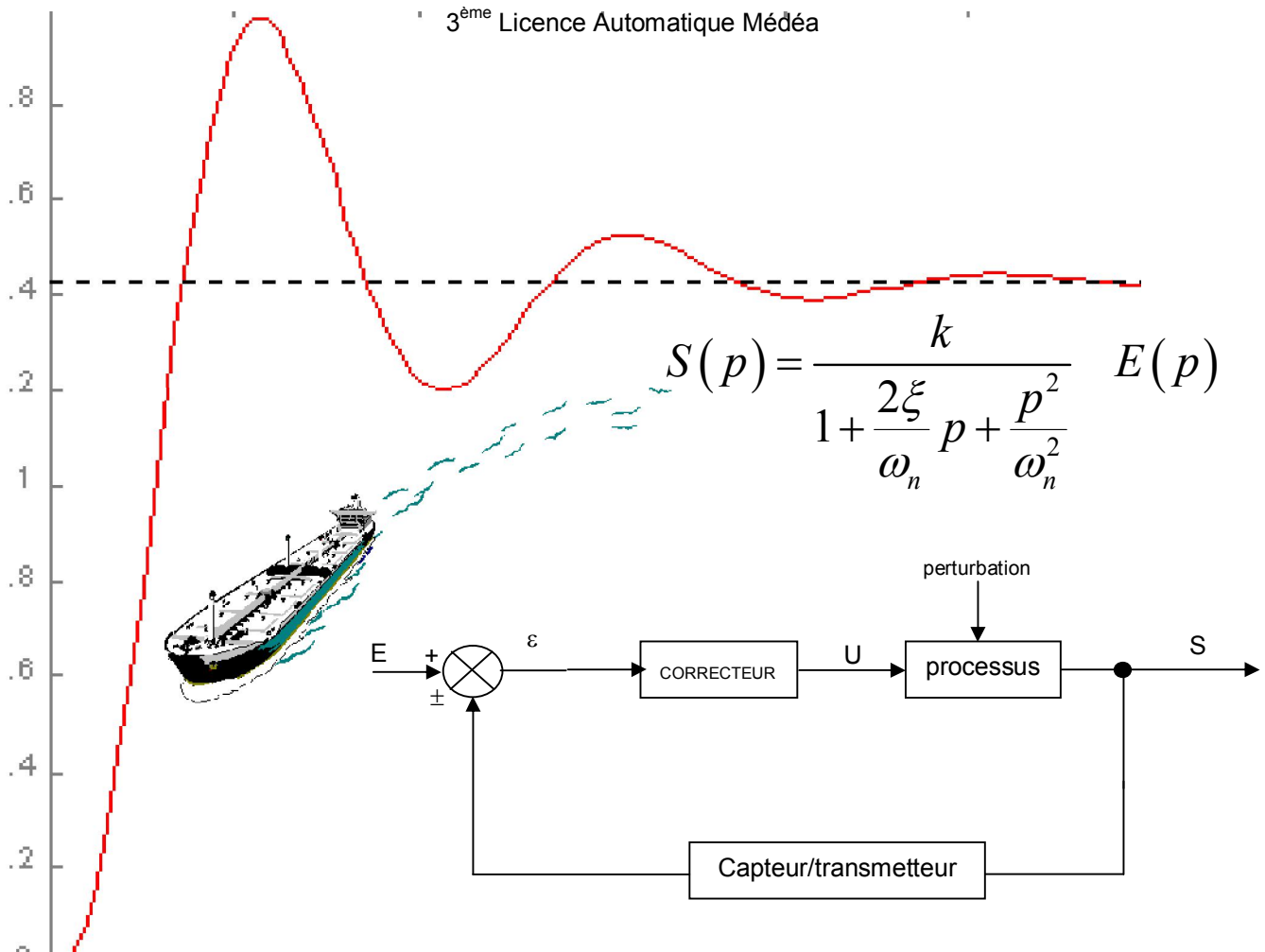


Asservissements linéaires continus

3^{ème} Licence Automatique Médéa



Automatique :

Déf : Discipline traitant de la **modélisation**, l'**analyse** et la **commande** des **systèmes dynamiques**.

L'objectif d'un système automatisé étant de remplacer l'homme dans une tâche.

Pour établir la structure automatisé il faut commencer par l'étude du fonctionnement du système dans le quel l'homme est la partie commande.

1 Introduction aux asservissements linéaires

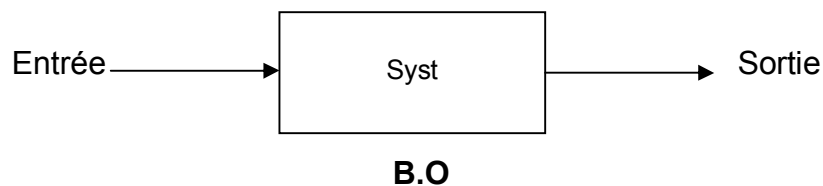
Système : Un système est constitué par un ensemble d'éléments physiques, mécaniques et électriques reliés entre eux de manière à former un tout.

Entrée – Sortie : Dans un système, on peut toujours considérer

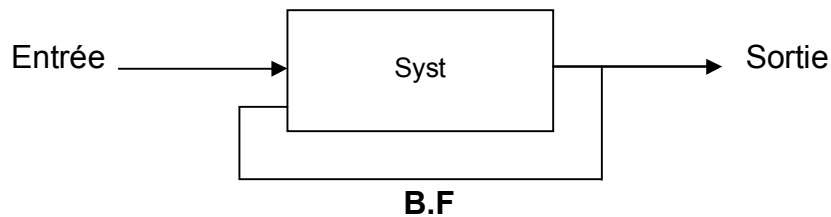
- Une action imposée à ce système \longrightarrow Entrée
- Une grandeur caractérisant l'état de ce système \longrightarrow Sortie

Boucle ouverte – Boucle fermée :

- Dans un système en boucle ouverte, la valeur de la sortie n'affecte pas l'entrée.



- Dans un système en boucle fermée, le signal de sortie agit sur l'entrée (conduite automobile).



1.1 Chaînes de commande

1.1.1 Commande manuelle sans amplification de puissance

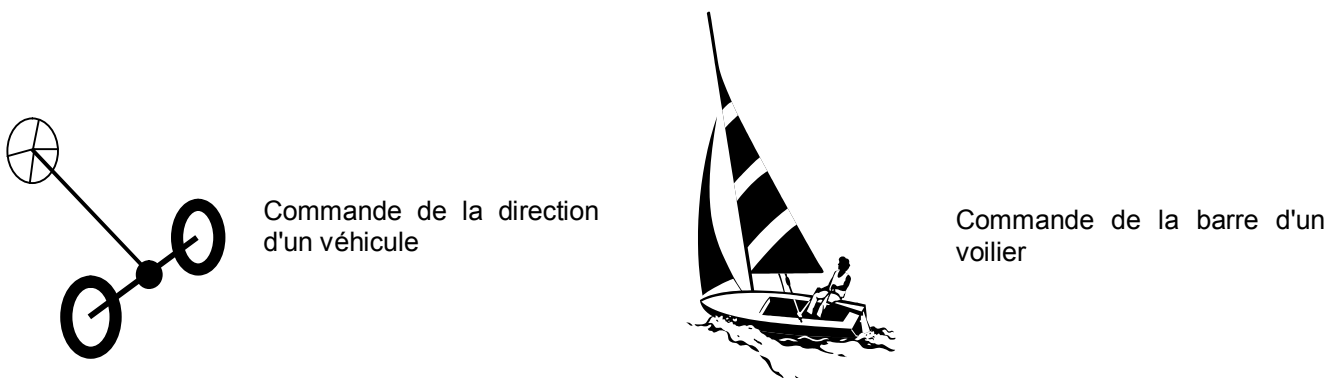
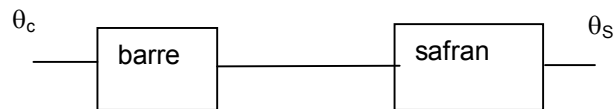


Figure 1- commande manuelle

Sur les exemples ci-dessus, toute la puissance fournie à l'entrée se retrouve en sortie. Il s'agit d'une **chaîne sans amplification de puissance**.

Une telle chaîne est réversible, ce qui signifie que la sortie peut influencer l'entrée. Par exemple, l'éclatement d'un pneu à l'avant produit un effet sur le volant et peut provoquer la perte de contrôle du véhicule !



1.1.2 Chaîne de commande avec amplification de puissance

Considérons maintenant un pétrolier de 300.000 tonnes au lieu d'un voilier. Il est évident qu'on ne peut plus utiliser de "barre franche". Il est nécessaire de faire appel à un moteur hydraulique par exemple pour faire se mouvoir l'énorme safran.

Le schéma fonctionnel devient le suivant :

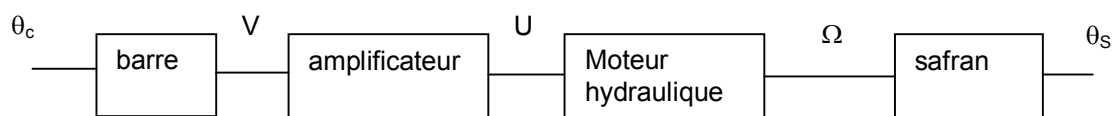


Figure 2- commande de safran d'un pétrolier

Entre la barre et le gouvernail, on observe bien toute la nécessité d'une amplification de puissance, car la puissance nécessaire pour tourner la barre est négligeable devant celle mise en œuvre pour faire pivoter le gouvernail.

Une chaîne de commande munie d'une amplification de puissance est dite **unilatérale** la sortie ne peut en aucun cas influencer l'entrée. La **maîtrise du système** est donc meilleure.

1.1.3 Entrées secondaires

La direction prise par un navire sera fonction de l'angle de barre mais aussi des courants, de la houle, du vent, etc ... Un four, aussi bien calorifugé soit-il, sera toujours le siège de fuites thermiques (ponts thermiques, porte, etc ...). Un système est donc **perturbé**. et de ce fait, à une commande d'entrée ne correspondra pas toujours l'effet escompté en sortie.

Conclusion: la commande directe d'un système n'est ni précise, ni sûre.

Essayez d'enfiler un fil dans le chas d'une aiguille directement du premier coup !

1.1.4 Nécessité d'un retour

Si les perturbations étaient connues et mesurables, il suffirait alors de modifier la commande d'entrée en conséquence. En fait, c'est rarement le cas et il est difficile dans ces conditions de compenser les erreurs, les dérives ou les accidents qui peuvent intervenir à l'intérieur de la chaîne directe. On va donc essayer de mesurer leurs effets directement sur la sortie.

L'idée retenue est celle du modèle humain que nous allons traduire à l'aide de l'exemple d'une régulation de niveau.

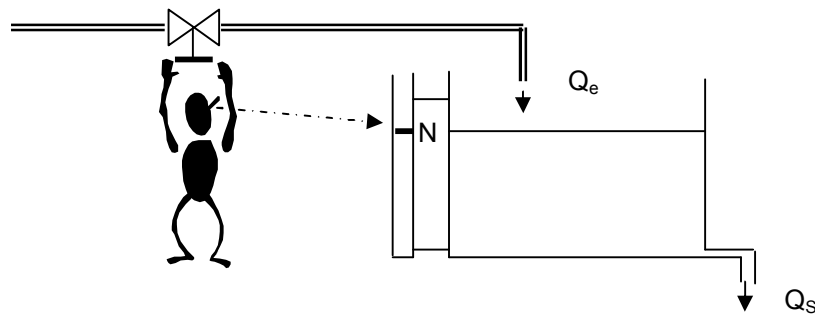


Figure 3- Régulation de niveau

L'opérateur assure le maintien du niveau du liquide autour du repère R. Il réalise ou utilise pour cela plusieurs fonctions:

- **fonction mesure** : le niveau est mesuré à l'aide d'un tube transparent monté en dérivation sur le réservoir;
- **fonction transmission de l'information** : l'utilisateur visualise la différence ε entre le repère R et le niveau dans le tube.
- **fonction réflexion** : à partir de l'estimation de l'écart ε , l'opérateur décide alors de réagir selon le signe et l'amplitude de cet écart;
- **fonction réglage** : il tourne manuellement la vanne pour régler le débit d'eau et amener ainsi le niveau de liquide juste en N et sans dépassement.

Ce comportement humain peut se symboliser par le schéma de la figure 4.

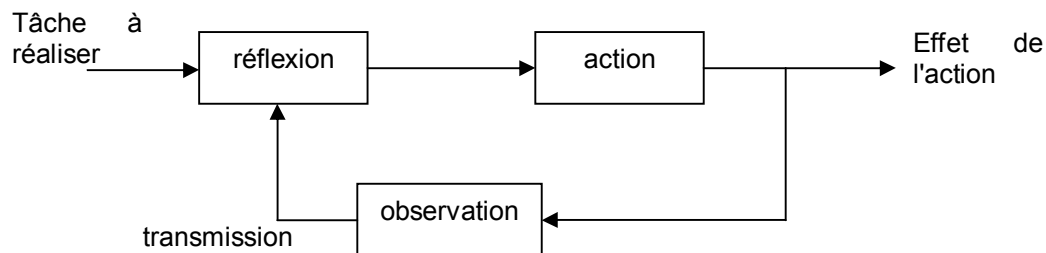


Figure 4- comportement humain

On voit bien apparaître ici la notion de **retour** que l'on appelle encore **boucle** ou **feedback**.

Nous adoptons exactement le comportement ci-dessus lorsque nous enfilons un fil dans une aiguille, la main rectifie sa trajectoire suivant l'observation et la réflexion.

Conclusion : Asservir un système c'est établir un retour (Feedback) c'est à dire prendre le signal de sortie et s'en servir pour former le signal d'entrée. Un asservissement est le système qui réalise le but.

1.2 Système asservi

1.2.1 Définition

Si on recopie le comportement précédent sur un système matériel on obtient le schéma figure 5.

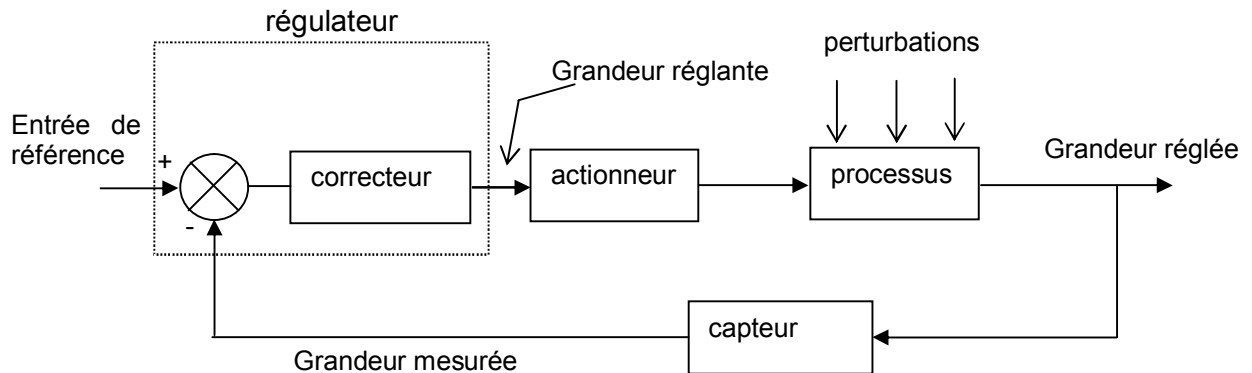


Figure 5- système bouclé

Un système asservi comporte donc, outre la chaîne de commande avec amplification de puissance, une chaîne de retour et un outil de comparaison. Observons un à un l'ensemble de ces éléments :

- le **processus** est soumis aux excitations constituées par l'entrée de référence et les perturbations. Il y répond par une grandeur qui lui est propre. Cette grandeur porte le nom de **grandeur asservie ou grandeur réglée**;
- le **capteur** donne une image utilisable de la grandeur réglée ; la nature de cette mesure est le plus souvent électrique. Un capteur doit donner une image **fidèle** de la grandeur réglée. Sa **sensibilité** impose donc les **limites de la précision** de l'asservissement.
- le **régulateur** est composé de deux parties :
 - le **comparateur** qui reçoit l'information de référence et la grandeur mesurée dont il fait la différence ε appelée **écart** ou **erreur**;
 - le **correcteur** dont le rôle sera d'éliminer cet écart, quelles que soient les perturbations, et d'amener le processus à réagir le plus rapidement, quelles que soient les variations de l'entrée de référence ou les perturbations c'est **l'organe intelligent** du système asservi.
- l'**actionneur** reçoit du régulateur la grandeur réglante et **l'amplifie en puissance** c'est le "muscle" de la chaîne qui va piloter l'évolution du processus (par exemple: moteur, vérin, vanne, etc ...).

1.2.2 Exemples

1.2.2.1 Régulation de vitesse

Dans l'industrie, on a souvent besoin d'entraîner une charge à vitesse constante malgré les couples résistants qui s'exercent sur elle. C'est aussi le cas d'un radar dont la vitesse de balayage doit être la plus constante possible. On peut alors utiliser le principe suivant :

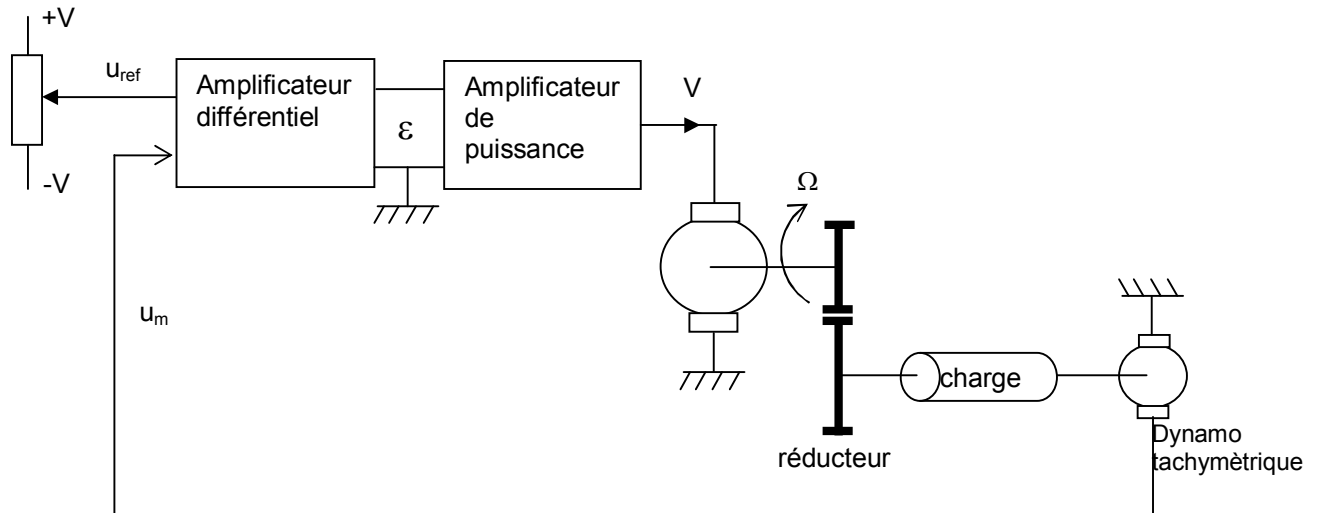


Figure 6- Régulation de vitesse

La vitesse de consigne est affichée sur un potentiomètre dont le curseur fournit une tension de référence u_{ref} . Celle-ci est comparée à la tension u_m , image de la vitesse de rotation de la charge; le capteur est ici une génératrice tachymétrique. La tension d'écart ε attaque l'actionneur de puissance. Les perturbations sont celles qui interviennent sur la charge (variations du couple résistant au niveau de la charge, frottements secs, balourd, etc ...).

Le fonctionnement de cette régulation est alors le suivant :

- si Ω diminue alors u_m diminue; dans ces conditions $\varepsilon = u_{ref} - u_m$ augmente. V croît et donc Ω croît également (cas d'une machine à courant continu à excitation indépendante);
- inversement si Ω augmente alors u_m en fait autant, donc ε et V diminuent et Ω décroît;
- l'asservissement est réalisé dès que $\varepsilon = u_{ref} - u_m = 0$;

1.2.2.2 Régulation de niveau

Il s'agit ici de réguler la hauteur d'eau h dans un réservoir en fonction de la demande. Cette demande constitue le débit de fuite Q_s (utilisation aléatoire) de l'installation, ce qui signifie que les perturbations représentent la **charge** du système.

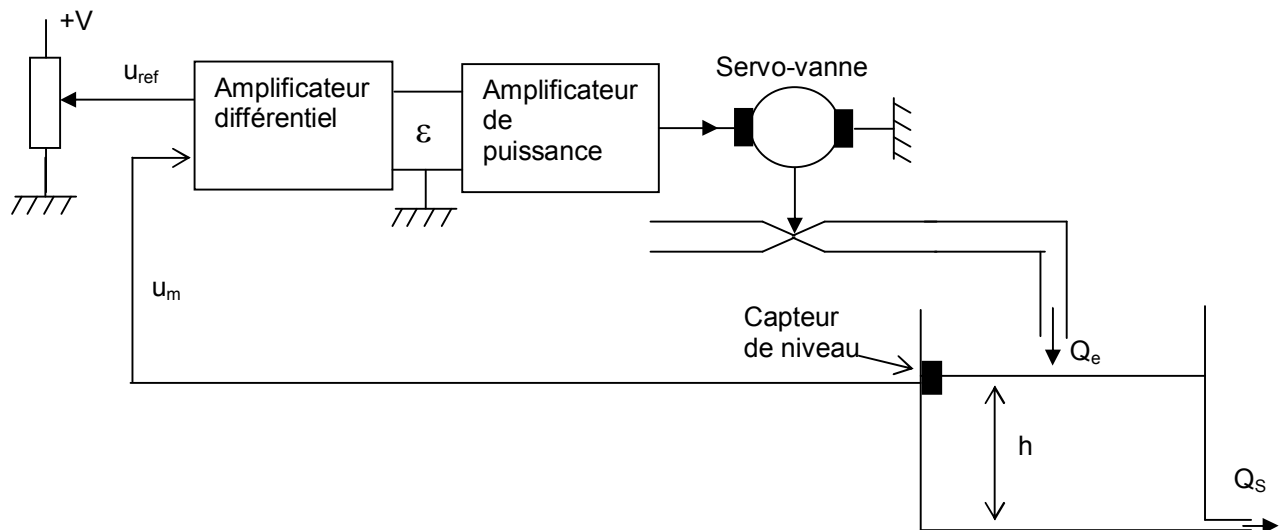


Figure 7- régulation de niveau

La hauteur h est mesurée par un capteur de niveau, celle-ci est comparée à la hauteur de référence affichée sur un potentiomètre. L'écart est alors amplifié afin de piloter la servo-vanne. Donc :

- Si h décroît, alors u_m diminue. ε augmente et la vanne s'ouvre, le niveau h remonte.
- Inversement, si h augmente, alors ε diminue; la vanne se ferme et donc h se stabilise si Q_s est nul ou bien diminue.

1.3 Classification des systèmes asservis

1.3.1 Classification selon le type de l'entrée de référence

Dans tout système asservi, la grandeur de sortie doit recopier le mieux possible la grandeur d'entrée. On distingue cependant deux modes de fonctionnement selon les conditions d'utilisation :

- un **asservissement** a une entrée de référence qui évolue ou qui suit une grandeur physique indépendante du processus lui-même (radar de poursuite, asservissement de position, etc...). Cette évolution de l'entrée fait évoluer le point de fonctionnement du processus et la sortie doit suivre le mieux possible cette évolution en dépit des perturbations. On dit encore que le système fonctionne en **suiveur** ou en **poursuite**. **Entrée de référence variable**

- une **régulation** a une entrée de référence constante ou évoluant par paliers. Cette entrée est aussi appelée **consigne** (régulation de température par exemple). La sortie doit rester constante quelles que soient les perturbations. **Entrée de référence constante**

Ces distinctions ne sont pas absolues, car il faut bien voir qu'un asservissement fonctionne en régulateur lorsqu'il répond aux perturbations et qu'inversement, le régulateur fonctionne en asservissement lorsqu'on modifie sa consigne. Toutefois, les industriels considèrent que l'aspect régulation est le plus important car les valeurs de consigne sont le plus souvent fixes.

Enfin, on démontre que si le comportement en asservissement est correct alors le comportement en régulation l'est aussi.

1.3.2 Classification selon le type de régulateur

On distingue trois grandes classes de régulateur :

- un régulateur peut être **analogique** il est réalisé avec des composants analogiques (essentiellement des amplificateurs opérationnels) et son signal de sortie évolue de manière continue dans le temps. On obtient alors un **système asservi linéaire continu**.

- le régulateur peut également être **numérique** : il est réalisé à l'aide d'un **système programmable** (microprocesseur par exemple) et son signal de sortie est alors le résultat d'un **algorithme de calcul**. On obtient alors un **système asservi linéaire échantillonné**.

- on trouve également les régulateurs **T.O.R. (Tout ou Rien)**. La grandeur réglante ne peut prendre que deux valeurs et l'actionneur de puissance ne dispose alors que de deux états de fonctionnement il est « ouvert » ou « fermé ». Le suivi de consigne est dans ces conditions beaucoup moins fin qu'avec les deux systèmes précédents, mais il peut être suffisant si l'on ne désire pas une grande précision (par

exemple le thermostat qui met en route ou arrête le chauffage dans un appartement). Il a aussi l'avantage d'être moins onéreux. Ce mode de fonctionnement ne sera pas étudié ici.

1.3.3 Méthodologie d'étude des systèmes asservis

Pour concevoir un système asservi, on pourra opérer de la manière suivante :

1) **Modéliser le système**

Dans la majorité des cas, on cherchera à modéliser le comportement expérimental de la chaîne directe (actionneur, processus et capteur), car la modélisation directe n'est jamais évidente, surtout lorsque le système existe déjà. Nous consacrerons tout un chapitre à l'identification des processus.

2) **Choisir le type de commande**

Le choix de la commande (continue ou échantillonnée) intervient sur les choix matériels, en particulier lorsque le processus existe déjà et qu'on désire améliorer son comportement en boucle fermée.

3) **Synthétiser le correcteur**

Les problèmes ne sont pas les mêmes selon qu'on travaille en mode continu ou en mode échantillonné : asservissements linéaires continus = 2^e année, asservissements linéaires échantillonnés = 3^e année.

4) **Essais**

Les résultats expérimentaux consacreront ou pas les choix précédents. Rien ne dit que ces choix aient été les bons, et il faudra peut-être les revoir :

- dans un moindre mal, ce ne sera qu'une question de réglage,
- au pire. il faudra revoir le modèle utilisé d'où l'importance d'une bonne maîtrise des techniques qui seront exposées dans les chapitres suivants.

