdots&\vdots&&\\0&0&0&\vdots\\0&0&0&*\end{bmatrix} & \ldots & \begin{bmatrix}0&0&\ldots 0&-\beta_0^p\\1&0&\ddots&-\beta_1^p\\0&\ddots&0&\vdots\\0&0\ 1&&-\beta_{n_p-1}^p\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\beta_{11}=\begin{bmatrix}-\beta_0^1\\-\beta_1^1\\\vdots\\-\beta_{n_1-1}^1\end{bmatrix},\beta_{pp}=\begin{bmatrix}-\beta_0^p\\-\beta_1^p\\\vdots\\-\beta_{n_1-1}^p\end{bmatrix}$$

Etape 4 *: Calcul du retour d'état $\tilde{L}$ dans la base canonique compagne d'observabilité*

$$\tilde{L}=\begin{bmatrix}\tilde{l}_{11}&\tilde{l}_{12}&\ldots&\tilde{l}_{1p}\\0&\tilde{l}_{22}&\ldots&\tilde{l}_{2p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&\tilde{l}_{pp}\end{bmatrix}_{(n\times p)}\qquad avec:\quad \begin{aligned}&\tilde{l}_{pp}=a_{pp}-\beta_{pp}\\&\tilde{l}_{ij}=a_{ij}\quad j>i\\&\tilde{l}_{ii}=a_{ii}-\beta_{ii}-\sum_{j=i+1}^{p}r_{ji}\tilde{l}_{ij}\end{aligned}$$

Etape 5 *: Calcul de la matrice des gains L de l'observateur dans la base initiale : $L=\left(M^{*-1}\right)^T\tilde{L}$.*

4. Exercices

Exercice 01 : Soit le système monovariable suivant:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-4\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}u$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

1- Concevoir un retour d'état de sorte que le système corrigé (c à d en boucle fermée) ait le pôle double -1.
2- Concevoir un observateur d'état ayant en boucle fermée le pôle double $p=-5$.

Exercice 02 : Soit le système monovariable décrit par :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

1- Calculer le retour d'état permettant d'imposer en BF les pôles : $-1, -2, -3$
2- Construire un observateur d'état ayant pour dynamique les pôles : $-4, -5, -6$

Exercice 3 : Soit le système multivariable suivant décrit par:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} x$$

1- Calculer le retour d'état K qui permet d'imposer les pôles en BF $: -1 \pm 3j$ et -3 (en *m* sous-systèmes commandables).
2- Construire un observateur d'état ayant pour dynamique les pôles : -30, $-10 \pm 10j$
3- Vérifier l'imposition des pôles du système global (système en BF et observateur).

Excercice 4 Soit le système multivariable suivant :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u, \; y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

1- Calculer le retour d'état K permettant d'imposer les pôles en BF : $p_1 = -1, p_2 = -2,\ p_3 = -1 - j,\ p_4 = -1 + j$ (décomposition en *m* systèmes commandables).
2-Construire un observateur d'état ayant pour dynamique les pôles : $p_1 = -3, p_2 = -6,\ p_3 = -2 - 2j,\ p_4 = -2 + 2j$
3-Vérifier l'imposition des pôles du système global (système en BF et observateur).

3.2.2 Résumé 2 : Algorithme de calcul de l'observateur L – décomposition en p sous-systèmes observables

Soit un système donné:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

L'on dispose de n pôles désirés pour l'observateur d'état : $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y})$

Etape 1 *: Décomposer le système en p sous-systèmes observables : (calcul de* $M^{*^{-1}}$ *et* M^* *)*

$$\xrightarrow{systeme\ dual} S^*\left(A^* = A^T, B^* = C^T, C^* = B^T\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{(calcul de } M^{*-1} \text{ et } M^*)}]{\substack{décomposition\ en\ "p" \\ \text{sous systemes} \\ \text{commandables:} \\ x = M^*\tilde{x}}} \tilde{S}^*(\tilde{A}^*, \tilde{B}^*, \tilde{C}^*)$$

$$On\ calcul\ le\ retour\ d'état\ dans\ la\ base\ canonique\ \tilde{K}^*, puis\ K^* = \tilde{K}^* M^{*-1},$$

$$finalement\ L = K^{*T}$$

$$\xrightarrow{systeme\ dual} \underbrace{\tilde{S}(\tilde{A} = \tilde{A}^{*T}, \tilde{B} = \tilde{C}^{*T}, \tilde{C} = \tilde{B}^{*T})}_{\substack{système\ décomposé \\ en \\ "p"sous\ systemes \\ observables}} r$$

1- $Systeme\ S\ (A, B, C)$
2- $systeme\ dual: S^*\left(A^* = A^T, B^* = C^T, C^* = B^T\right)$
3- $systeme\ dual\ sous\ forme\ compagne\ de\ comandabilité$ (calcul de M^{*-1} et M^*): $\tilde{S}^*(\tilde{A}^*, \tilde{B}^*, \tilde{C}^*)$
   - $calcul\ du\ retour\ d'étatdans\ la\ base\ canonique\ \tilde{K}^*$
   - $calcul\ du\ retour\ d'état\ K^* = \tilde{K}^* M^{*-1}$
   - $calcul\ de\ L = K^{*T}$
4- $systeme\ décomposé\ en\ p\ sous\ systemes\ observables: \tilde{S}(\tilde{A} = \tilde{A}^{*T}, \tilde{B} = \tilde{C}^{*T}, \tilde{C} = \tilde{B}^{*T})$

Références Bibliographiques

1 W. M. Wonham, Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. *Springer Verlag*, 1985.

2 G. F. Franklin, J. D. Powell and A. E. Naeini, Feedback Control Dynamics Systems. *Addison-Wesly*, 1991.

3 I. Landau, Identification et Commande des Systèmes, *Edition Hermes*, 1993.

4 H. P. Hsu, Schaum's outline of Theory and Problems of Signals and Systems, *Schaum's outline series*, 1995.

5 K. Ogata, Modern Control Engineering, *Prentice-Hall, Inc*, 1997.

6 P.J. Antsaklis and A.N. Michel, Linear Systems, *McGraw Hill*, 1997.

7 I. E. Kose, Introduction to State-Space Control Theory, *Dept. of Mechanical Engineering Bogaziçi University*, 2003.

8 R. Toscano "Commande et Diagnostic des Systèmes Dynamiques: Modélisation, Analyse, Commande par PID et par Retour d'Etat, Diagnostic, *Ellipses* 2005.

9 P. Borne, "Automatisation des Processus dans l'Espace d'Etat", *Technip* 2007.

10 Caroline Bérard, Jean-Marc Biannic, David Saussié, La Commande Multivariable, *Editions Dunod*, 2012.

11 Caroline Bérard , Jean-Marc Biannic , David Saussié, Commande Multivariable, *Dunod, Paris*, 2012.

12 P. Pradin et G. Garcia, Automatique Linéaire: Systèmes Multivariables, INSA de Toulouse, Dpt. GEI, 2011.

13 D. Bensoussan, Commande Moderne: Approche par Modèles Continus et Discrets, *Presses Internationales Polytechnique*, 2008.