Notons qu'il existe aujourd'hui un certain nombre de logiciels qui permettent d'aider le technicien dans sa recherche du « **meilleur système** ». Cela va du logiciel d'identification au logiciel de conception du régulateur. Il est évident qu'une bonne utilisation de ces outils passent par une parfaite maîtrise des techniques exposées dans les chapitres suivants mais aussi et surtout par une parfaite connaissance du processus physique : c'est tout l'art du réglage.

2 Signaux et systèmes

Un signal représente l'**aspect mesurable** de la **variation** d'une grandeur physique. La notion de signal est d'ailleurs ancienne (signaux lumineux, signaux de fumée, etc...) et ces exemples nous montrent simplement qu'un signal nous prévient plus ou moins complètement d'un événement.

Un signal est donc porteur d'information(s).

Un capteur traduit la variation d'une grandeur physique en un signal

- thermomètre pour la température,
- baromètre pour la pression atmosphérique, (ou pressostat, l'équivalent TOR),
- hygromètre pour l'humidité,
- etc....

Un signal est donc lié au temps car il traduit la variation de la grandeur physique en fonction du temps. En physique on ne s'intéresse qu'au temps $t \geq 0$ alors qu'en mathématiques, on peut définir des temps $t \in]-\infty; +\infty[$

Un signal défini pour $t \geq 0$ et nul pour $t < 0$ est appelé **signal causal**.

Enfin, un signal peut être **aléatoire** ou **certain** (déterministe) selon que le hasard intervient ou non dans sa génération.

En automatique, on ne s'intéressera qu'aux signaux certains et causaux.

2.1 Description d'un signal par une fonction

Un signal, puisqu'il est porteur d'informations et qu'il dépend du temps peut donc être représenté par une fonction. Suivant la façon dont on va utiliser le temps et l'amplitude du signal, celui-ci pourra se présenter sous plusieurs formes.

2.1.1 Signal analogique

Un signal est analogique s'il prend ses valeurs dans un ensemble continu.

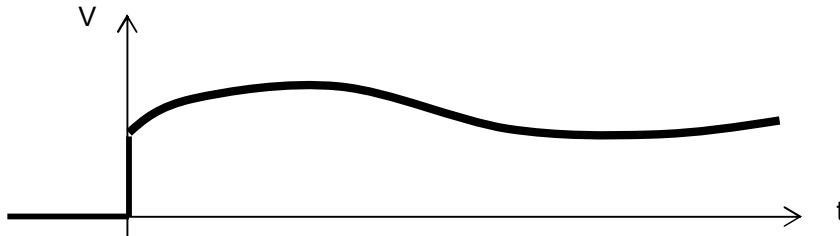


Figure 8- signal analogique causal

Le signal de tension à la sortie de la dynamo tachymétrique de la Figure 6 est une fonction V telle qu'à toute valeur de t corresponde une valeur $T(t)$:

$$t \rightarrow T(t)$$

La variable temps t est une variable réelle continue, $T(t)$ est un nombre réel. Un signal **analogique** est souvent appelé **signal continu**.

2.1.2 Signal échantillonné

Observons périodiquement la température d'un malade et portons celle-ci sur un graphique. Si celle-ci est prise toutes les heures, alors $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$,... sont des nombres qui mesurent cette température.

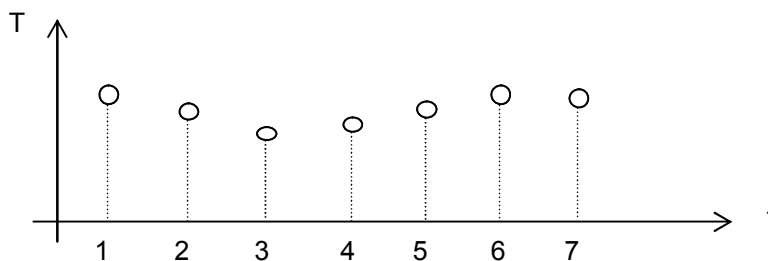


Figure 9- signal échantillonné

Le temps est en fait représenté par des instants, c'est à dire des valeurs discrètes t_1 , t_2 , et si ces instants sont régulièrement espacés ($t_k = k\Delta$ avec $k \in \mathbb{N}^*$), alors à tout k correspondra une valeur $T(k\Delta)$:

$$k \rightarrow T(k\Delta)$$

Un signal échantillonné est encore appelé signal à temps discret.

2.1.3 Signal numérique

Le passage du signal analogique au signal numérique s'effectue en deux temps :

- on échantillonne le signal analogique (on **discrétise l'échelle des temps**);
- on **discrétise** ensuite **l'échelle des valeurs** du signal, c'est à dire que cette échelle est divisée en intervalles auxquels on attribue une valeur numérique: c'est la notion de **quantification**.

L'exemple le plus courant est celui des signaux délivrés par un convertisseur analogique-numérique (voir cours d'électronique) et traités ensuite par un ordinateur. La courbe obtenue en joignant les points du signal numérique est appelée signal analogique reconstruit. Mais rien ne dit que celui-ci suive réellement le signal analogique initial. Il faut en avoir conscience et savoir estimer cette différence.

2.1.4 Signaux tests

Les signaux que nous allons étudier maintenant sont importants. En effet, en fonction des réponses des systèmes physiques à ces signaux, on peut modéliser ces systèmes. On appelle ces signaux "signaux-tests".

2.1.4.1 Rampe unité $r(t)$

Définition :

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ (causalité)} \\ t & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

La pente de la droite exprime la vitesse de variation de la grandeur r . C'est pour cela qu'on appelle souvent la rampe unitaire **échelon de vitesse**.

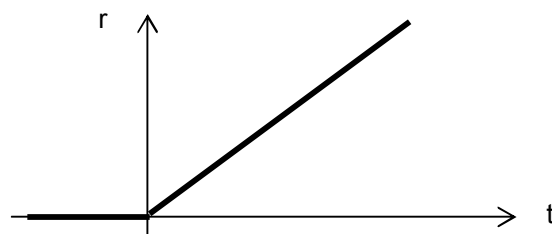


Figure 10- rampe unité

2.1.4.2 Echelon unité $u(t)$ ou fonction de Heaviside

Définition :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ (causalité)} \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$u(t)$ est donc la dérivée (discontinue à l'origine) de $r(t)$. Elle n'est pas définie à l'origine ($t=0$) ce que l'on transcrit par $u(0^-) = 0$ et $u(0^+) = 1$.

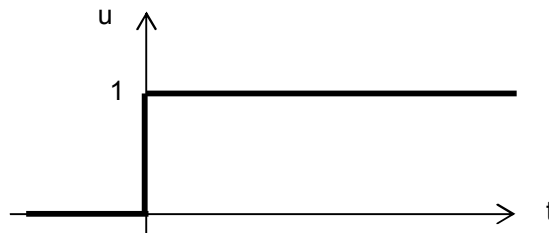


Figure 11- échelon unité

La représentation réelle de ce signal est l'application d'une tension à un circuit par l'intermédiaire d'un inverseur K.

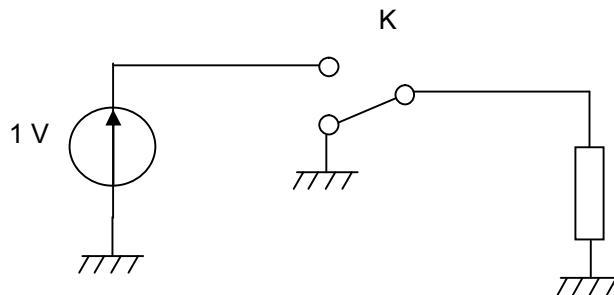


Figure 12- génération d'un échelon d'amplitude 1 V

L'interrupteur n'étant pas parfait, il existe un court instant Δ durant lequel la tension u n'a aucune valeur définie : elle subit une discontinuité.

2.1.4.3 Impulsion unité $\delta(t)$ ou distribution du Dirac

Afin d'introduire intuitivement cette fonction, revenons à la fonction précédente qui est discontinue pendant Δ et linéarisons là de cette manière :

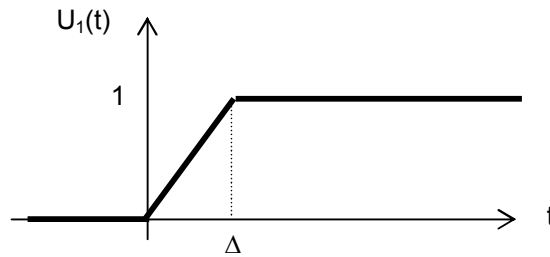


Figure 13- linéarisation de la discontinuité de l'échelon unité

Dérivons la fonction $u_1(t)$:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 0 \text{ pour } t \leq 0 \text{ et } t \geq \Delta \\ \frac{du_1}{dt} = \frac{1}{\Delta} \text{ pour } t \in]0, \Delta[\end{cases}$$

On obtient donc une impulsion $\delta_1(t)$ de largeur Δ et d'amplitude $\frac{1}{\Delta}$.

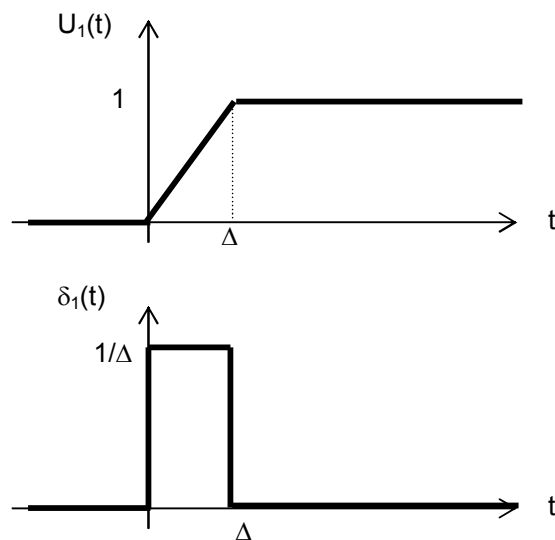


Figure 14- dérivée de $u_1(t)$

Cette impulsion a une aire égale à 1 quelque soit Δ . En effet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(t) dt = \int_0^{\Delta} \frac{1}{\Delta} dt = 1 \quad \forall \Delta$$

Si on fait tendre Δ vers 0, la largeur de cette impulsion tend vers 0 alors que son amplitude tend vers l'infini. A la limite, l'intégrale de cette fonction devrait être nulle, or elle ne l'est pas puisque le calcul effectué donne 1.

$\delta(t)$ n'est pas une fonction, mais une distribution.

La distribution de Dirac (souvent improprement appelé impulsion de Dirac) est qualifiée d'unitaire non pas à cause de son amplitude (qui tend vers l'infini!), mais parce que son aire (son poids) est égale à 1.

Une impulsion brève peut être approchée du point de vue de ses effets par une distribution de Dirac.

2.1.4.4 Signal harmonique ou sinusoïdal

Le signal harmonique est très employé en électronique et en automatique car il permet de déterminer la réponse en fréquence d'un système (réponse harmonique). Le signal harmonique a un caractère non causal, car déceler une avance ou un retard de phase $\Delta\varphi$ ne signifie rien à priori (on a $\pm \Delta\varphi$ à $2k\pi$ près).

2.1.5 Signaux d'entrée - Signaux de sortie

Tout système a besoin d'un certain nombre d'informations pour fonctionner, aussi simple soit-il. Il peut s'agir de l'information de mise en route (interrupteur), de la consigne de température (thermostat), etc... Inversement, par le biais d'un capteur, le processus indique son état (un four indique sa température interne, un moteur sa vitesse ou son couple, une chaudière sa pression, son niveau d'eau, sa température, ...).

Un système peut aussi être sensible à des événements extérieurs indépendants des informations qu'on lui a fournies. Prenons l'exemple d'une chaudière fournissant de la vapeur à un appareil propulsif de navire, aussi bien calorifugée soit-elle, il existe au niveau de l'enceinte des fuites thermiques (défauts d'isolation, ponts thermiques, etc...) d'autant plus importantes que la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur est grande. Les variations d'allure du navire sont aléatoires vis à vis de la chaudière, il est évident qu'une augmentation de vitesse entraînera une admission plus importante de vapeur dans la turbine et donc dans un premier temps une chute de température et de pression dans la chaudière.

Ces fuites, ces variations de vitesse constituent des **perturbations** qui ont un caractère aléatoire.

Dans ces conditions, tout système sera caractérisé par deux sortes de signaux

a) signaux d'entrée

Ce sont des grandeurs indépendantes du système mais qui agissent sur son état en tant que causes. On trouvera:

- les **signaux de commande** qui permettent d'agir sur le système et de le piloter vers un but spécifié,

- les **signaux de perturbations** subis par le système. Généralement, on ne pourra pas agir sur celles-ci car leur mode d'action sera difficile à identifier.

b) signaux de sortie

Ce sont les effets des grandeurs d'entrée que l'on peut observer généralement au moyen de capteurs.

Un système est dit **monovariante** s'il ne dispose que d'**une** entrée de commande et d'**une** sortie. Il est dit multivariable dans tous les autres cas. On ne s'intéressera dans la suite de ce cours qu'aux systèmes monovariants.

Tout système monovariant peut être représenté par son schéma fonctionnel.

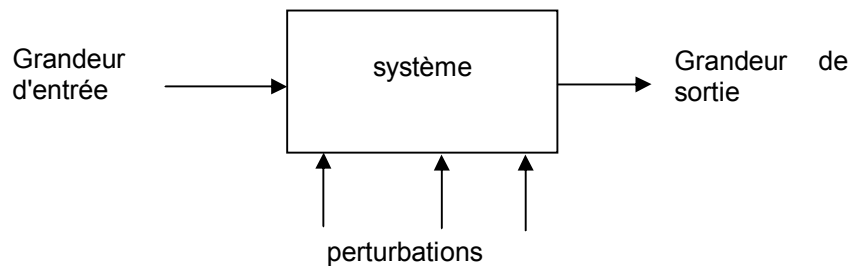


Figure 15- schéma fonctionnel d'un système monovariant

2.1.6 Systèmes monovariables

Les systèmes monovariables qui seront étudiés dans ce cours d'Automatique seront toujours **causaux** c'est à dire **non anticipatifs**. En particulier, si l'entrée est nulle pour $t < 0$, alors la sortie l'est aussi ou à la rigueur constante (un four, bien que non commandé, est toujours à température ambiante).

2.1.6.1 système instantané ou statique

Définition : Un système statique est un système dont la réponse à une excitation est instantanée.

Par exemple, une résistance pure R est un système statique car le courant qui la traverse suit la tension appliquée à ses bornes. Entrée et sortie sont liées par une relation simple :

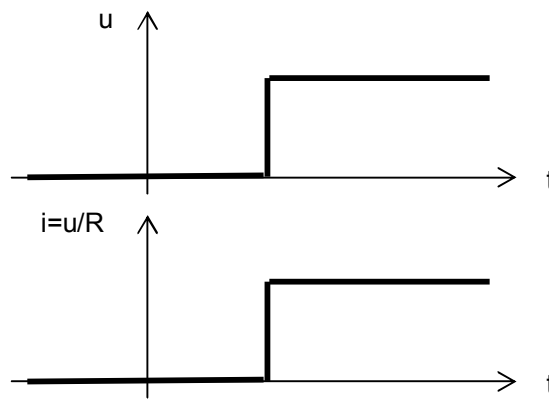


Figure 16- système statique

La relation mathématique qui lie entrée et sortie, $u = Ri$, est indépendante du temps. On dit encore qu'un système **statique n'a pas de mémoire**.

2.1.6.2 Système dynamique ou à mémoire

Définition : Un système dynamique est un système dont la réponse à une excitation dépend à la fois de celle-ci et de ce qui s'est passé avant.

Considérons le circuit intégrateur ci-dessous :

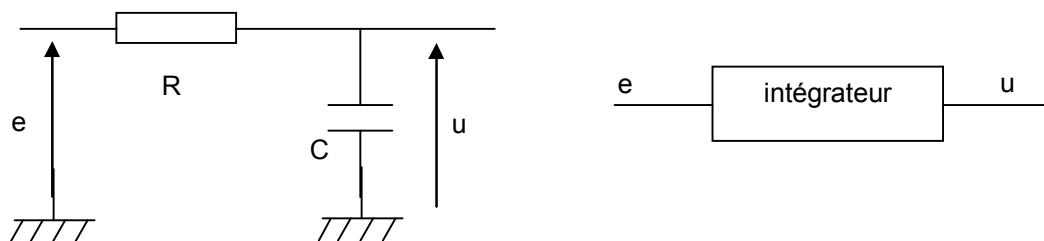


Figure 17- circuit intégrateur

Où $e = RC \frac{du}{dt} + u$. La relation liant u et e est cette fois plus complexe puisque u dépend de e mais aussi d'elle-même (dérivée $\frac{du}{dt}$). C'est la caractéristique d'un système dynamique ou encore à mémoire. Comme nous le verrons par la suite, beaucoup de systèmes sont dynamiques (moteur, thermomètre, four, etc...).

2.1.6.3 Système continu - Système échantillonné

Un système est dit continu si tous les signaux d'entrée, intermédiaires et de sortie observables sont des fonctions continues du temps. Ainsi une équation différentielle, telle que celle vue au paragraphe précédent, décrit un système dynamique continu.

Inversement, si en un endroit au moins de la chaîne des éléments le constituant, le signal n'est transmis qu'à des instants discrets privilégiés, le système sera dit échantillonné. Celui-ci est alors observable aux moments d'échantillonnage. Les équations récurrentes, comme celles qui suivent, caractérisent des systèmes échantillonnés :

- $s(k) = a.e(k)$ pour un système instantané,
 - $s(k) + a.s(k - 1) = b.e(k)$ pour un système dynamique.
- Les systèmes échantillonnés font l'objet du cours d'automatique de 3^e année.

2.1.6.4 Système invariant

Un système est dit invariant si ses caractéristiques sont indépendantes du temps. En d'autres termes, un système invariant est un système qui **"ne vieillit pas"**. C'est toujours le cas en première approximation, mais en fait, ça ne l'est jamais. Un composant électronique, par exemple, voit ses caractéristiques se modifier avec le temps. Une fusée dont la masse évolue rapidement au cours du vol est un exemple de système non invariant.

2.1.6.5 Système linéaire

Définition : Un système linéaire obéit **au principe de superposition** défini par les propriétés d'additivité et d'homogénéité.

- **additivité** : Si les entrées $e_1(t)$, $e_2(t)$, ..., $e_n(t)$ entraînent respectivement les réponses $S_1(t)$, $S_2(t)$, ..., $S_n(t)$ alors l'entrée $e_1(t) + e_2(t) + \dots + e_n(t)$ entraîne la réponse $S_1(t) + S_2(t) + \dots + S_n(t)$
- **homogénéité** : Si l'entrée $e(t)$ est multipliée par un facteur k constant, alors la sortie $s(t)$ est multipliée par ce même facteur. On dit qu'il y a proportionnalité de l'effet à la cause.

Cette définition peut être étendue à des termes intégraux ou dérivés, donc aux systèmes dynamiques :

Un système dynamique linéaire est un système qui peut être décrit par une équation différentielle à coefficients constants.

2.1.6.6 Non linéarité des systèmes physiques

En réalité, les systèmes physiques réels ne sont pas continus (du point de vue microscopique), pas invariants (les composants vieillissent) et pas linéaires. Les non linéarités rencontrées couramment sont données ci-dessous :

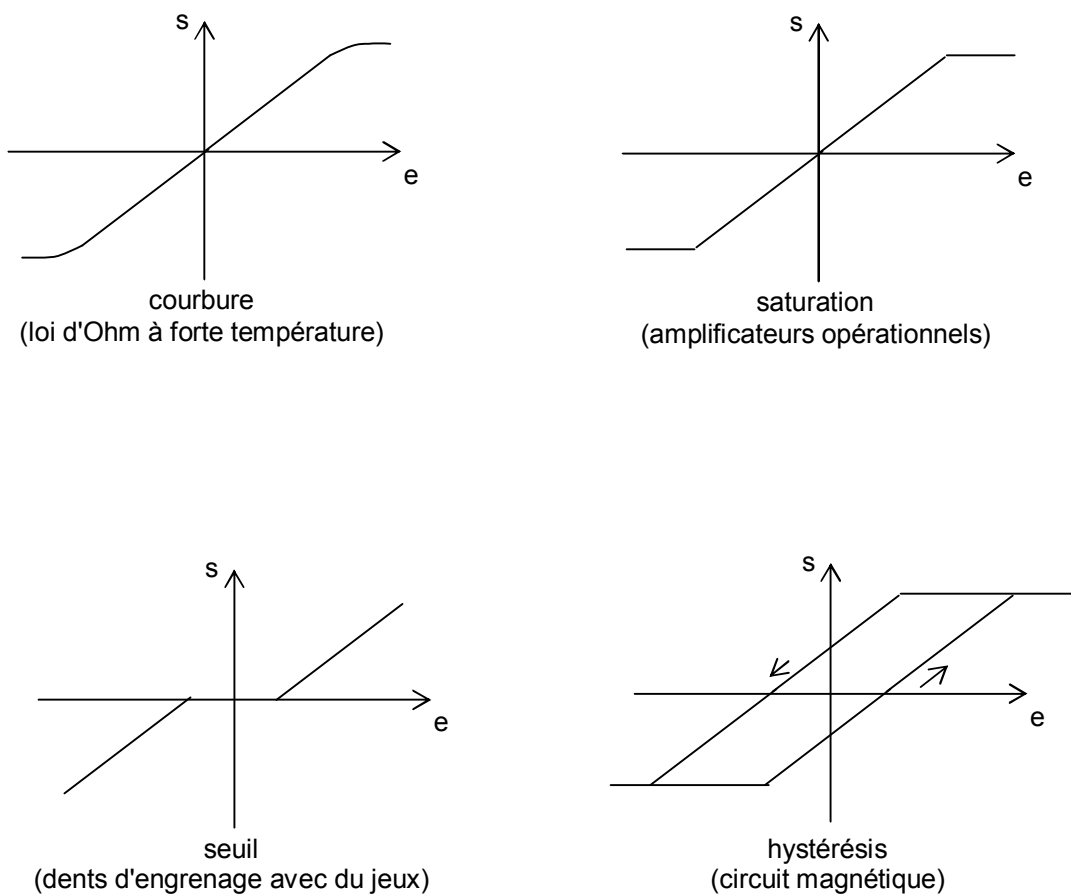


Figure 18- non linéarités courantes

2.1.7 Linéarisation d'un système

Considérons la commande d'un moteur à courant continu à excitation indépendante par un amplificateur et examinons la caractéristique vitesse-tension de commande.

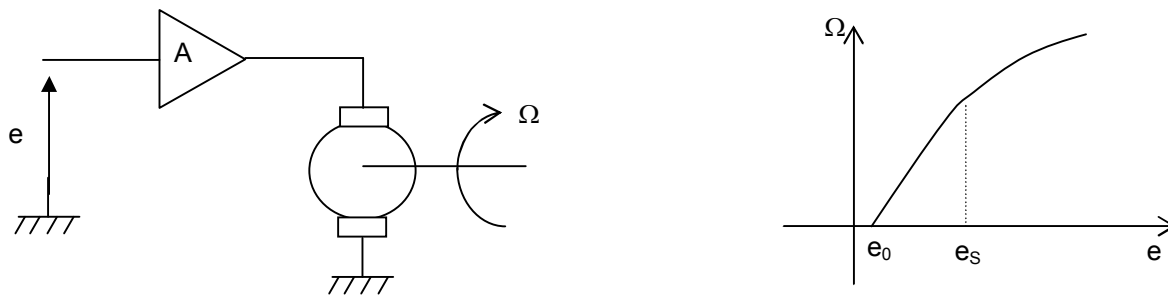


Figure 19- commande d'un moteur à courant continu.

Quand $e < e_0$ le moteur ne tourne pas car le couple de frottement est trop important. Passé le seuil e_0 , le couple électromagnétique est suffisant pour vaincre les frottements, le moteur démarre et sa vitesse croît linéairement avec e . Lorsque $e > e_s$, l'amplificateur se sature donc la vitesse n'augmente plus linéairement. La caractéristique obtenue n'est pas linéaire.

Mathématiquement, l'étude d'un tel système est difficile sauf si on travaille sur une zone linéaire. Pour cela, on va choisir un point de fonctionnement M (ou point de repos) situé le plus souvent au milieu de la partie linéaire de la caractéristique et nous allons travailler autour de ce point, ce qui revient à faire un changement d'origine.

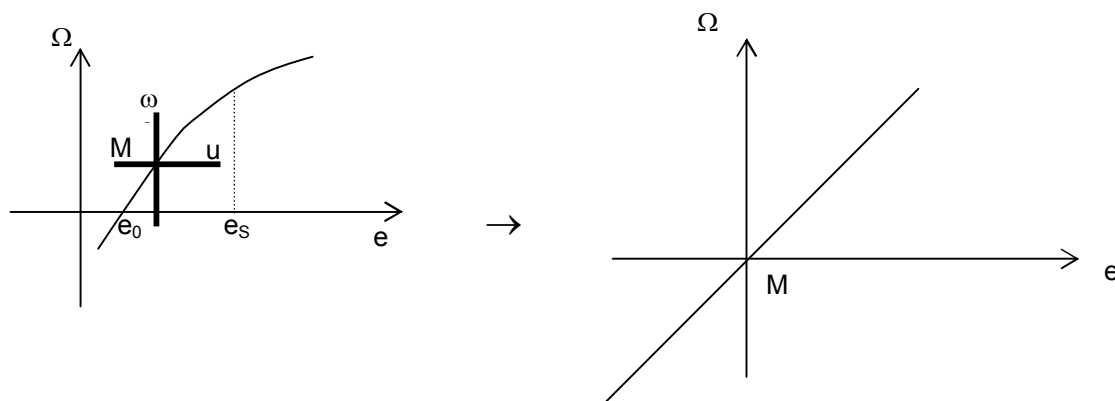


Figure 20- point de fonctionnement et changement d'origine

On pose $\omega = \Omega - \Omega_M$ et $u = e - e_M$. Il est alors possible d'étudier les variations ω de la vitesse en fonction des variations u de l'entrée. La caractéristique $\omega = f(u)$ est une droite passant par le point de fonctionnement M . Sa pente est appelée gain statique du système linéaire. C'est aussi la pente de la tangente en M à la caractéristique réelle $\Omega = f(e)$.

Dans ces conditions, hormis les systèmes présentant des non linéarités essentielles (plus ou moins par exemple), tous les systèmes usuels sont linéarisables autour de leur point de fonctionnement.

2.2 Outils mathématiques nécessaires

Tous les systèmes que nous étudierons dans ce cours seront donc considérés comme causaux, linéaires et invariants. La plupart seront dynamiques, donc pourront être décrits par une équation différentielle. L'excitation de ces systèmes s'effectuera grâce aux signaux-tests décrits au paragraphe 2.1. Les systèmes vont déformer ces signaux et l'obtention des signaux de sortie demandera systématiquement la résolution de l'équation différentielle, résolution facile pour les équations du premier ordre, plus compliquée lorsque l'ordre s'élève. Trois méthodes simples permettent d'obtenir très rapidement les solutions : elles font toutes les trois appel à la représentation fréquentielle des signaux. Ce sont

- La **transformation cissoïdale C** qui est réservée aux signaux sinusoïdaux et qui se rapproche de la représentation de Fresnel.
- La transformation de **Laplace L** qui inclue les signaux quelconques et qui s'applique aux systèmes linéaires continus.
- La **transformation en Z**, parente de la transformation de Laplace, mais qui convient mieux aux systèmes linéaires échantillonnés (programme de 3^e année).

2.2.1 Transformée cissoïdale

Cet outil est très connu de tous les habitués des calculs sur les courants alternatifs à l'aide des nombres complexes.

Définition : Soit $x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi)$ une fonction sinusoïdale du temps. On appelle transformée cissoïdale de $x(t)$ le nombre complexe \underline{X} tel que :

$$\underline{X} = C[x(t)] = X_M \cdot e^{j\varphi} \text{ avec } -\pi < \varphi < \pi$$

X_M , module du nombre complexe est bien sûr l'amplitude maximum de $x(t)$, alors que l'argument φ est la phase à l'origine de $x(t)$.

Exemples :

$$v(t) = 220 \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \underline{V} = 220 \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$i(t) = 20 \cos(\omega t) \rightarrow \underline{I} = 20 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Propriétés

Linéarité : si $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions sinusoïdales du temps, alors :

$$C\{a[x(t)]\} = a C[x(t)] \text{ avec } a = \text{constante}$$

$$C[ax(t) + by(t)] = aC[x(t)] + bC[y(t)] \text{ } a \text{ et } b = \text{constantes}$$

Transformée cissoïdale de la dérivée :

Soit $x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi)$ une fonction sinusoïdale du temps. Alors :

$$\frac{dx}{dt} = X_M \omega \cos(\omega t + \varphi) = X_M \omega \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

dont la transformée est $\underline{X} = X_M \cdot \omega \cdot e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = j \omega X_M e^{j\varphi}$ donc :

$$\boxed{C\left[\frac{dx}{dt}\right] = j \omega \underline{X}}$$

Transformée cissoïdale de l'intégrale :

De la même manière que ci-dessus :

$$\int x \, dt = -\frac{X_M}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{X_M}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \underline{X} = -\frac{X_M}{\omega} e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = -j \frac{X_M}{\omega} e^{j\varphi} = \frac{X_M}{j\omega} e^{j\varphi}$$

d'où :

$$\boxed{C\left[\int x \, dt\right] = \frac{\underline{X}}{j\omega}}$$

Théorème du retard :

Soit les fonctions causales $x_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ X_M \sin(\omega t) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$ et $x_2(t) = x_1(t - T)$ où

$x_2(t)$ est la fonction $x_1(t)$ retardée d'un temps T .

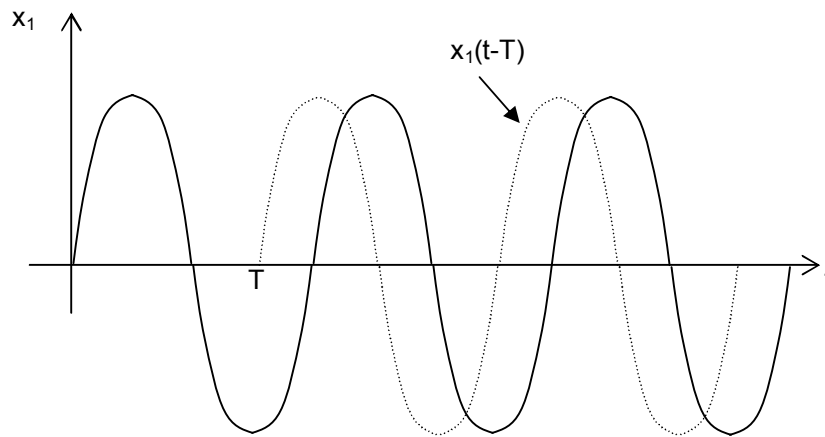


Figure 21- fonction retardée

Ecrivons les transformées respectives de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$:

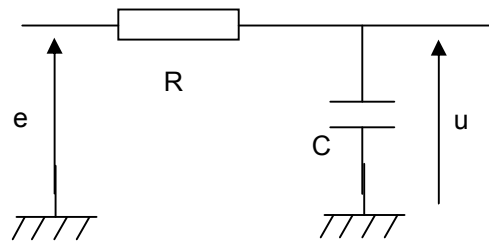
$$\underline{X}_1 = X_M \quad \text{donc} \quad \boxed{\underline{X}_2 = \underline{X}_1 e^{-j\omega T}}, \text{ un retard est un déphasage pur.}$$
$$\underline{X}_2 = X_M e^{-j\omega T}$$

La transformée cissoïdale permet d'entrer dans un monde où les opérations de dérivations et d'intégration deviennent des opérations purement algébriques, c'est à dire respectivement multiplication par $j\omega$ et division par $j\omega$. Mais ceci ne vaut que pour

des fonctions sinusoïdales, la transformation de Laplace permet d'étendre un tel mécanisme à n'importe quelle fonction.

Application :

Considérons le circuit RC vu précédemment :



Si $e(t) = E \sin(\omega t)$, on peut obtenir rapidement la tension instantanée aux bornes du condensateur. La transformée cissoïdale de l'équation différentielle s'écrit :

$$e(t) = Ri(t) + u(t) \text{ et } u(t) = \frac{1}{C} \int i dt \text{ d'où } i(t) = C \frac{du}{dt} \text{ en remplaçant } i(t), \text{ il vient :}$$

$$RC \frac{du}{dt} + u(t) = e(t) \rightarrow RCj\omega \underline{U} + \underline{U} = \underline{E} \Rightarrow \underline{U} = \frac{\underline{E}}{1 + jRC\omega}$$

L'amplitude maximum de la tension aux bornes du condensateur est donc

$U_{\max} = \frac{E}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$. Cette tension est déphasée de $\varphi = -\arctan(RC\omega)$ par rapport à la tension $e(t)$.

2.2.2 Transformée de Laplace

C'est l'outil par excellence des asservissements linéaires continus.

I. Définition : Soit $f(t)$ une fonction du temps, définie pour $t > 0$ et nulle pour $t < 0$. Soit p une variable complexe. On appelle transformée de Laplace de $f(t)$, la fonction de la variable complexe notée $F(p)$ telle que :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

L'existence de $F(p)$ suppose bien entendu que l'intégrale converge. Cette transformation est bijective; $f(t)$ est dite transformée inverse ou originale de $F(p)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$$

Exemple : calcul de la transformée de $f(t) = e^{-at}$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t} dt = -\frac{1}{p+a} \left[e^{-(p+a)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p+a}$$

II. Propriétés

II. 1 Linéarité

Si $f(t)$ et $g(t)$ ont des transformées de Laplace, alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[a f(t)] &= a F(p) \\ \mathcal{L}[a f(t) + b g(t)] &= a F(p) + b G(p) \end{aligned}$$

II. 2 Transformée de Laplace de la dérivée

Intégrons $F(p)$ par partie. On a $d(uv) = u dv + v du$. Posons $dv = e^{-pt}$ et $u = f(t)$. Il vient dans ces conditions $v = -\frac{1}{p} e^{-pt}$ et $du = f'(t)$. Donc :

$$F(p) = \int_0^{\infty} u dv = [uv]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v du = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} f(t) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{p} e^{-pt} f'(t) dt$$

Admettant que $f(t)$ possède une limite finie lorsque $t \rightarrow \infty$ (ce qui est toujours le cas avec les signaux utilisés en automatique), on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{p} e^{-pt} f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{p} e^{-pt} f(t) = \frac{f(0^+)}{p}$$

$$\text{d'où : } F(p) = \frac{1}{p} f(0^+) - \int_0^{\infty} \frac{1}{p} e^{-pt} f'(t) dt = \frac{1}{p} f(0^+) + \frac{1}{p} \mathcal{L}[f'(t)]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$$

On montre de la même manière que :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

par récurrence :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Les $f^{(n)}(0)$ représentent les conditions initiales.

II. 3 Transformée de Laplace de l'intégrale

Soit $g(t) = \int_0^t f(x) dx$. Calculons $G(p)$ en fonction de $F(p)$:

$$g'(t) = f(t) \text{ donc } \mathcal{L}[g'] = \mathcal{L}[f(t)] = F(p)$$

$$\mathcal{L}[g'] = p G(p) - g(0)$$

d'où :

$$\mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] = G(p) = \frac{1}{p} F(p) + \frac{1}{p} g(0)$$

II. 4 Changement d'échelle :

un changement de l'échelle de temps se traduit par le changement de la variable t par kt dans la fonction $f(t)$ posons : $u=kt \rightarrow t=u/k$

$$\mathcal{L}[f(kt)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(kt) dt = k^{-1} \int_0^{\infty} e^{-p u/k} f(u) du$$

$$F(p) = \mathcal{L}[f(kt)] = k^{-1} F\left[\frac{p}{k}\right]$$

II. Théorèmes Relatifs à la transformation de Laplace

III. 1 Théorème du retard : soit une fonction $f(t)$, nulle pour $t < 0$ et admettant une transformée le Laplace. Retardons cette fonction d'un temps T . Si $t < T$,

Alors $f(t - T) = 0$. On a par définition $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$. Multiplions les deux membres

de cette équation par e^{-pT} :

$$e^{-pT} F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-pT} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-p(t+T)} f(t) dt$$

Effectuons le changement de variable $u = t + T$, donc $du = dt$, il vient :

$$e^{-pT} F(p) = \int_T^{\infty} e^{-pu} f(u - T) du = \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u - T) du$$

La borne basse de l'intégrale est égale à T après changement de variable, mais peut se transformer en 0 puisque $f(t - T)$ est nulle pour $0 < t < T$. Ainsi :

$$\mathcal{L}[f(t - T)] = e^{-pT} F(p)$$

III. 2 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale :

Ces théorèmes sont un corollaire de la propriété :

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = -f(0^+) + pF(p)$$

Théorème de la valeur initiale : si $p \rightarrow +\infty$, alors l'intégrale du premier membre tend vers 0 à cause de e^{-pt} . Donc :

$$f(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

Théorème de la valeur finale : si $p \rightarrow 0$, on a alors :

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt \rightarrow \int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^+)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

IV Opérations dans le domaine complexe

IV 1 : Translation : Soit (a) un nombre complexe à partie réelle positive.

Calculons l'originale de $F(p+a)$ connaissant :

$$F(p + a) = \mathcal{L}[e^{-at} f(t)]$$

Dérivation dans le domaine complexe

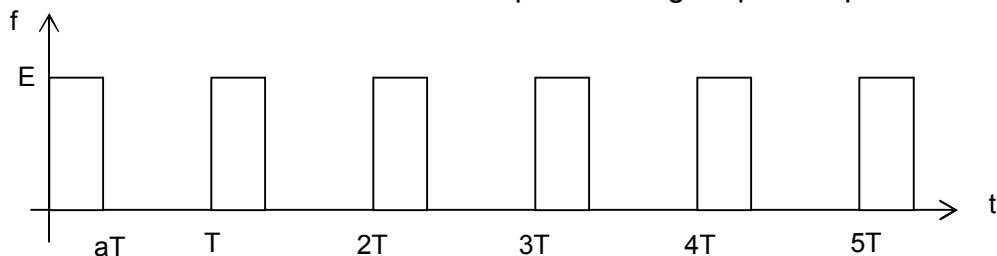
$$\frac{d}{dp} F(p) = -\mathcal{L}[t.f(t)]$$

Intégration dans le domaine complexe

Le tableau ci-dessous donne les transformées de Laplace couramment utilisées en automatique :

f(t) pour t>0	F(p)
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
t. e^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
cos(ωt)	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
sin(ωt)	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
A. $e^{-at} \cdot \cos(\omega t + \Phi)$ avec $\begin{cases} A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + (\beta - a \alpha)^2} \\ \Phi = -\arctan \frac{\beta - a \alpha}{\alpha \omega} \end{cases}$	$\frac{\alpha p + \beta}{(p+a)^2 + \omega^2}$

application : calculer la transformée de Laplace du signal périodique suivant :



Ce signal est composé d'impulsions retardées les unes par rapport aux autres de T. L'impulsion élémentaire $f_1(t)$ de largeur aT commençant à $t = 0$ est elle-même l'association de deux signaux : $f_1(t) = E \times u(t) - E \times u(t - aT)$ où $u(t)$ est la fonction

échelon unité. Ainsi : $F_1(p) = \frac{E}{p} (1 - e^{-aTp})$.

D'autre part, on peut écrire que :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots = f_1(t) + f_1(t-T) + f_1(t-2T) + f_1(t-3T) + \dots$$

La transformée de Laplace étant linéaire, on a de même :

$$F(p) = F_1(p) + F_2(p) + F_3(p) + \dots = F_1(p) [1 + e^{-Tp} + e^{-2Tp} + e^{-3Tp} + \dots] = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-Tp}} = \frac{E(1 - e^{-aTp})}{p(1 - e^{-Tp})}$$

On rappelle que : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots$

Application :

Nous considérerons le cas où $F(p)$ est une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est inférieur ou égal à celui du dénominateur.

Méthode générale : on recherche les zéros z_n (racines du numérateur) et les pôles p_n (racines du dénominateur) de manière à écrire $F(p)$ sous la forme :

$$F(p) = \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots}{(p - p_1)(p - p_2) \dots}$$

On décompose ensuite la fraction en éléments simples :

$$F(p) = \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2} + \dots$$

où A et B sont des constantes. On obtient alors des expressions simples dont on peut trouver les originaux grâce au tableau ci-dessus. On peut alors exprimer l'originale $f(t)$.

Cas où les pôles sont simples : le dénominateur s'écrit sous la forme $\prod_{i=1}^n (p - p_i)^\alpha$ avec $\alpha = 1$.

Exemple : Soit $F(p) = \frac{p+1}{p^2+5p+6}$ dont on désire trouver l'originale. On cherche les

pôles de $F(p)$, soit $p_1 = -2$ et $p_2 = -3$ et donc $F(p) = \frac{p+1}{(p+2)(p+3)}$.

$F(p)$ se décompose en :

$$\frac{p+1}{(p+2)(p+3)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+3}$$

pour obtenir A, on multiplie les 2 membres de l'équation par $(p+2)$, puis on fait $p = -2$
pour obtenir B, on multiplie les 2 membres de l'équation par $(p+3)$, puis on fait $p = -3$

On obtient $A = -1$ et $B = 2$ d'où $F(p) = \frac{-1}{p+2} + \frac{2}{p+3}$ en se reportant à la table des transformées, il vient :

$$f(t) = -e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

Cas où les pôles sont multiples : Le dénominateur s'écrit sous la forme $\prod_{i=1}^{n-\alpha} (p - p_i)^\alpha (p - p_i)$ avec $\alpha \neq 1$. On écrit alors $F(p)$ sous la forme :

$$F(p) = \frac{A}{(p - p_1)^\alpha} + \frac{B}{(p - p_1)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{G}{(p - p_1)} + \frac{H}{p - p_2} + \frac{I}{p - p_3} + \dots$$

Exemple : trouver l'originale de $F(p) = \frac{p+1}{p(p+2)^2}$

$F(p)$ se décompose sous la forme $F(p) = \frac{p+1}{p(p+2)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p+2)} + \frac{C}{(p+2)^2}$

Pour obtenir A, on multiplie par p et on fait $p = 0$,

Pour obtenir B, on multiplie par $(p+2)^2$ et on fait $p = -2$,
 Pour obtenir C, on multiplie par $p+2$ et on fait $p \rightarrow \infty$.
 On obtient : $A = 0,25$, $B = 0,5$, $C = -0,25$

$$\text{Donc } F(p) = \frac{0,25}{p} + \frac{0,5}{(p+2)^2} - \frac{0,25}{p+2} \rightarrow f(t) = 0,25 + 0,5t e^{-2t} - 0,25 e^{-2t}$$

Cas où les pôles sont réels et complexes :

Le dénominateur s'écrit sous la forme : $\prod_{i=1}^k (p + p_i) \prod_{j=1}^i (1 + a_j p + b_j p^2)$.

Les trinômes du second degré admettant deux racines complexes conjuguées, la méthode consiste à les écrire ainsi : $(p + a)^2 + \omega^2$. La décomposition de $F(p)$ donnera alors un terme en $\frac{\alpha p + \beta}{(p + a)^2 + \omega^2}$.

Exemple : soit à trouver l'originale de $F(p) = \frac{p+1}{p(p^2 + p + 2)}$ $F(p)$ se décompose en

$$\frac{p+1}{p(p^2 + p + 2)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{(p^2 + p + 2)}$$

pour obtenir A, on multiplie par p et on fait $p = 0$,
 pour obtenir B, on multiplie par p et on fait $p \rightarrow \infty$,
 pour obtenir c, on on peut prendre une valeur particulière de p : ici $p = -1$,
 On obtient $A = 0,5$, $B = -0,5$, $C = 0,5$, par suite :

$$F(p) = 0,5 \left[\frac{1}{p} + \frac{-p+1}{p^2 + p + 2} \right] = 0,5 \left[\frac{1}{p} + \frac{-p+1}{(p+0,5)^2 + 1,75} \right] \rightarrow f(t) = 0,5 [1 + 1,51 e^{-0,5t} \cos(1,32t + 48^\circ 6)]$$

2.2.3 Exercices sur les transformées de Laplace :

Transformées de Laplace :

Trouver l'original de $F(p) = \frac{p+1}{p(p+2)^2}$, $F(p)$ se décompose sous la forme :

$$\frac{p+1}{p(p+2)^2} = \frac{a}{p} + \frac{b}{(p+2)^2} + \frac{c}{p+2} ; \text{ pour obtenir a, on multiplie par } p \text{ et on fait } p = 0,$$

pour obtenir b, on multiplie par $(p+2)^2$ et on fait $p = -2$; enfin, pour obtenir c, on multiplie par $p+2$ et on fait tendre p vers l'infini.

$$\text{D'où : } F(p) = \frac{0,25}{p} + \frac{0,5}{(p+2)^2} - \frac{0,25}{p+2} \Rightarrow f(t) = 0,25 + 0,5t e^{-2t} - 0,25 e^{-2t}$$

Trouver l'original de $F(p) = \frac{p+1}{p(p^2 + p + 2)}$

$$\frac{p+1}{p(p^2 + p + 2)} = \frac{a}{p} + \frac{bp + c}{(p^2 + p + 2)} \text{ pour obtenir a, on multiplie par } p \text{ et on fait } p = 0 ;$$

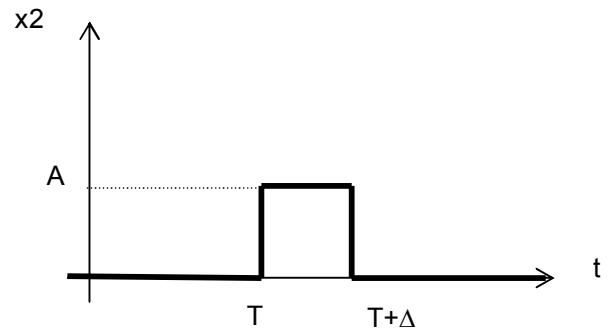
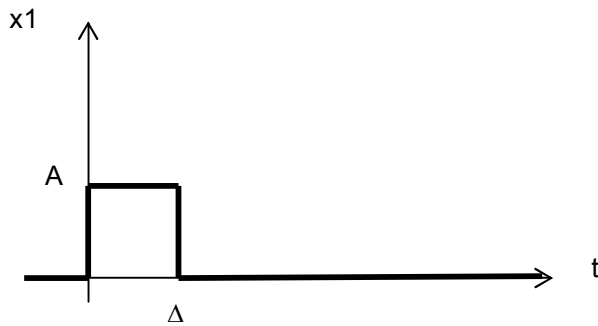
pour obtenir b, on multiplie par p et on fait $p \rightarrow \infty$; pour obtenir c, on peut prendre une valeur particulière de p (p = -1).

On obtient a = 0,5 ; b = -0,5 ; et c = 0,5

Réponse : $f(t) = 0,5 (1 + 1,51 e^{-0,5t} \cos(1,32t + 48^\circ,6))$

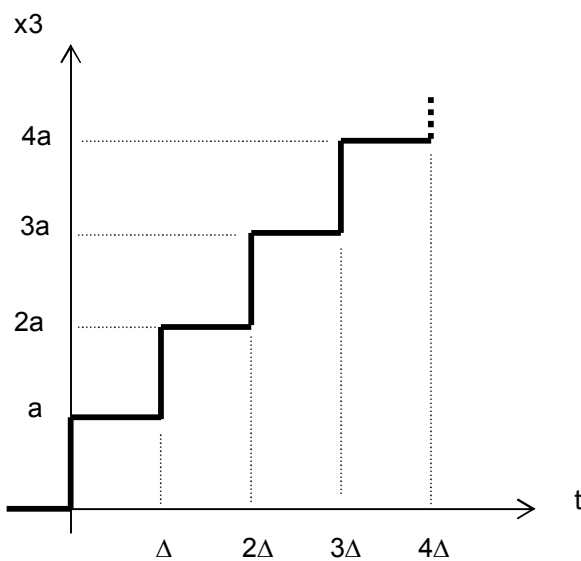
Signaux :

Exprimer les signaux suivants en fonction des signaux tests, déterminer leur transformée de Laplace :

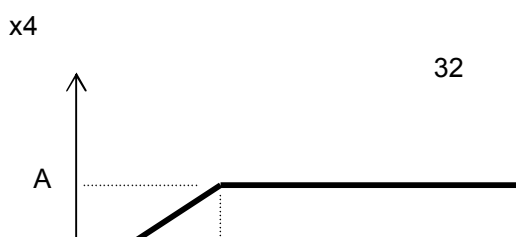


$$x_1(t) = A u(t) - A u(t - T) ; X_1(p) = \frac{A(1 - e^{-\Delta p})}{p}$$

$$x_2(t) = A [u(t - T) - u(t - T - \Delta)] ; X_2(p) = X_1(p) \cdot e^{-Tp}$$

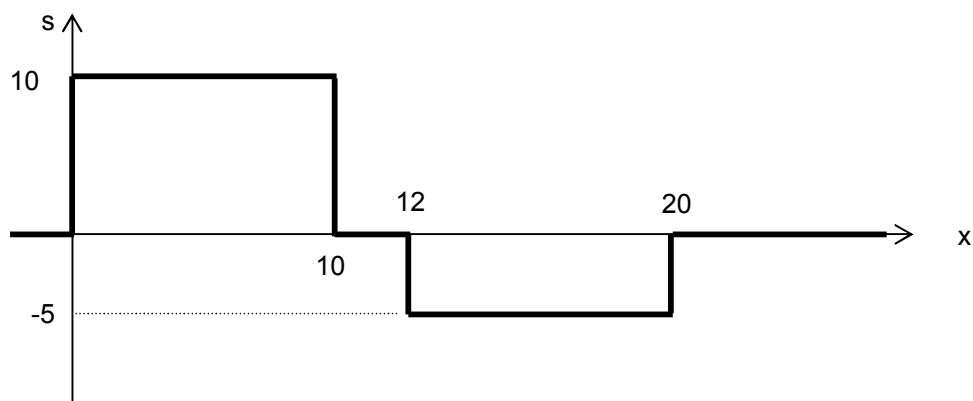


$$x_3 = a \sum_{k=0}^n u(t - k\Delta) ; X_3(p) = \frac{a}{p(1 - e^{-\Delta p})}$$

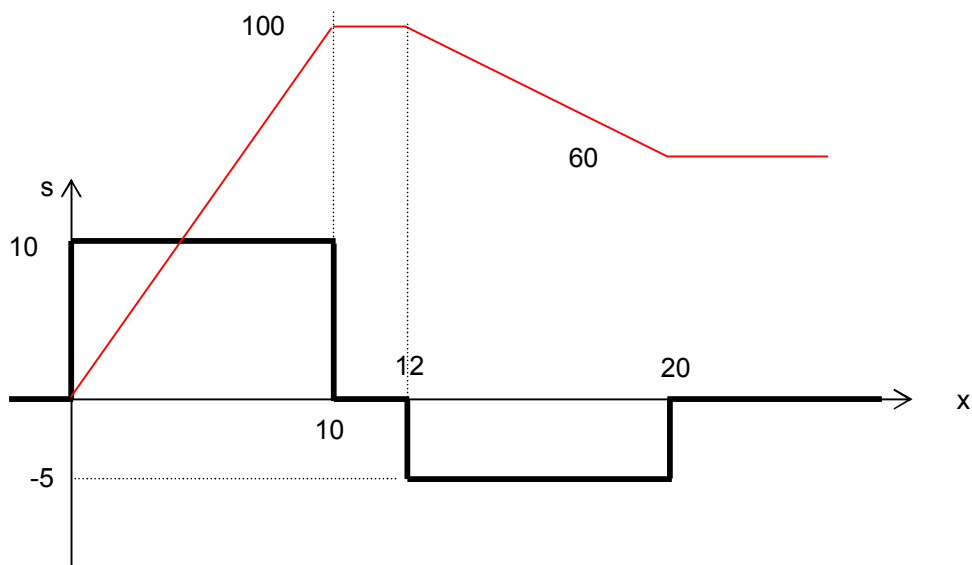


$$x_4(t) = \frac{A}{\Delta} r(t) - \frac{A}{\Delta} r(t - \Delta) ; X_4(p) = \frac{A}{\Delta} \cdot \frac{1}{p^2} (1 - e^{-\Delta p})$$

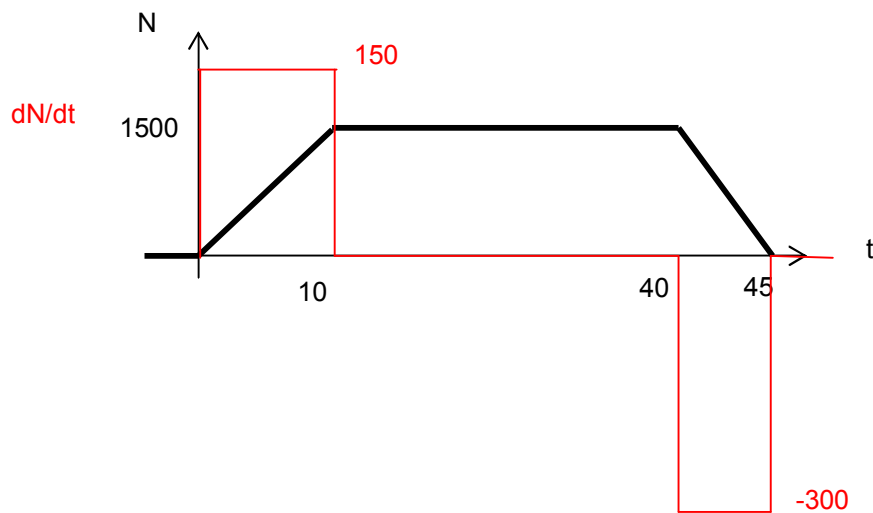
Soit le signal analogique :



Représenter le signal m défini par : $m(t) = \int_{-\infty}^t s(x) dx$ pour $t = 0, 10, 12, +\infty$



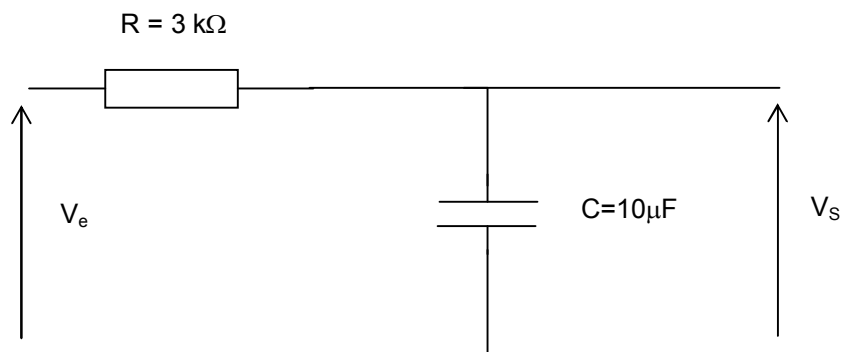
La vitesse d'un moteur doit suivre l'évolution ci-dessous, dessiner puis exprimer $\frac{dN}{dt}$



$$\frac{dN}{dt} = 150u(t) - 150u(t-10) - 300u(t-40) + 300u(t-45)$$

$$N(p) = \frac{150}{p^2} (1 - e^{-10p} - 2e^{-40p} + 2e^{-45p}) ; N'(p) = p N(p)$$

Soit le circuit RC :



Le condensateur étant initialement déchargé, déterminer $v_s(t)$ par Laplace, même question avec un condensateur initialement chargé à 3 V.

Modélisation des systèmes dynamiques linéaires continus et Fonction de transfert

2.3 modélisation des systèmes dynamiques linéaires continus

Pour connaître le comportement d'un système dynamique afin d'en effectuer ensuite la commande et le réglage, il est important de connaître les relations qui existent entre les grandeurs d'entrée et les grandeurs de sortie.

L'ensemble de ces relations constitue le **modèle mathématique** du système. On peut distinguer deux sortes de modèle :

- **le modèle de connaissance** : c'est le modèle du physicien qui est obtenu en écrivant toutes les équations différentielles qui régissent le fonctionnement du système. C'est donc le modèle idéal, mais, le plus souvent, très difficile à obtenir. Par contre, tous les paramètres physiques y apparaissent explicitement.
- **le modèle de commande** : c'est le modèle de l'ingénieur automaticien qui n'est, en fait, qu'un modèle approché plus simple, mais suffisant pour donner une bonne idée du comportement dynamique du système.

Très souvent, lorsqu'on ne saura pas écrire les équations différentielles, on cherchera un modèle de commande à l'issue d'une étude expérimentale.

2.3.1 comportement d'un système dynamique

On représente classiquement le comportement d'un système dynamique linéaire continu monovarié par une équation différentielle à coefficients constants :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_i \frac{d^i s}{dt^i} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_0 e + b_1 \frac{de}{dt} + b_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + b_3 \frac{d^3 e}{dt^3} + \dots + b_m \frac{d^m e}{dt^m} \quad (1)$$

La réalisation physique impose d'avoir $m \leq n$; n s'appelle **ordre du système**. La solution générale d'une équation différentielle est obtenue en faisant la somme :

- de la solution générale $s_1(t)$ de l'équation sans second membre (ESSM)
- et d'une solution particulière $s_2(t)$ de l'équation avec second membre (EASM)

ce qui se traduit par $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$. C'est bien l'application du théorème de superposition.

2.3.2 solution de l'e.s.s.m

La solution de l'E.S.S.M. correspond au régime libre, c'est-à-dire au régime pris par le système abandonné à lui-même. Pour trouver cette solution, on calcule les racines de l'équation caractéristique : $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$ (2)

Pourquoi cela ??? Voici quelques éléments de réponse :

Théorème de Schwartz : la solution de l'équation :

$$\begin{cases} a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_i \frac{d^i s}{dt^i} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = 0 \\ \text{conditions initiales } s(0^+) = \dot{s}(0^+) = \ddot{s}(0^+) = \dots, \text{ mais } s^{(n-1)}(0^+) = b_0 \end{cases}$$

est identique à celle de :

$$\begin{cases} a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_i \frac{d^i s}{dt^i} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_0 \delta \\ \text{conditions nulle à } t = 0^- \end{cases} \text{ avec } \delta(t) \text{ distribution de Dirac}$$

Autrement dit, le régime forcé par une impulsion de poids b_0 , d'un système partant du repos, est le même que le régime libre du système partant d'un jeu de conditions initiales $(0, 0, 0, \dots, b_0)$ à l'instant 0^+ . Cela signifie, par exemple, qu'un pendule partant du repos (en $t = 0^-$) auquel on communique un choc bref et un pendule ayant une vitesse initiale b_0 au point bas en $t = 0^+$ (pendule lâché) auront exactement le même mouvement pour $t > 0$.

Ainsi, en prenant la transformée de Laplace de

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_i \frac{d^i s}{dt^i} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_0 \delta \text{ avec } b_0 = 1$$

On obtient $a_n p^n S(p) + \dots + a_i p^i S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = 1$

$$\text{Soit : } S(p) = \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_i p^i + \dots + a_1 p + a_0}$$

Afin d'obtenir $s(t)$, il faut prendre l'inverse de la transformée de Laplace de $S(p)$. D'où la nécessité de réduire $S(p)$ en éléments simples. Et d'où l'apparition de l'équation caractéristique où p est remplacé par r .

Comme les a_i sont réels, les racines r_i ne peuvent être que réelles ou complexes conjuguées. En écrivant (2) sous la forme :

$$a_n \left(r^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} r^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} r + \frac{a_0}{a_n} \right) = 0$$

et en appelant r_i la $i^{\text{ème}}$ racine, (2) peut encore s'écrire :

$$a_n \cdot \prod_{i=1}^n (r - r_i) = 0$$

La solution de l'ESSM s'écrit alors $s_1(t) = K_1 \cdot e^{r_1 t} + K_2 \cdot e^{r_2 t} + \dots + K_n \cdot e^{r_n t}$ où les K_i sont les constantes d'intégration.

- Si r_i est réelle, alors le terme $K_i \cdot e^{r_i t}$ est laissé tel quel.
- Si r_i est complexe, alors il existe une autre racine r_{i+1} complexe conjuguée de r_i , car le produit $(r - r_i)(r - r_{i+1})$ doit redonner un trinôme à coefficients réels. Si l'on pose :

$$\begin{cases} r_i = b_i + j\omega_i \\ r_{i+1} = b_i - j\omega_i \end{cases}$$

Ces deux racines correspondent dans la solution $s_1(t)$ à

$$\begin{aligned} K_i \cdot e^{(b_i + j\omega_i)t} + K_{i+1} \cdot e^{(b_i - j\omega_i)t} &= K_i \cdot e^{b_i t} \cdot (\cos \omega_i t + j \sin \omega_i t) + K_{i+1} \cdot e^{b_i t} \cdot (\cos \omega_i t - j \sin \omega_i t) \\ &= e^{b_i t} \cdot [(K_i + K_{i+1}) \cdot \cos \omega_i t + j(K_i - K_{i+1}) \cdot \sin \omega_i t] \quad (3) \end{aligned}$$

Or $s_1(t)$ est une grandeur physique, donc une grandeur réelle, auquel cas le terme (3) ne peut être que réel. De ce fait, $j(K_i - K_{i+1})$ est réel, ce qui impose que $K_i - K_{i+1}$ soit complexe pur.

Les constantes K_i et K_{i+1} sont impérativement elles-mêmes complexes conjuguées. Le terme (3) s'écrit alors

$$e^{b_i t} \cdot [\lambda_i \cdot \cos \omega_i t + \mu_i \sin \omega_i t] \text{ avec } \begin{cases} \lambda_i = K_i + K_{i+1} \\ \mu_i = j(K_i - K_{i+1}) \end{cases} \quad \lambda_i \text{ et } \mu_i \in R$$

ou encore $e^{b_i t} \cdot M_i \cdot \cos(\omega_i t + \Phi)$

et dans ces conditions : $s_1(t) = \sum_{i=1}^k K_i \cdot e^{r_i t} + \sum_{j=1}^l M_j \cdot e^{b_j t} \cdot \cos(\omega_j t + \Phi_j)$ avec $k + 2l = n$

Conséquences :

- Si les racines r_i sont **réelles uniquement**, on a un **régime libre apériodique**. De plus, si les racines r_i sont réelles négatives, ce régime libre s'éteint au bout d'un certain temps car $e^{-r_i t} \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$. Inversement si r_i est positif le système est **instable**.

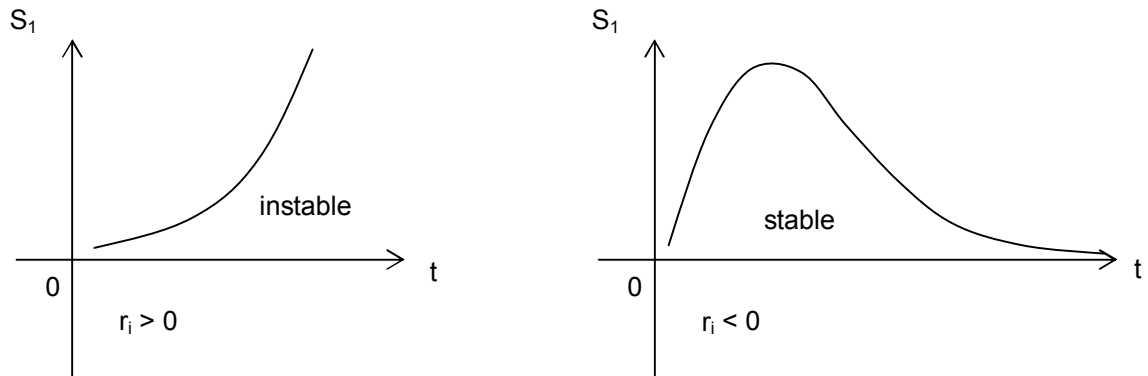


Figure 22- régime apériodique

- Si les racines r_i sont **complexes uniquement**, on a un **régime oscillatoire**. Si, de plus, la partie réelle de la racine complexe est négative, ce régime oscillatoire disparaît.

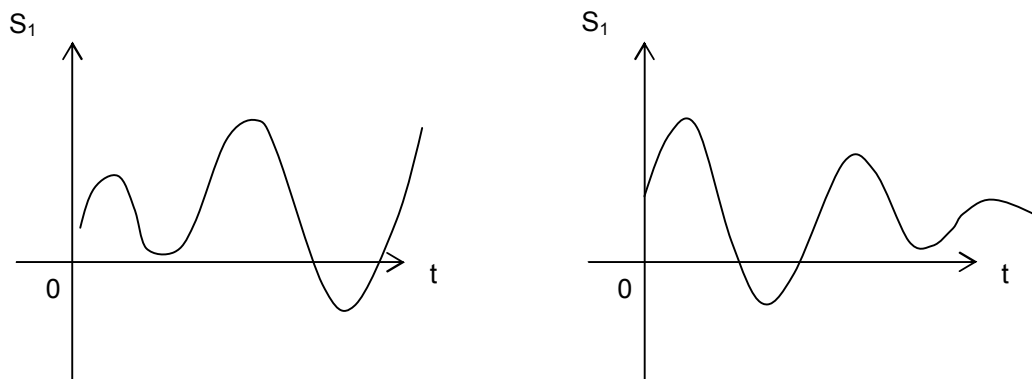


Figure 23- régime oscillatoire

2.3.2.1 solution particulière de l'E. A. S. M.

La solution particulière de l'équation (1) donne le **régime forcé**. Elle est obtenue en appliquant des règles qui dépendent bien sûr du second membre :

- si $e(t)$ est un **polynôme**, alors $s_2(t)$ est aussi un **polynôme de même degré** que $e(t)$;
- Si $e(t)$ est une **exponentielle**, alors $s_2(t)$ est aussi **exponentielle**;
- si $e(t)$ est une **fonction sinusoïdale**, alors $s_2(t)$ est encore **sinusoïdale**.

Le régime forcé a donc la même forme que l'excitation.

2.3.2.2 conclusion

La résolution de l'équation différentielle met en évidence la superposition d'un régime libre indépendant de l'entrée et d'un régime forcé de même forme que l'entrée. Le régime libre peut disparaître avec le temps; le régime forcé seul subsiste. **Il faut pour cela que les racines de l'équation caractéristique soient à partie réelle négative.** Dans le cas contraire, la sortie du système prend des valeurs évoluant très rapidement vers des valeurs très élevées, incompatibles avec un bon fonctionnement matériel, mais surtout rendant le système incontrôlable.

Le régime libre, encore appelé **régime transitoire**, caractérise le **comportement dynamique** du système. Le régime forcé ou **régime permanent** traduit son **comportement statique** (cf Figure 24).

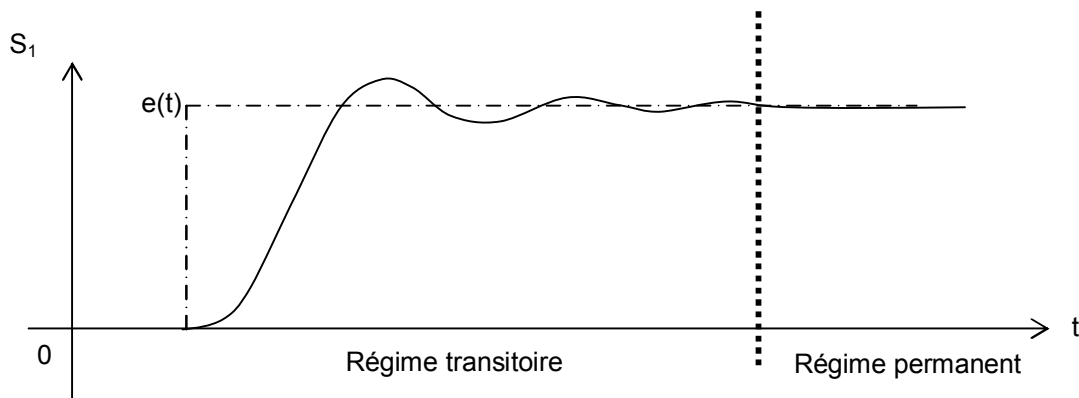


Figure 24- réponse d'un système stable à un échelon

2.3.3 Fonction de transfert

Il est toujours compliqué de résoudre une équation différentielle d'un ordre quelconque. La transformée de Laplace va nous aider dans ce travail.

Définition : On considère le système au repos ou alors en régime permanent établi depuis suffisamment longtemps toutes les dérivées sont donc nulles à l'instant $t = t_0$. La transformée de Laplace de (1) s'écrit alors :

$$a_n \cdot p^n \cdot S(p) + \dots + a_1 \cdot p \cdot S(p) + a_0 \cdot S(p) = b_0 \cdot E(p) + b_1 \cdot p \cdot E(p) + \dots + b_m \cdot p^m \cdot E(p)$$

d'où

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0}{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0}$$

$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ est appelée **fonction de transfert** ou **transmittance** du système.

La fonction de transfert est l'expression qui relie les **variations**, vis à vis d'un régime initial ou point de fonctionnement, du signal de sortie par rapport au signal d'entrée. Dans un schéma fonctionnel, un système sera représenté par sa fonction de transfert.

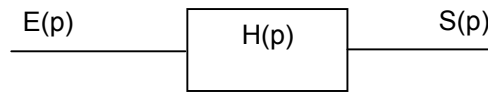


Figure 25- schéma fonctionnel d'un système

2.3.3.1 Fonction de transfert d'une machine à courant continu

Afin d'illustrer cette notion de fonction de transfert, nous allons modéliser le comportement d'une machine à courant continu à excitation indépendante accouplée à une charge.

2.3.3.1.1 Machine à courant continu sans charge

Ecrivons les équations régissant le fonctionnement :

$$\text{f.é.m. : } E = \frac{p}{a} n N \Phi \text{ où } \begin{cases} p = \text{nombre de paires de pôles} \\ 2a = \text{nombre de voies d'enroulement de l'induit} \\ n = \text{nombre de brins actifs} \\ N = \text{vitesse de rotation en tr/s} \\ \Phi = \text{flux utile par pôle en Wb} \end{cases}$$

$N = \frac{\Omega}{2\pi}$ (Ω en rd/s) $\Rightarrow E = \frac{p}{a} n \frac{\Omega}{2\pi} \Phi$ en posant $k = \frac{p \cdot n}{2\pi \cdot a} = C^{te}$ (k dépend de la machine considérée), il vient :

$$E = k \cdot \Phi \cdot \Omega$$

couple électromagnétique :

l'induit est modélisé de la manière suivante en régime permanent (pas d'effet de la part de l'inductance) :

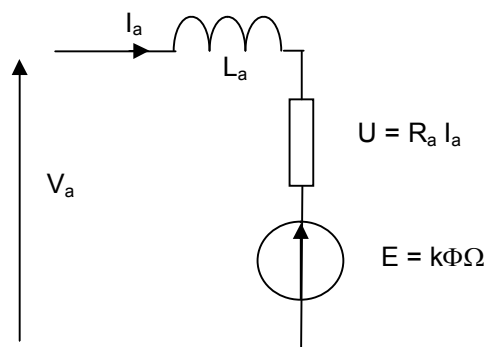


Figure 26- induit d'une machine à courant continu

On a donc : $V_a = R_a I_a + k \Phi \Omega + L_a \frac{dI_a}{dt} \Rightarrow V_a I_a = R_a I_a^2 + k \Phi \Omega I_a + L_a \frac{dI_a}{dt} I_a$

En régime permanent, I_a est constant et donc $L_a \frac{dI_a}{dt} = 0$, l'inductance n'intervient pas

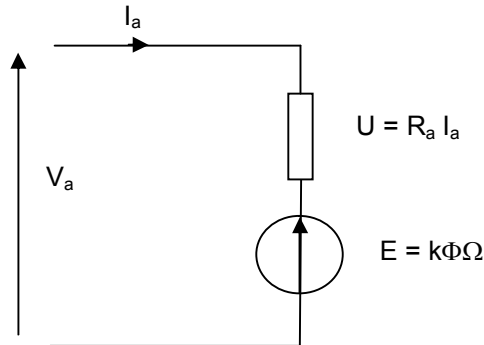


Figure 27- induit d'une machine à courant continu en régime permanent

Or, $P_a = V_a I_a$ est la puissance absorbée par l'induit et $R_a I_a^2$ est la puissance dissipée par effet Joule dans l'induit.

Donc la puissance électrique susceptible d'être transformée en puissance mécanique est : $P_e = V_a I_a - R_a I_a^2 = E I_a$, on l'appelle puissance électromagnétique. C'est elle qui donne naissance au couple électromagnétique suivant la formule :

$$P = C \cdot \Omega \Rightarrow C_e = \frac{P_e}{\Omega} = \frac{E I_a}{\Omega} = \frac{k \Phi \Omega I_a}{\Omega} = k \cdot \Phi \cdot I_a$$

Le couple utile est bien entendu inférieur à cet idéal étant donné l'existence de couple de frottements (secs : paliers et fluides : ventilateur claveté sur l'arbre moteur) et de pertes fer (hystérésis et courants de Foucault) croissant avec la vitesse et le flux magnétique. Cependant, en fonctionnant à flux constant, les pertes ne sont plus fonction que de la vitesse, pour les machines importantes, on peut les négliger en première approximation. On posera :

$$C_{utile} \approx C_e = k \cdot \Phi \cdot I_a$$

2.3.3.1.2 Procédés de commande d'une machine cc

Ces moteurs sont très utilisés dans le domaine des asservissements. Ils assurent en particulier des démarrages et des arrêts fréquents. On trouve principalement deux types de commande :

- Commande à flux constant par la tension d'induit variable.
- Commande à courant d'induit constant par le flux d'induit variable.

Ces deux types de commandes ne donnent pas la même fonction de transfert.

2.3.3.1.2.1 Commande par la variation de la tension d'induit :

On règle le flux à sa valeur maximale, l'intensité absorbée par l'induit pour un couple résistant donné est donc minimum, en effet :

$$I_a = \frac{C_e - C_r}{k \cdot \Phi_{\max}}$$

Les deux équations fondamentales s'écrivent :

$$\begin{cases} E = k_{\max} \cdot \Omega \\ C_e = k_{\max} \cdot I_a \end{cases} \text{ avec } k_{\max} = k \times \Phi_{\max} = C^{te}$$

Prenons la transformée de Laplace : (on ne considère plus le seul régime $I_a = C^{te}$)

$$\begin{cases} E(p) = k_{\max} \cdot \Omega(p) \\ C_e(p) = k_{\max} \cdot I_a(p) \\ V_a(p) = (R_a + L_a p) \cdot I_a(p) + E(p) \end{cases}$$

d'où l'expression du couple de la machine :

$$C_e(p) = \frac{k_{\max}}{R_a + L_a p} V_a(p) - \frac{k_{\max}^2}{R_a + L_a p} \Omega(p)$$

Cette relation montre qu'une machine cc commandée par tension d'induit variable est équivalente à une machine idéale produisant le couple $C_e(p) = \frac{k_{\max}}{R_a + L_a p} V_a(p)$

indépendant de la vitesse de rotation de la machine et d'un défaut (frottement fluide) stabilisant la vitesse (terme négatif)

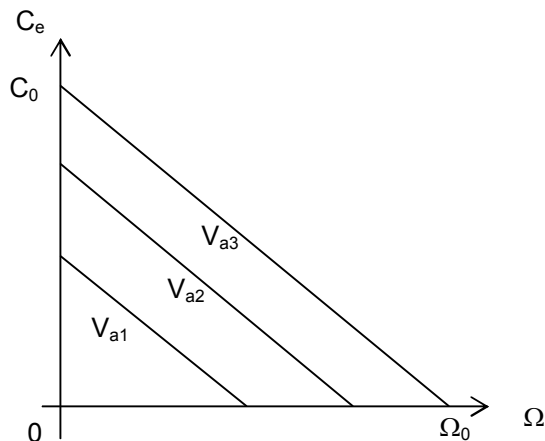


Figure 28- caractéristiques mécanique du pilotage par tension d'induit

Le schéma fonctionnel du moteur CC piloté par induit est alors le suivant :

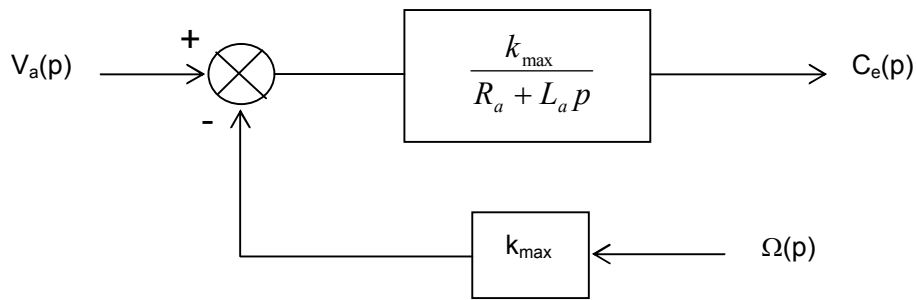


Figure 29- schéma fonctionnel de la machine cc pilotée par tension d'induit

2.3.3.1.2.2 Commande par variation du flux inducteur

Le courant d'induit est maintenu constant. Le flux va donc varier puisqu'il est proportionnel au courant inducteur. Toutefois on remarque que pour des valeurs fortes de ce courant on sature la machine. On a deux solutions :

- on travaille à faible courant ce qui limite l'utilisation
- on utilise des circuits magnétiques de forte section ce qui permet de reculer plus loin le coude de saturation mais augmente la taille des moteurs.

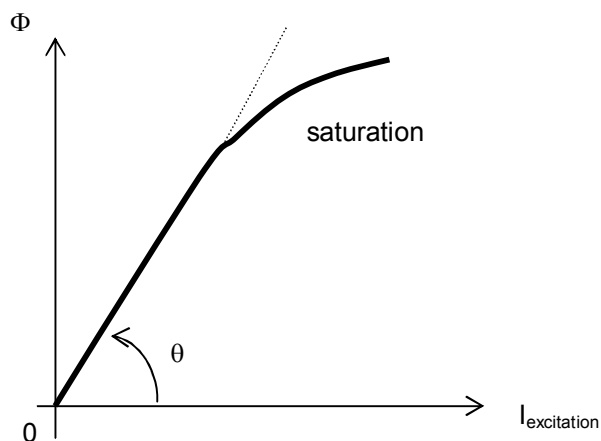


Figure 30- flux inducteur

Dans la zone linéaire, la courbe est une droite de pente $\text{tg}\theta$. on peut donc écrire :

$$\Phi = \text{tg}\theta \cdot I_e$$

d'où :

$$C_e = k_{\max} \Phi I_a = k_{\max} I_a \text{tg}\theta \cdot I_e = k_{\text{ind}} \cdot I_e \text{ avec } k_{\text{ind}} = k_{\max} I_a \text{tg}\theta = C^{te}$$

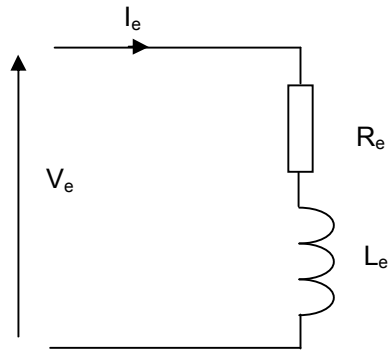


Figure 31- modèle de l'inducteur d'une machine cc

L'équation de maille de l'inducteur donne :

$$V_e = R_e \cdot I_e + L_e \cdot \frac{dI_e}{dt} \text{ ou bien en transformée de Laplace :}$$

$$V_e(p) = (R_e + L_e p) I_e(p)$$

pour le couple, on a :

$$C_e(p) = k_{ind} \cdot I_e(p)$$

d'où

$$C_e(p) = \frac{k_{ind}}{R_e + L_e p} V_e(p)$$

Les caractéristiques mécaniques sont désormais les suivantes :

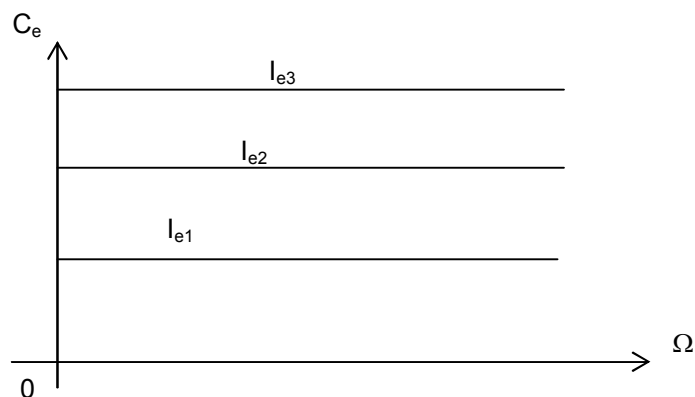


Figure 32- caractéristiques mécaniques du pilotage par courant inducteur

Le schéma fonctionnel se réduit à :

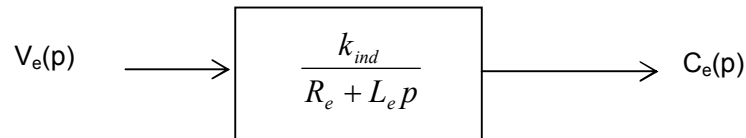


Figure 33- schéma fonctionnel de la machine cc pilotée par courant inducteur

La caractéristique mécanique ne comporte pas de frottement fluides. Il sera donc nécessaire de stabiliser la vitesse sinon la machine risque de s'emballer. Ce type de commande est peu utilisé en automatique.

2.3.3.1.3 Machine cc accouplée à une charge

Un réducteur de vitesse, permettant de réduire la vitesse de rotation et d'augmenter le couple au niveau de la charge, est généralement placé entre le moteur et la charge.

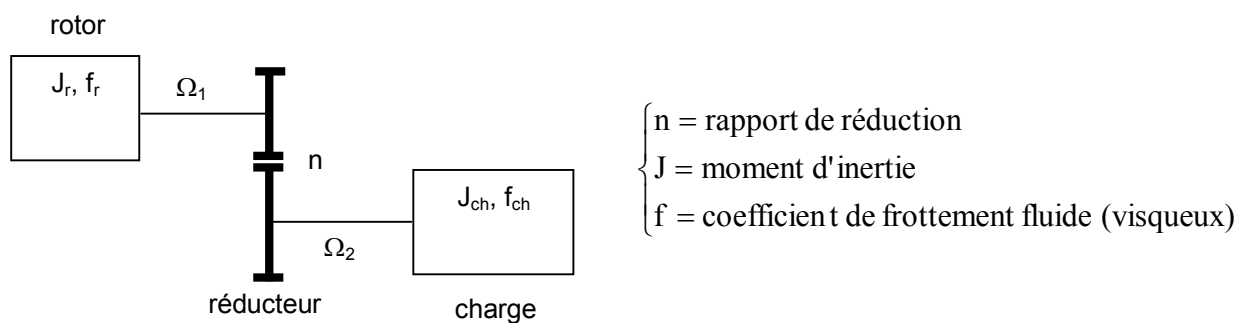


Figure 34- moteur cc avec charge

On a $n = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$ avec R le nombre de dents d'un pignon. Si on suppose les frottements et les jeux nuls dans le réducteur, alors toute la puissance mécanique instantanée appliquée à l'arbre d'entrée du réducteur se retrouve sur l'arbre de sortie, donc :

$$C_1 \cdot \Omega_1 = C_2 \cdot \Omega_2$$

C_1 est le couple du moteur C_e , C_2 est le couple disponible sur l'arbre de sortie pour entraîner la charge. Le couple moteur C_e doit équilibrer l'ensemble des couples résistants, d'où :

$$C_e - \sum C_{résistant} = J \frac{d\Omega}{dt} \text{ avec } \sum C_{résistant} = f \cdot \Omega + C_r$$

$f \cdot \Omega$ = frottements fluides et C_r = frottements secs

f est le coefficient de frottements fluides de l'ensemble moteur + charge,

J est le moment d'inertie de l'ensemble moteur + charge.
Afin d'obtenir J et f, on ramène d'abord la charge sur l'arbre moteur.

$$C_1 \cdot \Omega_1 = C_2 \cdot \Omega_2 \Rightarrow C_{charge} = C_{chramené} \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = n \cdot C_{chramené}$$

$$\text{or } C_{ch} = J_{ch} \frac{d\Omega_2}{dt} + f_{ch} \cdot \Omega_2 \text{ et } \frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{1}{n} \cdot \frac{d\Omega_1}{dt}$$

$$\text{d'où } n \cdot C_{chramené} = \frac{J_{ch}}{n} \cdot \frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{f_{ch}}{n} \cdot \Omega_1 \Rightarrow C_{chramené} = \frac{J_{ch}}{n^2} \cdot \frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{f_{ch}}{n^2} \cdot \Omega_1$$

Comme dans le cas du transformateur, pour faire passer des "impédances" du primaire au secondaire, ou réciproquement, on multiplie ou on divise celles-ci par le rapport de transformation élevé au carré.

en remplaçant dans $C_e - \sum C_{résistant} = J \frac{d\Omega}{dt}$, il vient :

$$C_e - f_r \Omega_1 - \frac{f_{ch}}{n^2} \Omega_1 - C_r = J_r \frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{J_{ch}}{n^2} \cdot \frac{d\Omega_1}{dt}$$

donc

$$C_e - C_r = \left(J_r + \frac{J_{ch}}{n^2} \right) \cdot \frac{d\Omega_1}{dt} + \left(f_r + \frac{f_{ch}}{n^2} \right) \cdot \Omega_1$$

en posant : $J_{eq} = \left(J_r + \frac{J_{ch}}{n^2} \right)$ et $f_{eq} = \left(f_r + \frac{f_{ch}}{n^2} \right)$, on obtient :

$$\frac{\Omega_1(p)}{C_e(p) - C_r(p)} = \frac{1}{p \cdot J_{eq} + f_{eq}}$$

La charge apparaît donc comme la boîte ci-dessous dans un schéma fonctionnel :

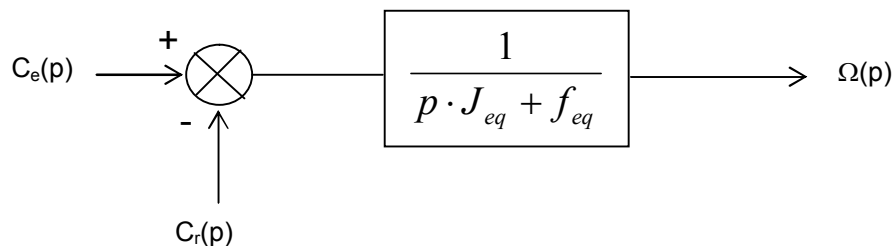


Figure 35- schéma fonctionnel de l'ensemble mécanique rotor + charge

Si on utilise un pilotage par réglage de la tension d'induit, la Figure 29- schéma fonctionnel de la machine cc pilotée par tension d'induit vient s'inclure dans celle ci-dessus :

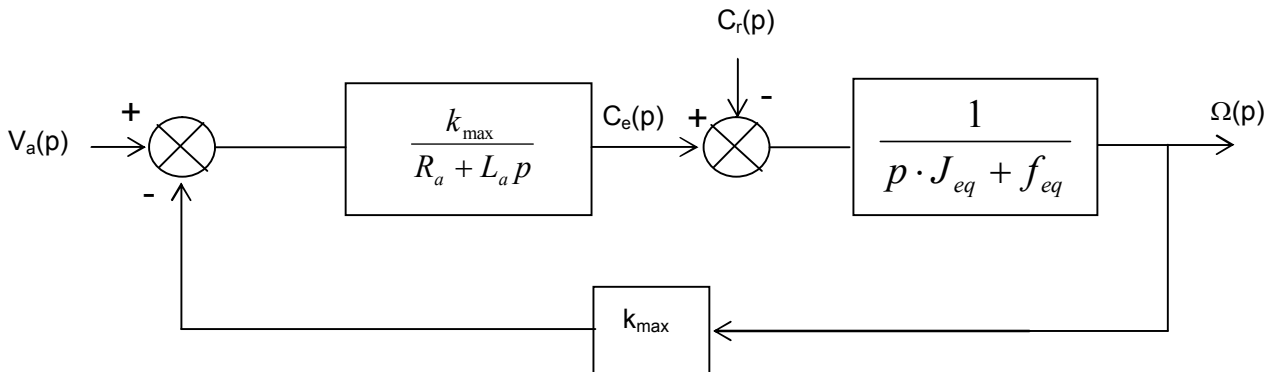


Figure 36- schéma fonctionnel du moteur cc piloté par tension d'induit avec charge

Piloté par tension d'induit, le moteur possède une **contre-réaction interne**. Il ne risque pas l'emballement.

2.3.3.2 Modèle de connaissance :

L'élaboration du schéma fonctionnel ci-dessus s'est effectuée à partir des équations physiques du système. On obtient donc le modèle de connaissance.

Pour obtenir la fonction de transfert de l'ensemble, on va supposer $C_r = 0$. A partir du schéma de la Figure 36- schéma fonctionnel du moteur cc piloté par tension d'induit avec charge, on peut écrire :

$$C_e(p) = \frac{k_{\max}}{R_a + L_a p} V_a(p) - \frac{k_{\max}^2}{R_a + L_a p} \Omega(p)$$

et enfin :

$$\frac{\Omega(p)}{V_a(p)} = \frac{k_{\max}}{k_{\max}^2 + (R_a + L_a p)(f_{eq} + J_{eq} p)}$$

2.3.3.3 Forme canonique d'une fonction de transfert

La fonction de transfert d'un système n'est utilisable que si on fait apparaître les racines des polynômes qui la composent.

$$F(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1 + \frac{b_1}{b_0} p + \dots + \frac{b_m}{b_0} p^m}{1 + \frac{a_1}{a_0} p + \dots + \frac{a_n}{a_0} p^n}$$

Soit :

$$F(p) = K \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \tau_i p)}{\prod_{j=1}^k (1 + \tau_j p) \prod_{j=1}^l (1 + a_j p + b_j p^2)} \text{ avec } n = k + 2l$$

$K = \frac{b_0}{a_0}$ est appelé **gain statique** du système. Ce n'est pas forcément un nombre sans dimension. Les τ_i et τ_j sont les **constantes de temps du système**. Une constante de temps rend compte de la dynamique du système, plus celle-ci est faible, plus le système est rapide à réagir. Les termes du second ordre sont à laisser tels quels au cas où ils ne sont pas décomposables.

2.3.3.4 modèle de commande

L'écriture du modèle de connaissance est aisée sur des systèmes simples que l'on connaît bien. Elle l'est beaucoup moins sur des systèmes compliqués. Sur un processus déjà existant, de structure complexe et mal connue, elle devient impossible et l'ingénieur automaticien ne s'y risque pas. Comment alors trouver une loi $s = f(e)$ qui rende compte le mieux possible du comportement dynamique d'un système ?

Ce problème ne peut être résolu que par des essais expérimentaux et à partir de connaissances a priori (catalogue de réponses types par exemple). C'est ce que l'on appelle **identification d'un processus**. Un chapitre (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) sera nécessaire pour aborder ce problème, mais il est possible d'approcher intuitivement cette phase.

En effet, nous avons défini dans le chapitre 2.1.4 un certain nombre de signaux -tests. L'expérimentation s'effectuera à l'aide de ces signaux. Les réponses seront comparées à des réponses types et on aura une bonne idée du modèle du processus.

On va trouver deux formes d'essais expérimentaux qui conduiront d'ailleurs aux mêmes résultats

- les essais harmoniques,
- les essais temporels.

2.3.3.4.1 Essais harmoniques (Représentation par diagrammes fréquentielles)

Si on applique un signal sinusoïdal à un système linéaire, on sait (cf définition) que la réponse est sinusoïdale. On montre également qu'une fois les transitoires éteints, c'est-à-dire, une fois le régime permanent atteint, la sortie est sinusoïdale, de même pulsation que le signal d'entrée, mais d'amplitude et de phase différentes.

Supposons $e(t) = E_M \sin \omega t$ et $s(t) = S_M \sin(\omega t + \varphi)$. Appliquons la transformée cissoïdale à ces deux grandeurs. Il vient:

$$e(t) \rightarrow E_M \text{ et } s(t) \rightarrow S_M \cdot e^{j\varphi}$$

Rappelons que l'opération de dérivation correspond à une multiplication par $j\omega$ et appliquons cette procédure à l'équation générale d'un système linéaire. Il vient :

$$a_n \cdot (j\omega)^n \cdot S_M \cdot e^{j\varphi} + \dots + a_1 \cdot j\omega \cdot S_M \cdot e^{j\varphi} + a_0 \cdot S_M \cdot e^{j\varphi} = b_0 \cdot E_M + b_1 \cdot j\omega \cdot E_M + \dots + b_m \cdot (j\omega)^m \cdot E_M$$

soit :

$$S_M \cdot e^{j\varphi} [a_n \cdot (j\omega)^n + \dots + a_1 \cdot j\omega + a_0] = E_M \cdot [b_0 + b_1 \cdot j\omega + \dots + b_m \cdot (j\omega)^m]$$

$$\Rightarrow \frac{S_M}{E_M} \cdot e^{j\varphi} = \frac{b_0 + b_1 \cdot j\omega + \dots + b_m \cdot (j\omega)^m}{a_0 + a_1 \cdot j\omega + \dots + a_n \cdot (j\omega)^n} = H(j\omega)$$

On retrouve la fonction de transfert dans laquelle on a fait $p = j\omega$. On appelle lieu de transfert la représentation de \underline{F} en fonction de ω telle que $\underline{F}(j\omega) = \frac{S_M}{E_M} \cdot e^{j\varphi}$. Les électroniciens l'appellent **réponse en fréquence** ou diagramme de Bode.

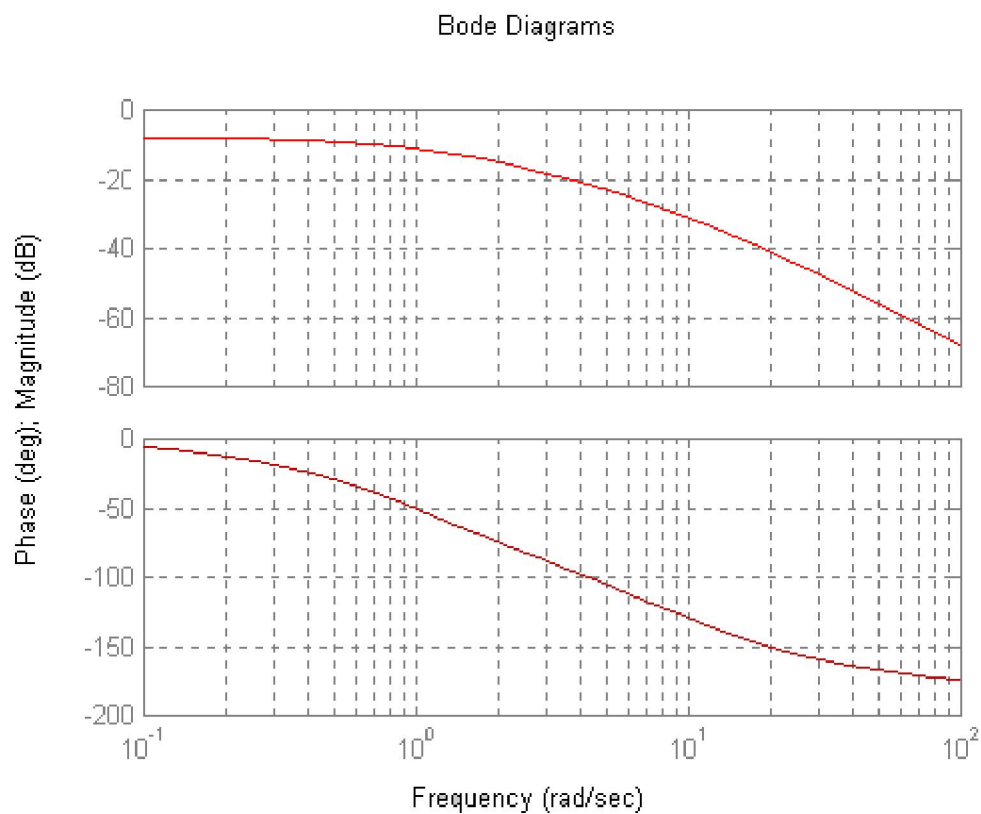
2.3.4 Représentation graphique du lieu de transfert

Trois représentations du lieu de transfert sont principalement utilisées, et nous nous intéresserons particulièrement à la troisième :

2.3.4.1 Représentation de Bode :

On trace $G_{db} = 20 \log(|\underline{F}(j\omega)|)$ et $\Phi = \arg(\underline{F}(j\omega))$ en fonction de ω dans un plan semi logarithmique.

Voici par exemple le diagramme de Bode de : $F(j\omega) = \frac{4}{(1+j\omega)\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)}$, fonction de transfert dont nous reparlerons au chapitre **Erreur ! Source du renvoi introuvable..**



2.3.4.2 Représentation de Nyquist

On trace $F(j\omega)$ dans le plan complexe. Le lieu est gradué en ω sinon il n'a aucune valeur. A tout ω_i correspond :

$$\begin{cases} \overline{OM_i} = |F(j\omega_i)| \\ \Phi_i = \arg(F(j\omega_i)) \end{cases}$$

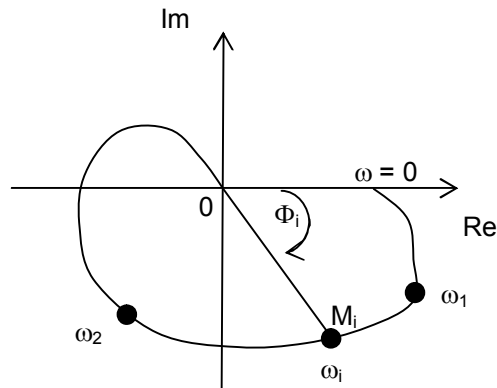


Figure 37- représentation de Nyquist

2.3.4.3 Représentation de Black

Elle est très importante, en effet elle seule figure au programme !

En fait c'est la représentation de Bode mais transcrite dans un seul plan, le plan (G_{dB}, Φ) , Φ étant portée en abscisse et G_{dB} en ordonnée. Là encore, le lieu doit être gradué en ω et orienté, sinon il n'a aucune valeur.

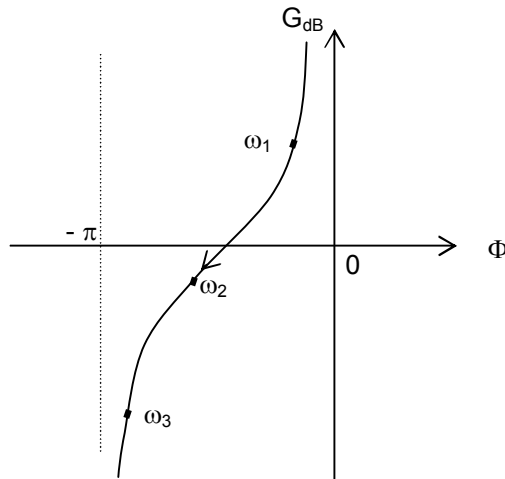


Figure 38- représentation de Black

2.3.5 Essais temporels

(Analyse temporelle)

Le paragraphe 2.3.2.2 a mis en évidence que tout système linéaire répond à une excitation par un régime transitoire et un régime permanent. Alors que les essais harmoniques ne font pas apparaître le régime transitoire, il n'en est pas de même pour les essais temporels : impulsion, échelon et rampe. Chacun d'eux va mettre en évidence un certain nombre de paramètres.

2.3.5.1.1 réponse impulsionnelle

L'impulsion permettra de connaître la stabilité du système :

Si nous donnons une impulsion à la bille celle-ci reviendra au bout d'un moment à sa position d'équilibre. Son déplacement dans le temps peut être décrit comme l'indique la Figure 39.

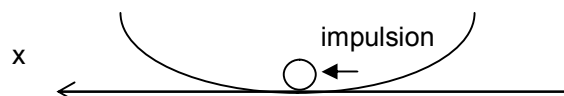


Figure 39- essai impulsionnel sur une bille

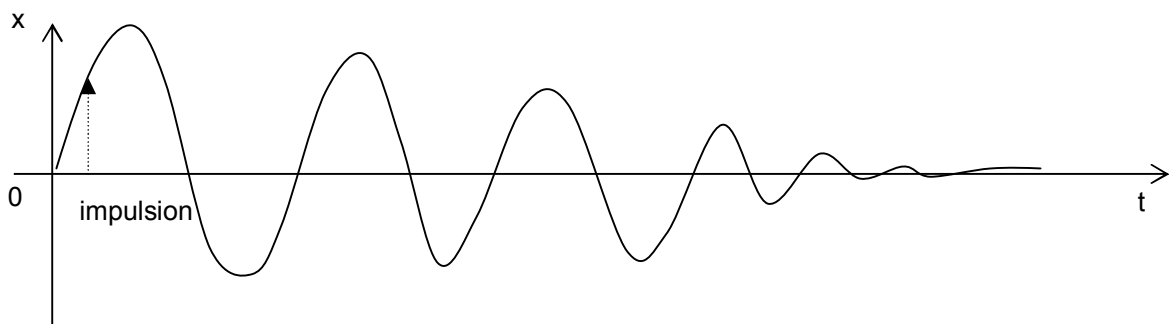


Figure 40- réponse impulsionnelle d'un système stable

Si l'évolution du système ne s'effectue pas de cette manière, c'est que celui-ci est **naturellement instable**.

2.3.5.1.2 Réponse en vitesse

Elle permet de savoir si le système suit bien une entrée évolutive.

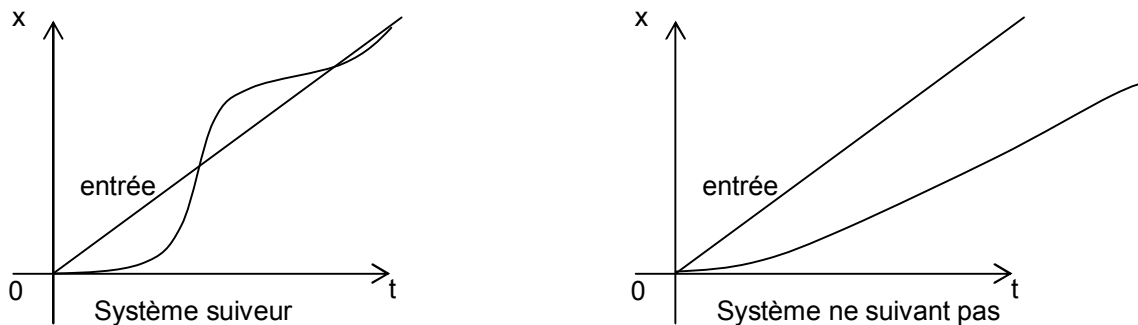


Figure 41- réponses possibles en vitesse

2.3.5.1.3 Réponse indicielle

C'est l'essai le plus intéressant pour l'automaticien et sans doute le plus facile à réaliser (ouverture ou fermeture d'un interrupteur, d'une vanne,...). En observant la sortie, on a tout de suite une bonne idée du comportement dynamique du système. La réponse d'un système à un échelon unité s'appelle **réponse indicielle ou unitaire**.

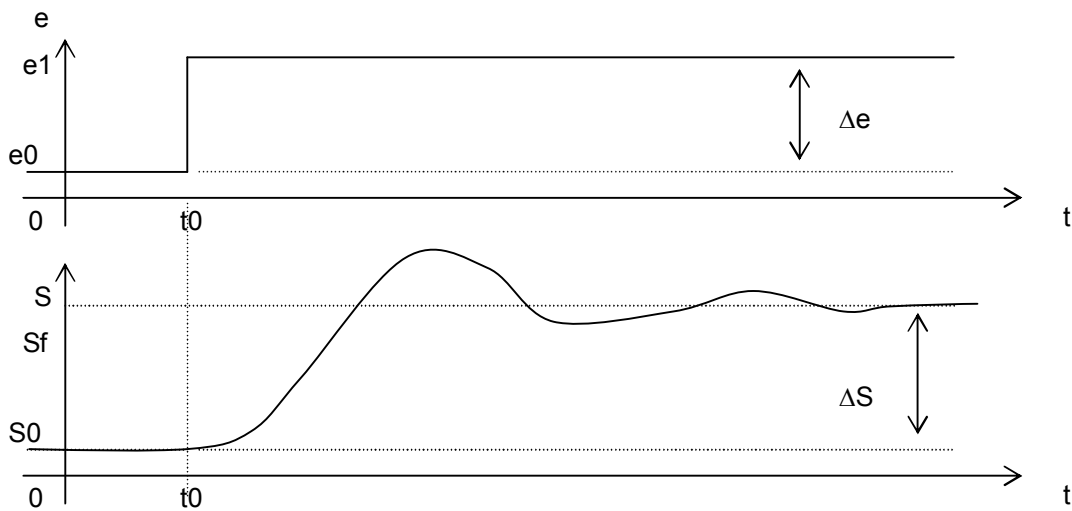


Figure 42- réponse indicielle

Dans un premier temps, il est facile d'évaluer le gain statique : $G = \frac{\Delta S}{\Delta e}$

2.3.5.1.4 Formes fondamentales des réponses indicielles

Sur les Figure 43 et Figure 44, on remarque, qu'après l'instant d'application de l'échelon, la sortie tend vers une valeur d'équilibre S_f au bout d'un "temps plus ou moins long". Cette notion caractérise la dynamique de la réponse. Voici quelques réponses types :

Réponse exponentielle :

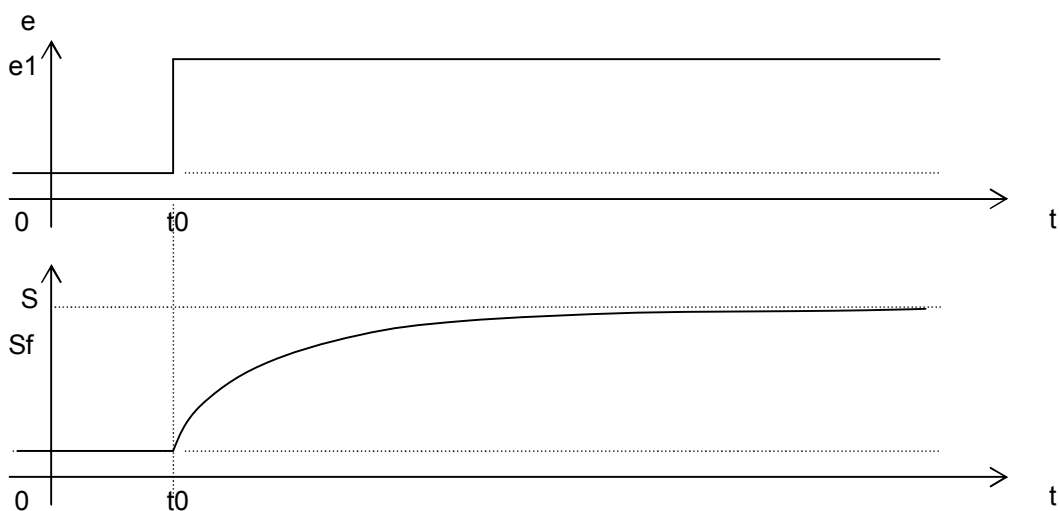


Figure 43- réponse exponentielle

2.3.5.1.5 Réponse à dérivée nulle à l'origine

Elles sont la caractéristique de systèmes d'ordre supérieur à 1 (nous approfondirons cette notion d'ordre d'un système prochainement).

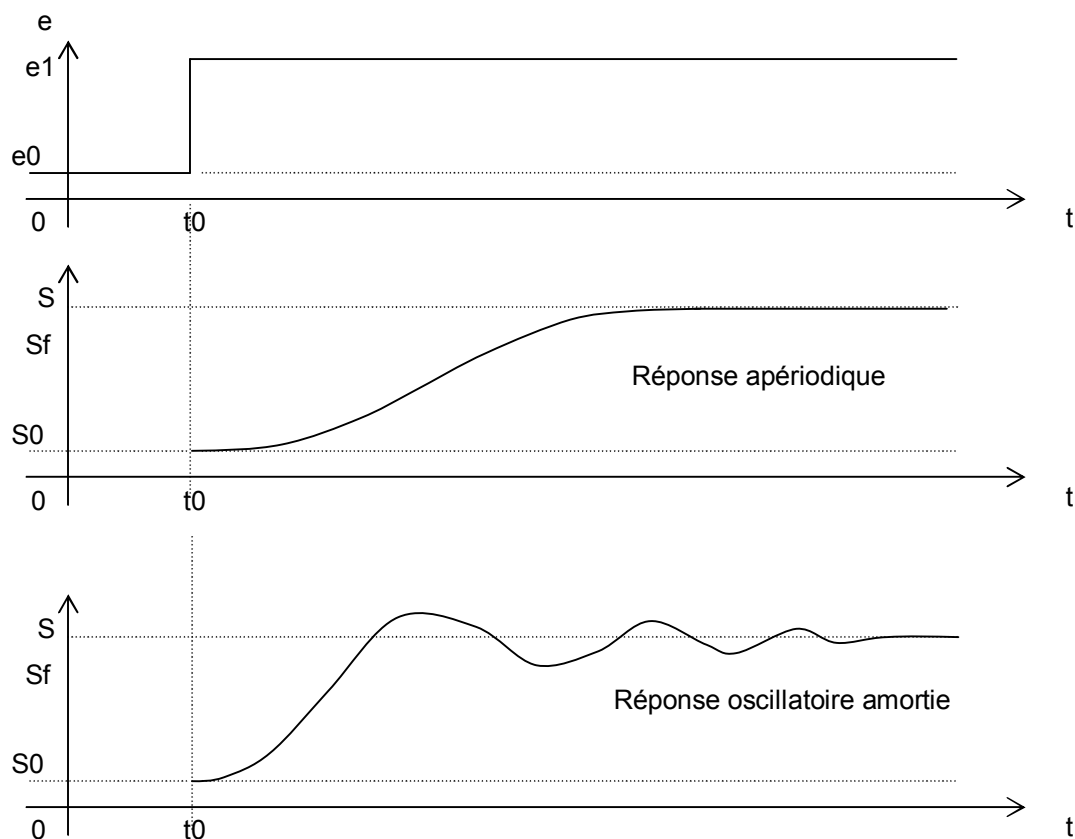


Figure 44- réponses indicielles à dérivée nulle à l'origine

Ces trois formes de réponses caractérisent des systèmes naturellement stables. Par contre, on peut aussi observer la réponse suivante :

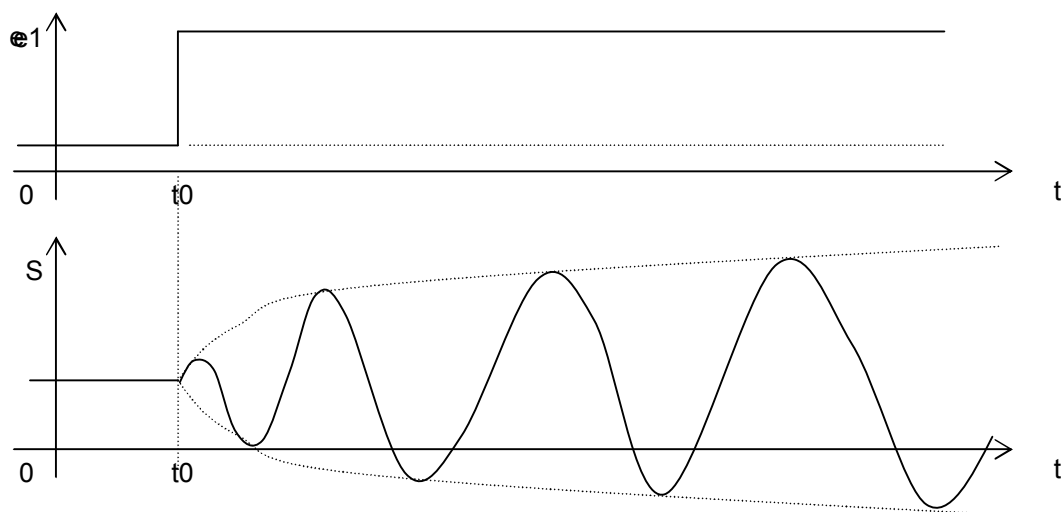


Figure 45- oscillations entretenues

Les systèmes présentant des oscillations entretenues en réponse à une excitation sont dits **instables**. On peut aussi, enfin, observer les formes précédentes, mais décalées par rapport à l'instant d'application de l'échelon :

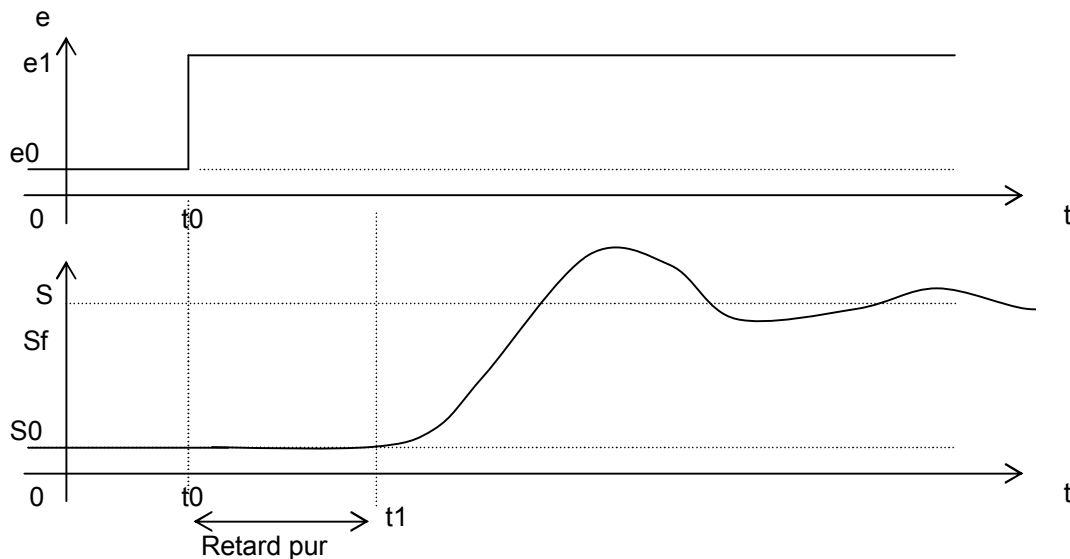


Figure 46- mise en évidence d'un retard pur

En fait, le démarrage de la réponse S n'intervient qu'un temps $t_R = t_1 - t_0$ après l'échelon. Ce décalage est appelé **retard pur** ou **temps mort**. Les retards purs vont compliquer la tâche des automaticiens car ils réduisent la stabilité et la précision.

2.3.5.2 Temps de montée, temps de réponse

Le temps de montée est un élément de réponse bien connu des électroniciens puisqu'il contribue à donner une indication sur la bande passante d'un système donc de sa rapidité. Il est évalué comme étant le temps mis pour passer de 10% à 90% de la valeur finale.

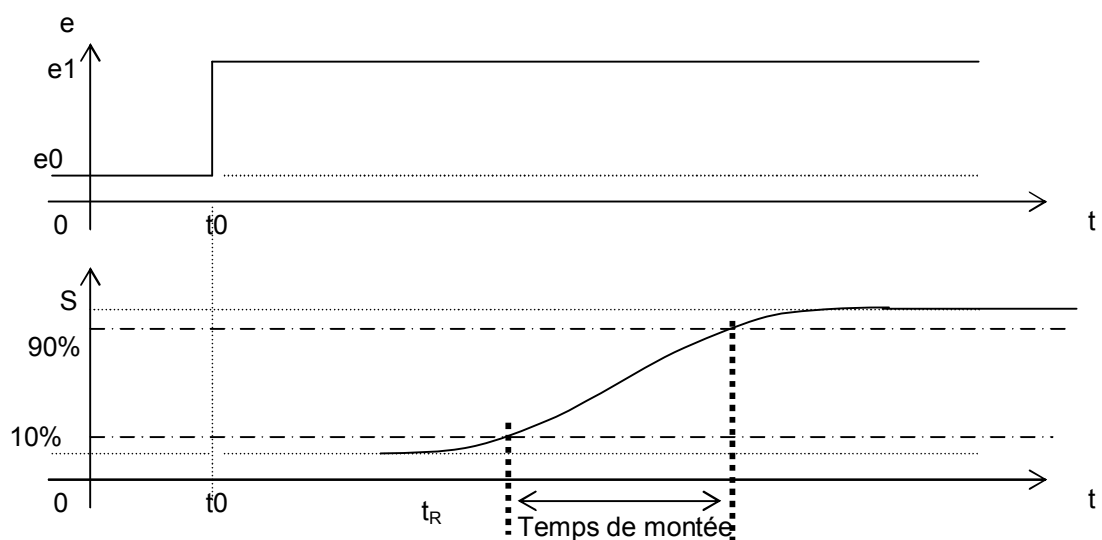


Figure 47- temps de montée de l'électronicien

Ce "temps de montée des électroniciens" n'est pas très intéressants pour l'automaticien, car il n'a que peu d'intérêt pour évaluer la rapidité de réponse d'un système à un échelon. Dans le cas de la figure ci-dessus, on doit tenir compte d'un retard pur ignoré par la notion de temps de montée.

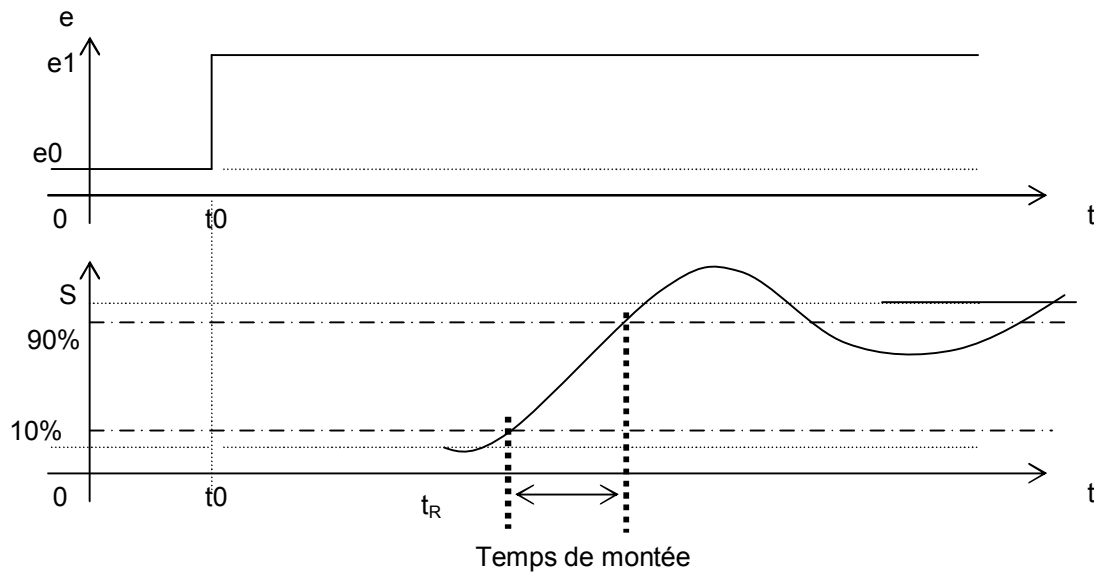


Figure 48- une autre inadaptation...

Ici, le temps de montée ne nous donne qu'une très mauvaise idée du temps mis pour atteindre le régime permanent. Les automaticiens lui préfèrent le **temps de réponse**, temps séparant l'instant d'application de l'échelon et l'arrivée en régime permanent avec une tolérance de $\pm 5\%$ (le signal de sortie arrive dans le "tuyau" des 5 %).

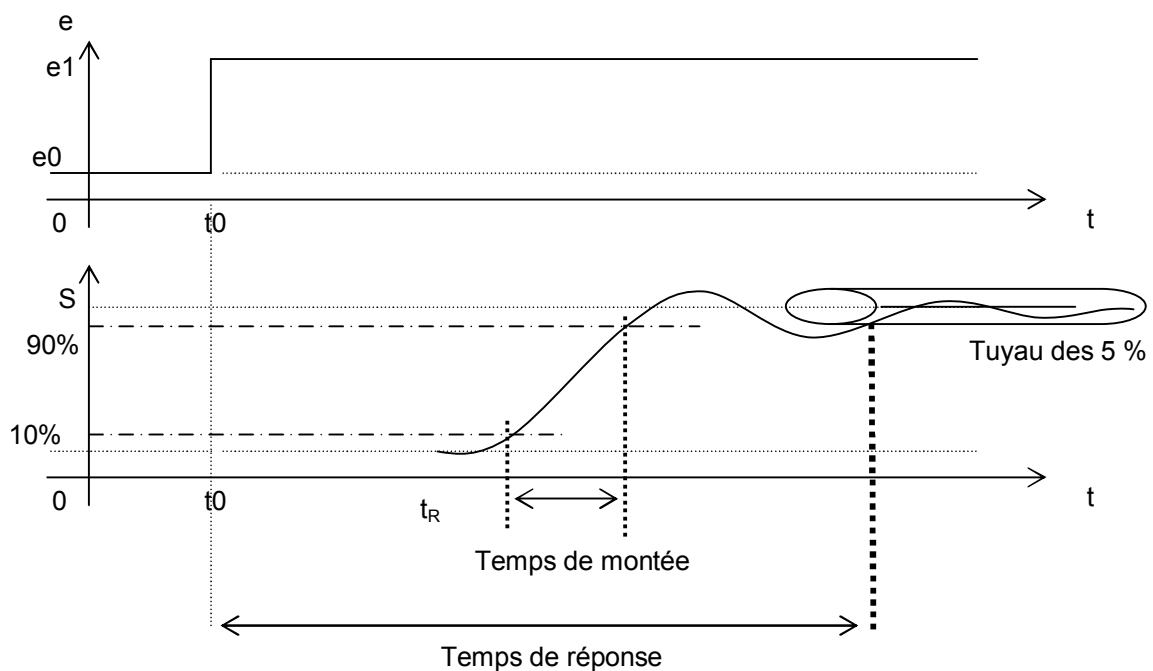


Figure 49- mise en évidence du temps de réponse

L'intérêt du temps de réponse est qu'il tient aussi bien compte des temps de retard que des sur-oscillations. Pour mesurer la vitesse de réaction d'un processus en poursuite on utilise aussi le temps de montée des automaticiens (0 à 90% ou 100% de la valeur finale) qui tient compte aussi des retards.

2.3.6 conclusion

Essais harmoniques et temporels vont nous permettre d'arriver aux mêmes résultats, comme nous le verrons par la suite. Seules leurs conditions d'emploi changeront : tout dépendra des conditions expérimentales et du temps réservé à cette expérimentation. Dans tous les cas, on aboutira à un modèle de commande suffisamment proche du modèle de connaissance. Les chapitres suivants vont nous permettre de décrire les modèles de connaissance usuels et de mettre en évidence leurs réponses aux signaux-tests.

Concernant les systèmes harmoniques, les notions de réponse en fréquence et fonction de transfert permettent de se ramener à des constructions graphiques (Black). Si on a affaire à un système physique, que l'on sait linéaire, mais dont on ignore les équations, les techniques de réponse en fréquence permettent de traduire ses propriétés sous forme de lieu de transfert. Que l'on parte d'équations ou d'expériences, le point d'aboutissement est le même.

Tout système linéaire peut être caractérisé complètement :

- soit par sa fonction de transfert;
- soit par son lieu de transfert gradué en pulsation.

Ces notions de fonction et de lieu de transfert vont être les outils dont on se servira constamment par la suite.

Il importe de bien saisir la raison qui fait l'intérêt tout spécial de la notion de lieu de transfert : on peut tracer le lieu de transfert d'un système physique dont on ignore les équations, aussi bien que d'un système non encore réalisé dont les équations sont connues; tout méthode de travail qui utilise les lieux de transfert s'applique donc à l'un comme à l'autre : l'expérience et la théorie ont le même langage et ce n'est pas si fréquent !

2.4 Systèmes linéaires continus du premier ordre

Tout système, aussi complexe soit-il, possède sa propre fonction de transfert. On montre en effet que celle-ci peut être décomposée sous la forme d'un produit de fonctions de transfert de systèmes élémentaires. Reprenons la fonction de transfert d'un système du $n^{\text{ième}}$ ordre :

$$F(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}$$

On a intérêt à faire apparaître les pôles de cette fonction de transfert. Pour cela, on a plusieurs solutions

- si le pôle est **réel**, il apparaît sous la forme $1 + \tau p$,
- si le pôle est **nul**, il apparaît sous la forme p ,
- si le pôle est **complexe**, il a obligatoirement son conjugué, et ceux ci apparaissent sous la forme d'un trinôme du second degré $1 + cp + dp^2$.

$F(p)$ peut donc encore s'écrire sous la forme:

$$F(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^\alpha \prod_{i=1}^k (1 + \tau_i p)^i \prod_{j=1}^l (1 + c_j p + d_j p^2)^j} \text{ avec } \alpha + k + 2l = n$$

Dans ces conditions on distinguera **3 types de processus élémentaire** :

- le processus à **constante de temps** ou **processus du 1^{er} ordre**;
- le processus en $1/p$ qu'on appelle **intégrateur**, car diviser par p la transformée de Laplace d'une fonction f revient à prendre la transformée de l'intégrale de f . Ce processus est aussi du premier ordre;
- le processus **du second ordre**.

Les processus du second ordre feront l'objet du chapitre 2.5. Nous étudierons ici les processus à constante de temps et les intégrateurs.

2.4.1 processus à constante de temps

définition :

Un système à constante de temps est régi par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants de la forme :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s(t) = k e(t)$$

Si les conditions initiales sont nulles, la transformée de Laplace des deux membres donne $\tau p S(p) + S(p) = k E(p)$ et la fonction de transfert d'un système du premier ordre s'écrit :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p}$$

Dans cette expression, k est le **gain statique** et τ la **constante de temps**.

Remarque : “Conditions initiales nulles” signifie que le système part **du repos ou de son point de fonctionnement**. Donc à l'instant $t = 0$, le système est en régime permanent. Cette remarque est valable pour toute la suite de ce cours.

2.4.1.1 Exemples de systèmes du premier ordre

2.4.1.1.1 circuit RC :

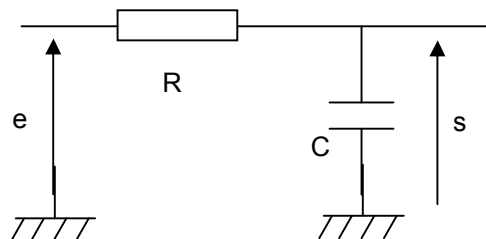


Figure 50- circuit RC

On a $e(t) = Ri(t) + s(t)$ et $s(t) = \frac{1}{C} \int i dt$, d'où $i(t) = C \cdot \frac{ds}{dt}$ et pour terminer :

$$RC \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

Le condensateur étant déchargé (conditions initiales nulles), le passage en transformée de Laplace permet d'écrire la fonction de transfert du circuit :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p} \text{ avec } \tau = RC$$

2.4.1.1.2 moteur à courant continu commandé par inducteur

On avait écrit :

$$C_e(p) = \frac{k_{ind}}{R_e + L_e p} V_e(p) = \frac{k_{ind}}{R_e \left(1 + \frac{L_e}{R_e} p\right)} V_e(p) \Rightarrow F(p) = \frac{C_e(p)}{V_e(p)} = \frac{k}{1 + \tau p} \text{ avec } k = \frac{k_{ind}}{R_e} \text{ et } \tau = \frac{L_e}{R_e}$$

2.4.1.1.3 thermomètre à mercure

Considérons un thermomètre, de capacité calorifique C et dont l'enveloppe a une résistance thermique R_{TH} . Ce thermomètre est plongé dans un bain de température T_E . On lit la température sur l'échelle graduée.

Un flux de chaleur Q (analogue à un courant électrique) va s'échanger entre le liquide et le thermomètre (il y a pas de flux si $T_E = T_S$). T_S est la température "de sortie" lue sur le thermomètre, T_E est la température "d'entrée" du bain liquide. Ce flux doit chauffer l'enveloppe (résistance thermique) avant d'atteindre le mercure et le chauffer.

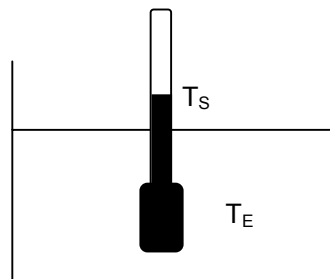


Figure 51- thermomètre à mercure

Nous pouvons écrire :

- d'une part, que $Q \cdot R_{TH} = T_E - T_S$ (perte dans l'enveloppe). On montre que $R_{TH} = 1/s \cdot h$ où s est la surface de l'enveloppe et h le coefficient de transmission de chaleur;

- et d'autre part que $Q = C \frac{dT_S}{dt}$

De ce fait :

$$C \frac{dT_S}{dt} = \frac{T_E - T_S}{R_{TH}} \text{ et } R_{TH} C \frac{dT_S}{dt} + T_S = T_E \Rightarrow F(p) = \frac{T_S(p)}{T_E(p)} = \frac{1}{1 + \tau p} \text{ avec } \tau = R_{TH} C$$

2.4.1.2 Analyse temporelle

2.4.1.2.1 Réponse indicielle

On applique à l'entrée un échelon unité donc $S(p) = \frac{k}{p(1 + \tau p)}$

Après décomposition en éléments simples, on obtient :

$$S(p) = k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/\tau} \right) \text{ et donc } \boxed{s(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)}$$

Traçons l'évolution de $s(t)$ dans le temps. Nous caractériserons le régime transitoire par :

- **le temps de réponse** : la valeur finale (régime permanent) étant k , au bout d'une constante de temps, on est au 2/3 environ de celle-ci (63%); on voit tout de suite que le temps de réponse ($\pm 5\%$ de la valeur finale) est :

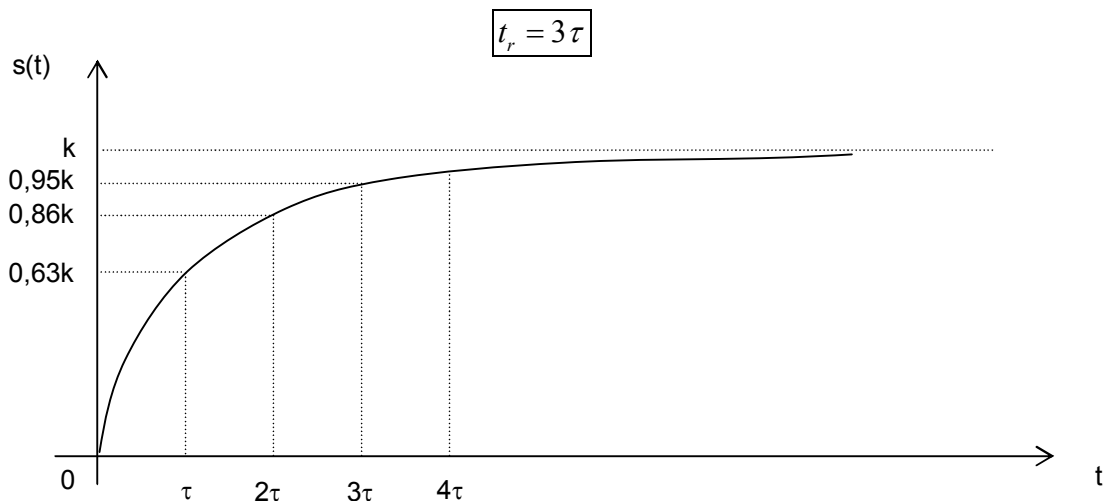


Figure 52- réponse indicielle d'un premier ordre

- **le temps de montée**: la réponse étant monotone croissante, nous définissons le temps de montée comme le temps mis pour que celle-ci atteigne 90% de la valeur finale, ce que nous écrivons sous la forme $0,9k = k \left(1 - e^{-\frac{t_m}{\tau}} \right)$ d'où $e^{-\left(\frac{t_m}{\tau}\right)} = 0,1$ et donc :

$$\boxed{t_m = 2,3\tau}$$

Application :

Identification d'un processus inconnu

A partir d'un essai indiciel :

- on évalue t_r , et on en déduit $\tau = \frac{t_r}{3}$
- on obtient gain statique k par : $k = \frac{\Delta s}{\Delta e} = \frac{S_f}{1} = S_f$

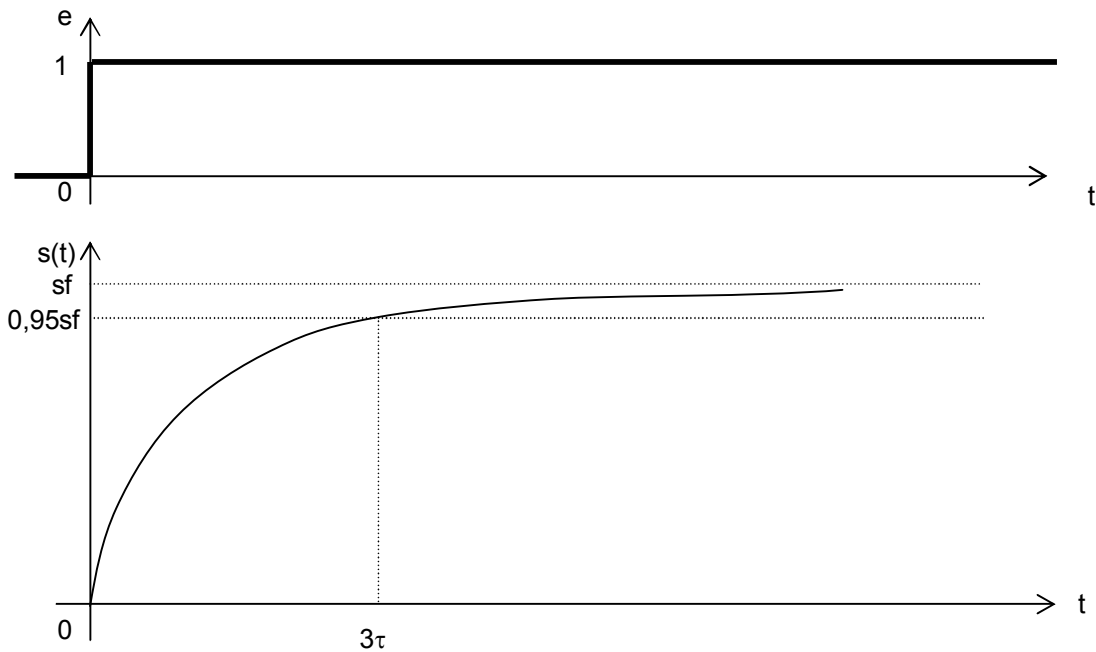


Figure 53- identification d'un premier ordre

Intérêt de la constante de temps

Elle fournit une indication sur le comportement du système :

- si τ est petite, alors t_r est faible et le **système est rapide**
- plus τ est élevée, plus le **système est lent**.

2.4.1.2.1.1 réponse en vitesse

On a cette fois $E(p) = \frac{1}{p^2}$.

$$\text{D'où } S(p) = \frac{k}{p^2(1 + \tau p)} = k \left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau}{p + 1/\tau} \right) \Rightarrow s(t) = k \left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \right)$$

La figure ci-dessous nous donne l'évolution de cette réponse. On voit tout de suite que, si k est différent de 1, la sortie ne suit pas l'entrée. On dit qu'elle “traîne”. L'écart s'agrandit régulièrement et à la limite devient infini.

Conclusion : Un système du premier ordre ne suit pas en vitesse.

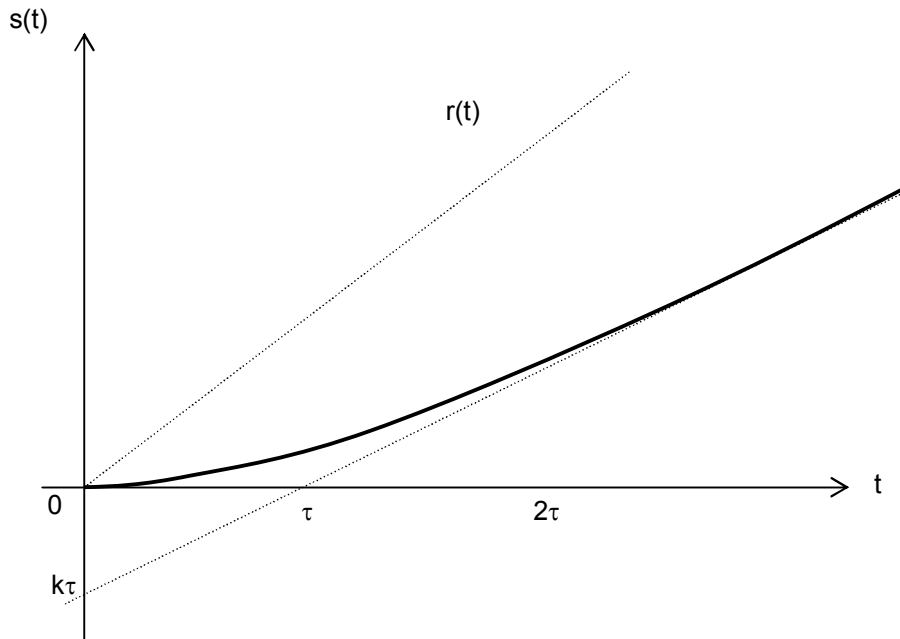


Figure 54- réponse en vitesse d'un premier ordre

Erreur de traînage :

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) - k \left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \right) \Rightarrow \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \left(1 - \frac{k}{1 + \tau p} \right)$$

$$k > 1 \Rightarrow \varepsilon = -\infty$$

$$k = 1 \Rightarrow \varepsilon = t$$

$$k < 1 \Rightarrow \varepsilon = +\infty$$

2.4.1.2.2 réponse impulsionnelle

C'est la réponse à une impulsion de Dirac $\delta(t)$. Comme $E(p) = 1$ alors

$$S(p) = \frac{k}{\tau(p + 1/\tau)} \Rightarrow s(t) = \frac{k}{\tau} e^{-t/\tau}$$

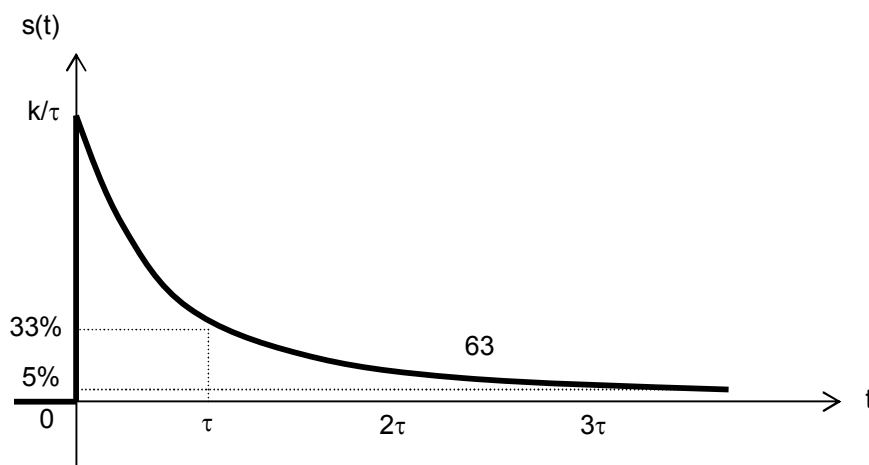


Figure 55- réponse impulsionnelle d'un premier ordre

La réponse impulsionnelle est encore une impulsion. Sa largeur (calculée au tiers de sa hauteur) est τ . La valeur résiduelle au bout de 3τ est 5%.

Conclusion : Un système du premier ordre est donc stable.

2.4.1.2.3 analyse harmonique

On envoie sur l'entrée du système un signal harmonique. Faisons $p = j\omega$ dans la fonction de transfert, il vient :

$$F(j\omega) = \frac{k}{1 + j\tau\omega} = \frac{k}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \text{ avec } \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

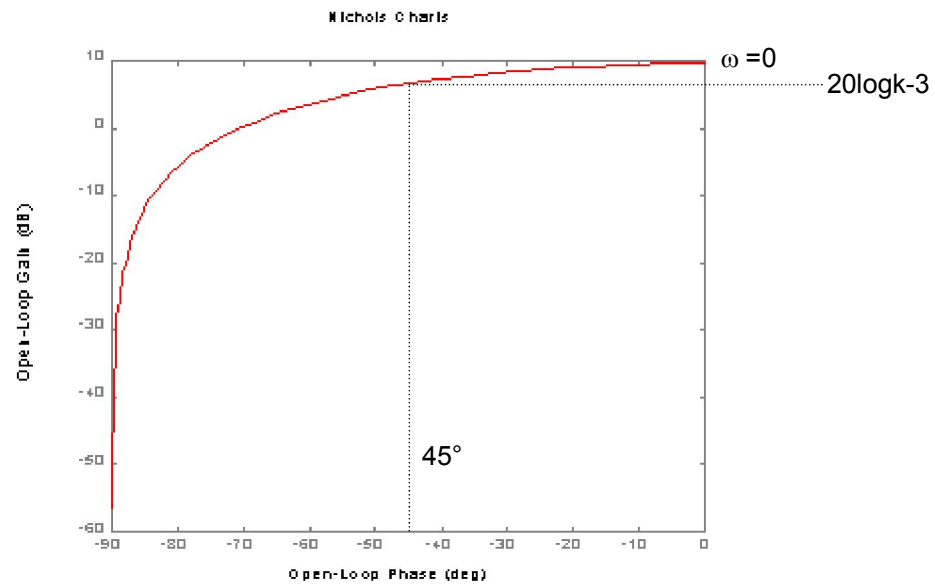
C'est un nombre complexe dont le module (gain statique) est :

$$|F(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} \text{ et l'argument (phase) est : } \arg[F(j\omega)] = -\arctan \frac{\omega}{\omega_c}$$

Représentation de Black-Nichols

Alors que Bode représente séparément le gain et la phase en fonction de ω , Black-Nichols trace le lieu dans le plan $[G, \Phi]$, ce qui impose de le graduer en ω et de l'orienter. G est exprimé en dB soit $G = 20 \log(|F(j\omega)|)$.

Tracé dans le plan de Nichols



Le système est entièrement caractérisé par :

- Son gain statique
- Sa pulsation de coupure à 3 dB ω_c . Pour cette pulsation, le gain vaut alors $20 \log k - 3$ soit $k\sqrt{2}$ en valeur naturelle.
- Sa bande passante définie à - 3 dB, donc $BP = f_c$.

Conclusion : un système du premier ordre est un filtre passe-bas.

2.4.1.3 relation temps-frequence

Le comportement dynamique d'un système à constante de temps est entièrement décrit par sa constante de temps τ . Cette dynamique est aussi appelé **espace fréquentiel** puisque $\omega_c = 1/\tau$ et donc:

$$f_c = \frac{1}{2\pi \tau}$$

Conclusions :

- un système rapide est un système qui a une bande passante large (faible constante de temps).
- un système lent a une bande passante étroite.

- d'autre part, un système du 1^{er} ordre est aussi un filtre passe-bas. Tous les signaux d'entrée de pulsations supérieures à ω_c ne seront donc pas transmis. Par exemple un enregistreur de fréquence de coupure 2Hz ne peut pas enregistrer des signaux de fréquences 10Hz.

Application : On désire enregistrer des signaux carrés dont le temps de montée est de 0,2 μ s. Pour cela, on utilise un oscilloscope dont la fonction de transfert est assimilable à un premier ordre. Quelle doit être sa bande passante ?

Nous avons vu que $t_m = 2,3 \tau = 0,2 \cdot 10^{-6}$ s ce qui impose $\tau = 0,09 \cdot 10^{-6}$ s
soit $f_c = 1,83$ MHz.

Si les signaux ont une fréquence supérieure à 2 MHz, l'oscilloscope ne peut pas répondre : en fait, on mesurera le temps de montée de celui-ci.

Remarque :

Les produits $t_m f_c$ ou $t_r f_c$ sont constants : $\begin{cases} t_m f_c = 0,36 \\ t_r f_c = 0,47 \end{cases}$ et donc indépendants de la constante de temps τ .

2.4.2 processus intégrateur

définition :

C'est un cas particulier du système du premier ordre. Il est régi par l'équation différentielle :

$$\tau \frac{ds}{dt} = k e(t)$$

Si les conditions initiales sont nulles, sa transformée de Laplace s'écrit :

$\tau p S(p) = k E(p)$ et dans ces conditions, la fonction de transfert du processus intégrateur s'écrit :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{\tau p}$$

2.4.2.1.1 exemples

condensateur pur

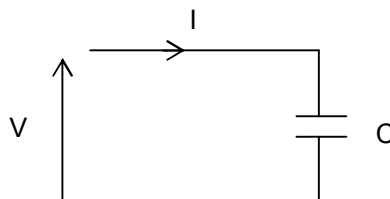
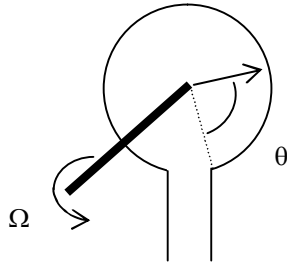


Figure 56- condensateur pur

Par définition, $v = \frac{1}{C} \int i dt$, donc si le condensateur est initialement déchargé :

$$\frac{V(p)}{I(p)} = \frac{1}{Cp}$$

Position angulaire d'un axe



Un axe est entraîné à la vitesse angulaire Ω et entraîne le curseur d'un potentiomètre. La relation entre déplacement angulaire θ et vitesse Ω est :

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \Omega(p) = p\Theta(p) \Rightarrow \frac{\Theta(p)}{\Omega(p)} = \frac{1}{p}$$

Application : Un moteur entraîne par l'intermédiaire d'un réducteur de rapport n une charge constituée par un radar de poursuite. Exprimer l'angle d'azimut θ_s du radar en fonction de la vitesse Ω du moteur.

On a le schéma suivant :

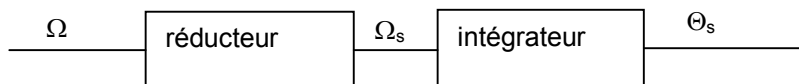


Figure 57- passage de la vitesse à la position angulaire

Dans ces conditions :

$$\frac{\Theta_s}{\Omega} = \frac{\Theta_s}{\Omega_s} \cdot \frac{\Omega_s}{\Omega} = \frac{1}{np}$$

2.4.2.2 Analyse temporelle

2.4.2.2.1 Réponse impulsionnelle

On applique une impulsion unité à l'entrée, d'où :

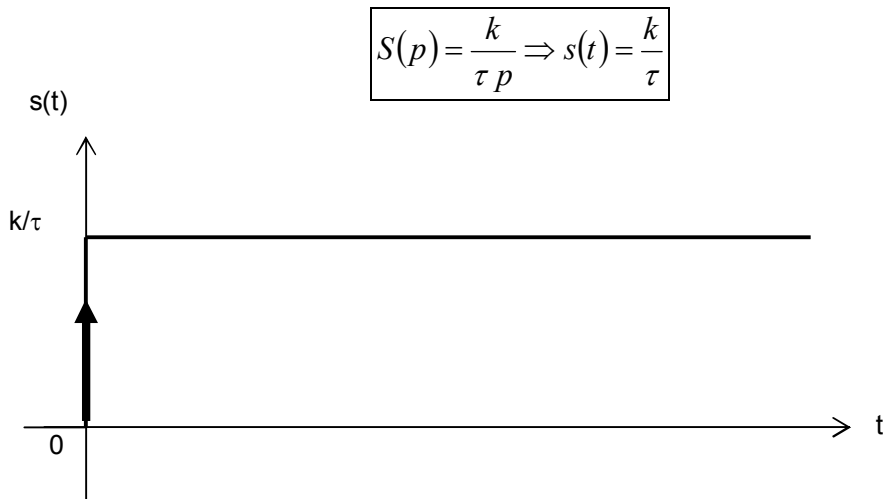


Figure 58- réponse impulsionnelle d'un intégrateur

La réponse impulsionnelle est un échelon. Le système ne revient pas à son état de repos. **L'intégrateur pur est donc un élément déstabilisateur.** On dit encore qu'il est asymptotiquement stable.

2.4.2.2.2 Réponse indicielle

Comme $E(p) = \frac{1}{p}$ on obtient $S(p) = \frac{k}{\tau p^2}$ d'où $s(t) = \frac{k}{\tau} t$

La réponse à un échelon est une rampe. Le régime permanent tend vers l'infini. C'est la confirmation de l'instabilité.

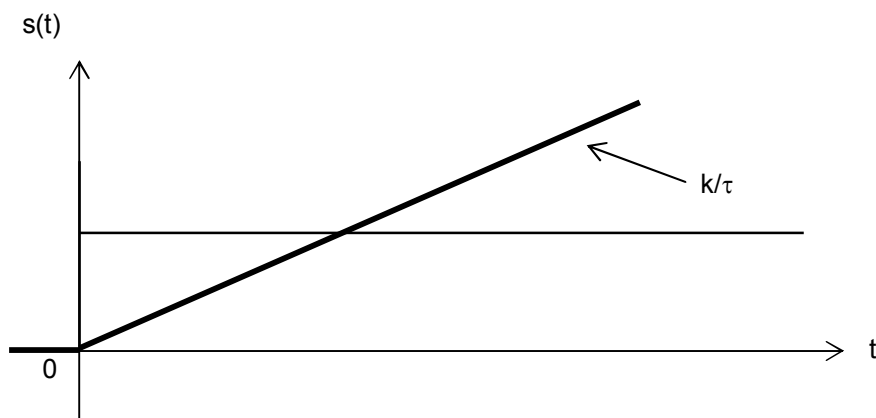


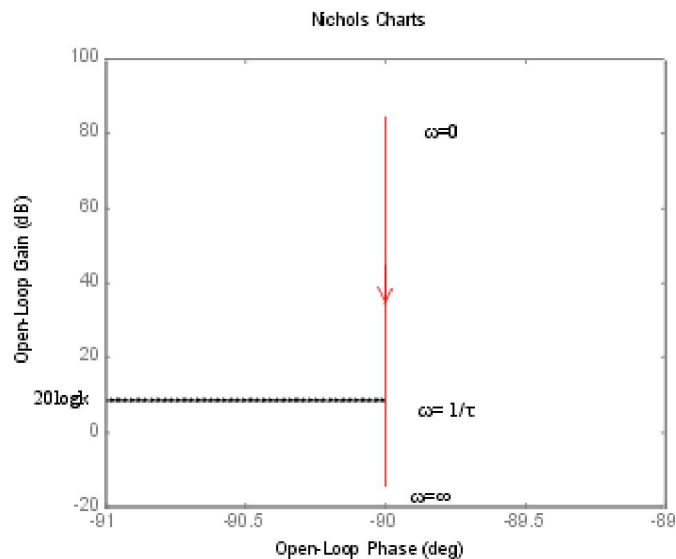
Figure 59- réponse indicielle d'un intégrateur

2.4.2.2.3 Analyse harmonique

On fait $p = j\omega$ dans la fonction de transfert :

$$F(j\omega) = \frac{k}{j\tau\omega} \Rightarrow |F(j\omega)| = \frac{k}{\tau\omega} \text{ et } \arg[F(j\omega)] = -\frac{\pi}{2} \forall \omega$$

2.4.2.2.4 Réponse dans le lieu de Black



2.4.3 Exercices sur les systèmes du premier ordre :

1. Un enregistreur à plumes (voir photographie ci après) admet pour fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{2,1}{420 + 1,72 p} \text{ (en mètre par volt)}$$

a) Déterminer sa constante de temps et son gain statique.

b) Quelle est sa fréquence de coupure à 3 dB ?

c) Quel est son temps de réponse à un échelon de tension ?

La tension à enregistrer, sur cet enregistreur, est un échelon de tension d'amplitude E auquel se superpose un bruit parasite sinusoïdal $x = x_0 \sin \omega_0 t$

d) Calculer littéralement la réponse de l'enregistreur à ce signal bruité.

e) Discuter en comparant ω_0 à $1/\tau$.

f) On a $E = 10$ volts, $x_0 = 1$ V et $f_0 = 400$ Hz. Déterminer la réponse de l'enregistreur au signal bruité.

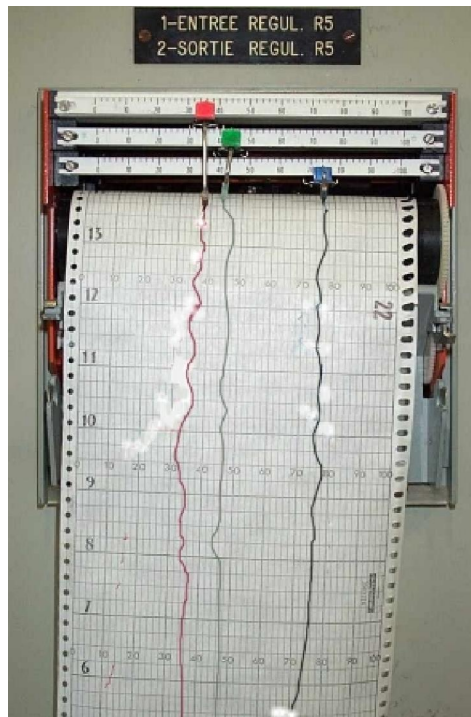
Réponse :

a) $\tau = 1,72/420 = 4,1$ ms et $k = 5 \cdot 10^{-3}$ m/V ; b) $f_c = 38,9$ Hz ; c) $t_r = 12,3$ ms.

d) Le signal à enregistrer a pour expression : $e(t) = E + x_0 \sin \omega_0 t$. Le système étant linéaire, la réponse à ce signal est la somme des réponses aux signaux élémentaires le constituant; une fois le transitoire terminé, c'est donc la superposition d'un échelon d'amplitude kE et d'un signal sinusoïdal de la forme $\frac{kx_0}{\sqrt{1+\tau^2\omega_0^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

e) Un premier ordre est un filtre passe-bas : donc si $\omega_c \ll \omega_0$ alors le bruit est filtré.

f) On voit que $f_c \ll f_0$, donc $s(t) \approx 0,05 (1 - e^{-t/0,0041})$



Enregistreur à plumes

2. La réponse d'un système à un échelon unité est $s(t) = 2(1 - e^{-2t})$. Quelle est sa réponse à une rampe unité ?

Régime permanent : $s(t) = 2$ et régime transitoire $s(t) = -2e^{-2t}$:

Le régime permanent donne le gain statique $k = 2/1=2$.

Le régime transitoire donne la constante de temps $\tau = 1/2=0,5$ s.

D'où

$$F(p) = \frac{2}{1+0,5p} \Rightarrow S(p) = \frac{2}{p^2(1+0,5p)} = 2 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{0,5}{p} + \frac{0,5}{1+0,5p} \right) \Rightarrow s(t) = 2 (t - 0,5 + 0,5 e^{-2t})$$

2.5 Systèmes linéaires continus du second ordre

Définition :

Un système de second ordre est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_0 e(t)$$

Pour des conditions initiales nulles, la transformée de Laplace est :

$$a_2 p^2 S(p) + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_0 E(p) \Rightarrow F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

Cette fonction de transfert peut encore s'écrire :

$$F(p) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0} p + \frac{a_2}{a_0} p^2}$$

On peut identifier les paramètres de l'expression précédente de la manière suivante :

- $k = \frac{b_0}{a_0}$ où on reconnaît le **gain statique**.
- $\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ est la **pulsation propre non amortie**.
- $\xi = \frac{a_1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_0 \cdot a_2}}$ est le **coefficient d'amortissement**.

La forme canonique de F(p) s'écrit alors :

$$F(p) = \frac{k}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

ξ est un coefficient sans dimension, alors que ω_n est homogène à une pulsation et s'exprime en rd/s.

Exemples : Circuit RLC

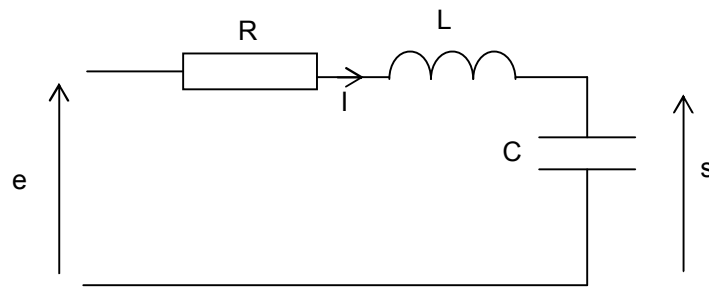


Figure 60- circuit RLC

On peut écrire : $e = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + s$ or $i = C \frac{ds}{dt} \Rightarrow e = LC \frac{d^2s}{dt^2} + RC \frac{ds}{dt} + s$

En prenant la transformée de Laplace de cette expression (considérant des conditions initiales nulles), il vient :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{LC p^2 + RC p + 1}$$

Identifions les valeurs de ω_n et ξ :

$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la **pulsation propre** d'un circuit oscillant LC (c'est à dire sans résistance). Dans un tel circuit, toute l'énergie disponible s'échangerait sans perte entre L et C avec une fréquence $f = \frac{\omega_n}{2\pi}$. Mais étant donné la présence de la résistance R, de l'énergie se dissipe par effet Joule. R joue le rôle d'amortisseur. Ceci explicite l'expression : "pulsation propre non amortie".

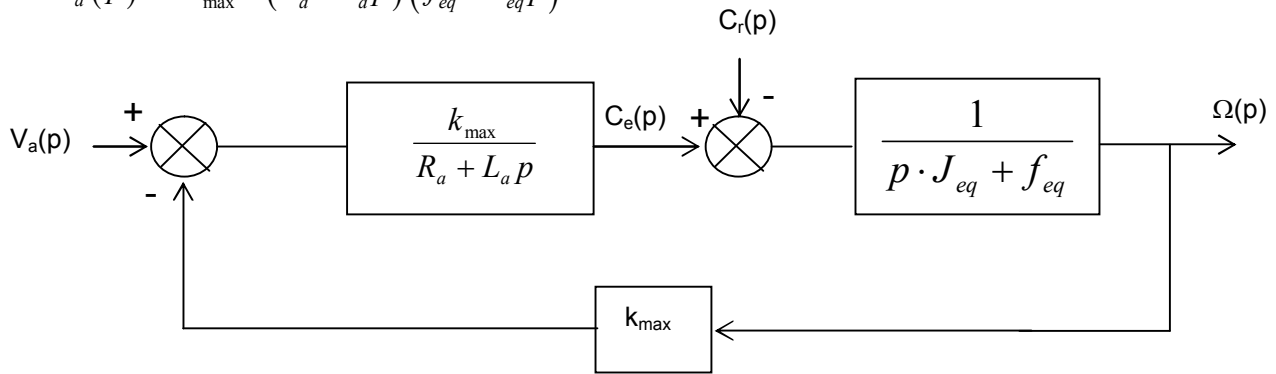
$\xi = \frac{R}{2\sqrt{L/C}}$ est le **facteur d'amortissement**. Il est proportionnel à R, donc à un ξ faible va correspondre une dissipation d'énergie faible lors de chaque échange. Si R est bien choisie, le temps au bout duquel l'énergie sera entièrement dissipée peut être assez court.

Le circuit RLC est appelé circuit résonnant, il est en général réglé pour de faibles valeurs de R, donc de faible valeur de ξ également, de manière à obtenir $\omega_R \approx \omega_n$.

Moteur cc avec sa charge :

Reprenant le schéma du moteur à courant continu piloté par variation de la tension d'induit et modélisé au 2.3.3.1.3, nous pouvons écrire :

$$\frac{\Omega(p)}{V_a(p)} = \frac{k_{\max}}{k_{\max}^2 + (R_a + L_a p)(f_{eq} + J_{eq} p)}$$



On a donc :

$$F(p) = \frac{k_{\max}}{k_{\max}^2 + f_{eq} R_a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{J_{eq} R_a + L_a f_{eq}}{k_{\max}^2 + f_{eq} R_a} p + \frac{J_{eq} L_a}{k_{\max}^2 + f_{eq} R_a} p^2}$$

On voit donc que :

$$k = \frac{k_{\max}}{k_{\max}^2 + f_{eq} R_a}; \omega_n = \sqrt{\frac{k_{\max}^2 + f_{eq} R_a}{J_{eq} L_a}}; \xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{J_{eq} R_a + L_a f_{eq}}{\sqrt{J_{eq} L_a (k_{\max}^2 + f_{eq} R_a)}}$$

2.5.1 Analyse temporelle

La sortie d'un système du second ordre est donné par :

$$S(p) = \frac{k}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} E(p)$$

Le problème est de décomposer S(p) en fraction rationnelles. Cette décomposition dépend du trinôme :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2} \rightarrow p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2$$

Le discriminant réduit s'écrit : $\Delta' = \omega_n^2 (\xi^2 - 1)$

Ainsi :

- Si $\xi \geq 1$, le trinôme admet 2 racines réelles et dans ce cas la réponse est apériodique.
Les deux racines p_1 et p_2 sont telles que : $p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2 = (p - p_1)(p - p_2)$,
d'où :

$$\begin{cases} p_1 = \omega_n \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 = \omega_n \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases} \text{ et en terme de constantes de temps } \begin{cases} \tau_1 = \frac{1}{\omega_n \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} \\ \tau_2 = \frac{1}{\omega_n \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} \end{cases}$$

- si $\xi < 1$, le trinôme admet deux racines complexes conjuguées et la réponse est oscillatoire amortie. $S(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2} = \frac{k\omega_n^2}{(p - \underline{p}_1)(p - \underline{p}_1^*)}$

\underline{p}_1 et \underline{p}_1^* sont complexes conjugués tels que :

$$\underline{p}_1 = \omega_n \left(-\xi + j\sqrt{1 - \xi^2} \right) \text{ et } \underline{p}_1^* = \omega_n \left(-\xi - j\sqrt{1 - \xi^2} \right)$$

2.5.1.1 Réponse impulsionnelle

Cas où $\xi \geq 1$. Comme $E(p) = 1$, $S(p)$ se décompose en éléments simples sous la forme :

$$S(p) = \frac{k}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = \frac{k}{\tau_1 - \tau_2} \left[\frac{1}{p + 1/\tau_1} - \frac{1}{p + 1/\tau_2} \right], \text{ ce qui implique :}$$

$$\boxed{s(t) = \frac{k}{\tau_1 - \tau_2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)}$$

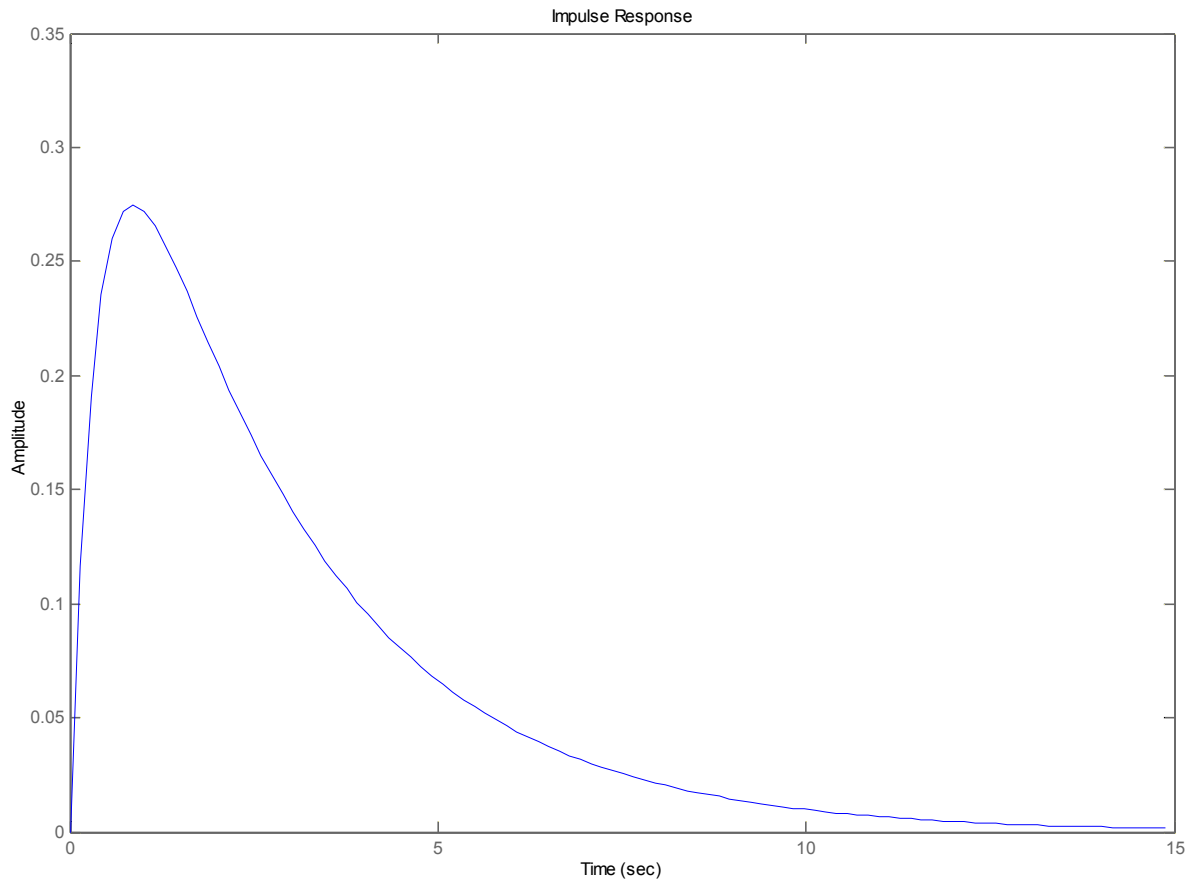


Figure 61- réponse impulsionnelle d'un 2^e ordre ($\xi \geq 1$)

Le système revient au repos, il est donc stable.

Cas où $\xi < 1$

$S(p)$ ne se décompose pas, donc :

$$S(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{k\omega_n^2}{(p + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2 - \xi^2\omega_n^2}$$

à mettre sous la forme : $\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$;

on pose $\omega^2 = \omega_n^2(1 - \xi^2) \Rightarrow \omega = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ et $a = \xi\omega_n$

$$s(t) = \frac{k\omega_n e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t)$$

l'allure de la réponse est la suivante :

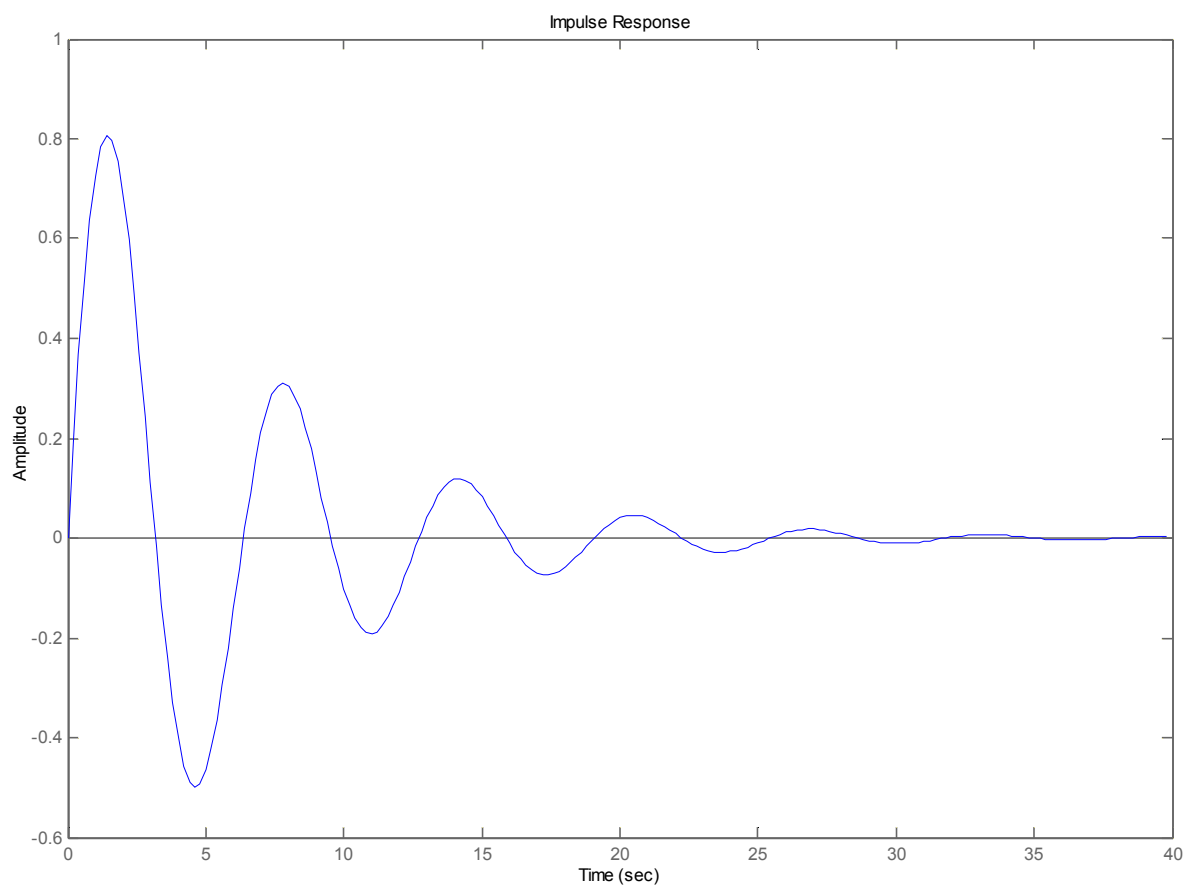


Figure 62- réponse impulsionnelle d'un 2^e ordre ($\xi < 1$)

2.5.1.2 Réponse en vitesse

Cas où $\xi \geq 1$

L'entrée en rampe admet pour transformée de Laplace $1/p^2$, après décomposition en éléments simples, il vient :

$$S(p) = k \left[\frac{1}{p^2} - \frac{\tau_1 + \tau_2}{p} + \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{1}{p + 1/\tau_1} - \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{1}{p + 1/\tau_2} \right]$$

$$\Rightarrow s(t) = k \left[t - (\tau_1 + \tau_2) + \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_1^2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2^2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right]$$

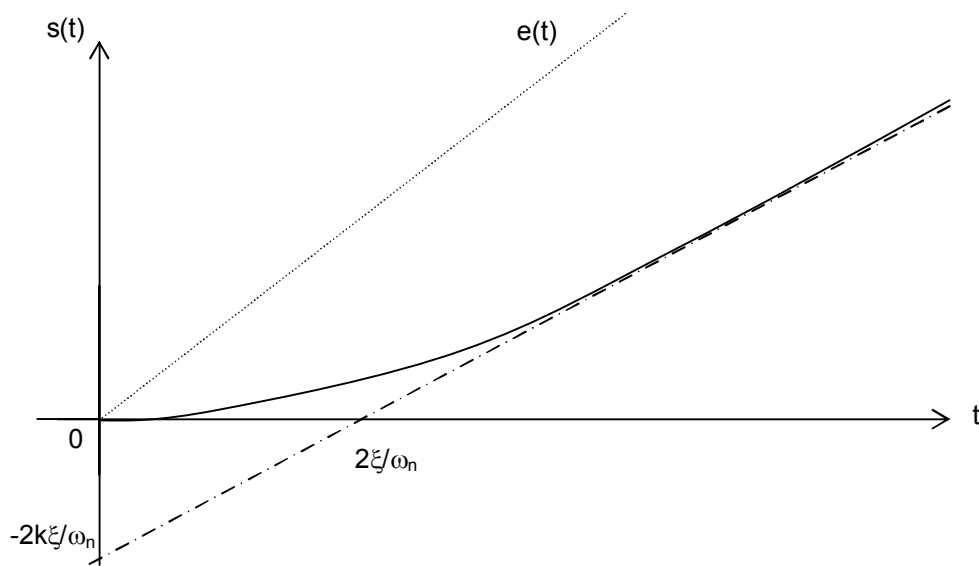


Figure 63- réponse en vitesse ($\xi \geq 1$)

On constate qu'entrée et sortie s'écartent l'une de l'autre en régime permanent. Le système du 2^{ème} ordre ne suit pas en vitesse sauf lorsque $k = 1$. Dans ce cas, l'écart reste constant et égal à $-\frac{2\xi}{\omega_n}$. Cet écart est appelé **erreur de traînage**.

Cas où $\xi < 1$

L'expression de la sortie s'écrit :

$$S(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)} = k \left[\frac{1}{p^2} - \frac{2\xi}{\omega_n p} + \frac{\frac{2\xi}{\omega_n} p + 4\xi^2 - 1}{(p + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)} \right]$$

$$\Rightarrow s(t) = k \left(t - \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \cos \left[\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t - \arctan(2\xi \sqrt{1 - \xi^2}) \right] \right)$$

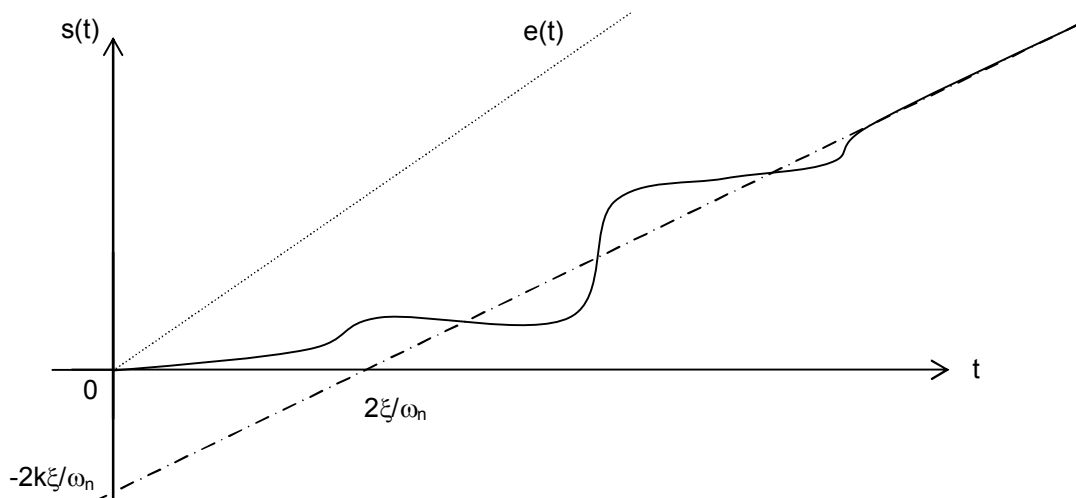


Figure 64- réponse en vitesse d'un 2^e ordre ($\xi < 1$)

2.5.1.3 Réponse indicielle

Cas où $\xi \geq 1$

La décomposition en éléments simples donnent :

$$S(p) = \frac{k}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = k \left[\frac{1}{p} - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{1}{p + 1/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{1}{p + 1/\tau_2} \right]$$

$$\Rightarrow s(t) = k \left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$$

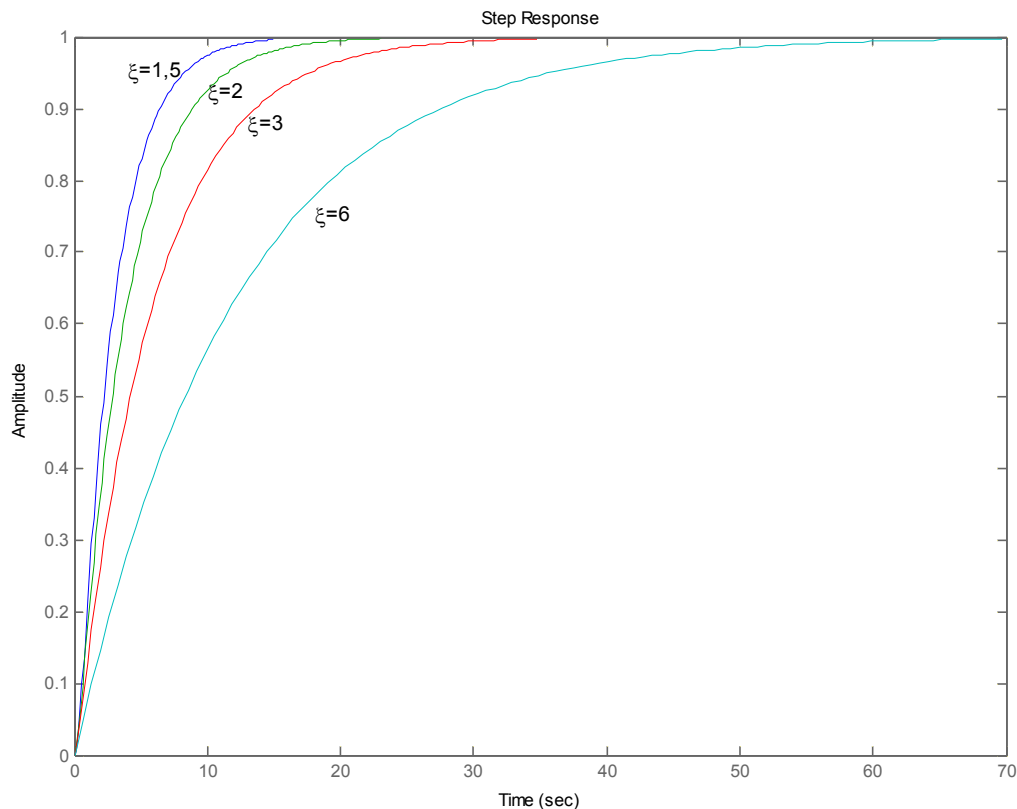


Figure 65- réponse indicielle d'un 2^e ordre ($\xi \geq 1$)

L'allure dans le temps de $s(t)$ est liée à $\tau_1 - \tau_2$ et donc à ξ . La dérivée est nulle à l'origine. Plus ξ augmente, plus la réponse est aplatie.

Cas où $\xi < 1$

On a maintenant :

$$S(p) = \frac{k\omega_n^2}{p(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)} = k \left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2\xi\omega_n}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \right]$$

donc :

$$s(t) = k \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \phi) \right] \text{ avec } \phi = -\arctan \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

La réponse indicielle est donc oscillatoire amortie.

Quatre paramètres sont intéressants :

- le temps de montée t_m
- le temps du premier maximum t_{pic}
- le dépassement D exprimé en % de la valeur finale
- la pseudo-période T_p

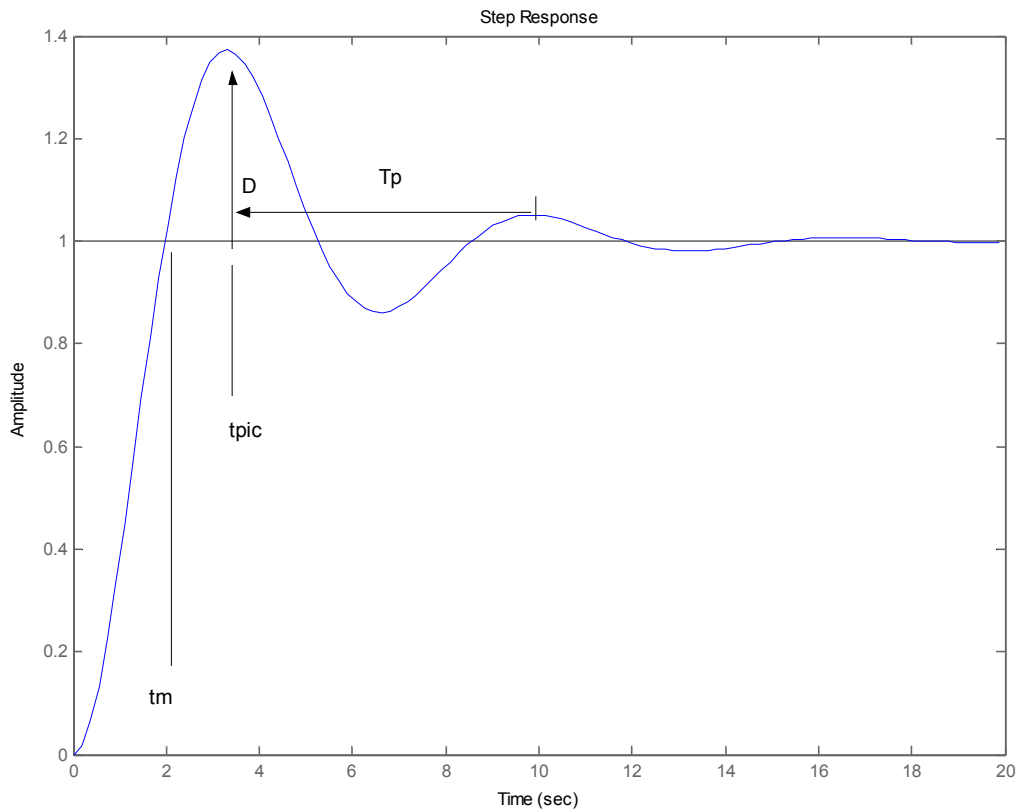


Figure 66- réponse indicielle d'un 2^e ordre ($\xi < 1$)

Ces quatre paramètres peuvent être calculés aisément.

2.5.1.3.1 Calcul du temps de montée

C'est le temps mis pour que $s(t)$ atteigne la valeur k , soit :

$$k \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t_m}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t_m + \phi) \right] = k \Rightarrow \frac{e^{-\xi \omega_n t_m}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t_m + \phi) = 0$$

L'exponentielle n'étant jamais nulle, il vient :

$$\cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t_m + \phi) = 0 \Rightarrow \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t_m + \phi = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

A chaque valeur de n correspond un point d'intersection de la réponse avec la droite d'équation s = k. Le premier point correspond à n = 0, donc :

$$\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t_m + \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_m = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\xi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \right)$$

2.5.1.3.2 Calcul du temps du premier maximum

Les valeurs de t qui annuleront la dérivée s'(t), correspondent aux temps des minima et maxima de la réponse s(t). Calculons cette dérivée :

$$\frac{ds}{dt} = k \omega_n \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[\xi \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \phi) + \sqrt{1-\xi^2} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \phi) \right]$$

Elle s'annule pour : $\xi \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \phi) + \sqrt{1-\xi^2} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \phi) = 0$

Ou encore : $\tan(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \phi) = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \tan \phi$

Donc : $\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \phi = \phi + n\pi \Rightarrow t_k = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$

Si n est pair, t_k correspond à un minimum, alors que si n est impair, il correspond à un maximum. Le premier maximum a donc lieu pour n = 1, donc :

$$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

2.5.1.3.3 Calcul du dépassement D

D'une manière générale, il est possible de calculer la hauteur des minima et maxima, en remplaçant t par t_k dans l'expression de s(t). On a :

$s_k = k \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t_k}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t_k + \phi) \right]$, en remplaçant t_k par sa valeur :

$$s_k = k \left[1 - \frac{e^{-\xi \frac{n\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(n\pi + \phi) \right]$$

La hauteur des minima (n pair) est donc donnée par :

$$s_{kMINI} = k \left(1 - e^{-\xi \frac{n\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right) \text{ puisque } \cos(\phi) = \sqrt{1-\xi^2}$$

et la hauteur des minima (n impair) est :

$$s_{kMAXI} = k \left(1 + e^{-\xi \frac{n\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right)$$

Le premier dépassement a lieu pour n = 1, donc :

$$D = s_{1MAX} - k = s_{kMINI} = k e^{-\xi \frac{n\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Le dépassement relatif est D/k, que l'on exprime encore en un pourcentage par rapport à la valeur finale :

$$D\% = 100 e^{-\xi \frac{n\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

2.5.1.3.4 Calcul de la pseudo période

C'est le temps qui s'écoule entre deux maxima successifs (ou deux minima), soit $T_p = t_{2n+1} - t_{2n-1}$. Mesurée entre les deux premiers, celle-ci a pour expression :

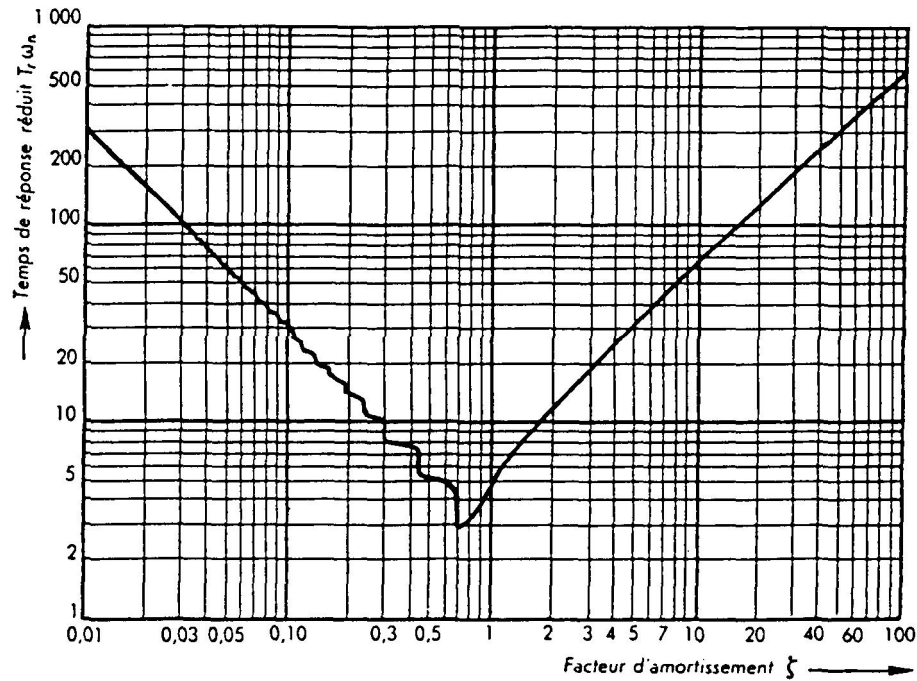
$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

2.5.1.4 Temps de réponse d'un système du second ordre

Afin de déterminer t_r , il faut déterminer le temps au bout duquel la sortie vaut l'entrée indicielle à 5 % près, soit les équations :

$$\begin{cases} \left[k \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \phi) \right] \right] \leq k(1-0,05) \text{ si } \xi < 1 \\ \left[k \left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] \right] \leq k(1-0,05) \text{ si } \xi \geq 1 \end{cases}$$

Ces équations étant difficile à résoudre, on utilise des abaques comme celle ci-dessous pour déterminer le temps de réponse.



2.5.2 Analyse harmonique

La fonction de transfert harmonique d'un système du second ordre s'écrit :

$$\underline{F(j\omega)} = \frac{k}{1 + 2\xi j \frac{\omega}{\omega_n} + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Le module et l'argument de ce nombre complexe sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} |F(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \\ \arg[F(j\omega)] = -\arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \end{array} \right.$$

2.5.2.1 Etude du gain :

Calculons la dérivée du gain par rapport à $\frac{\omega}{\omega_n}$:

$$\frac{d[F(j\omega)]}{d\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} = -\frac{1}{2} \cdot k \left[4\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3 - 4\frac{\omega}{\omega_n}(1-2\xi^2) \right] \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}$$

La dérivée s'annule pour les valeurs de $\frac{\omega}{\omega_n}$ annulant $4\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3 - 4\frac{\omega}{\omega_n}(1-2\xi^2)$.

$$4\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3 - 4\frac{\omega}{\omega_n}(1-2\xi^2) = \frac{\omega}{\omega_n} \left[4\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 4(1-2\xi^2) \right]$$

On obtient donc :

Une seule racine $\frac{\omega}{\omega_n} = 0$ si $\xi > 0,7$

Deux racines $\frac{\omega}{\omega_n} = 0$ et $\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1-2\xi^2}$ si $\xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$

2.5.2.2 Pulsation de résonance

Pour $\xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors $\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1-2\xi^2} = \frac{\omega_R}{\omega_n}$ La réponse présente une résonance pour la pulsation :

$$\boxed{\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}}$$

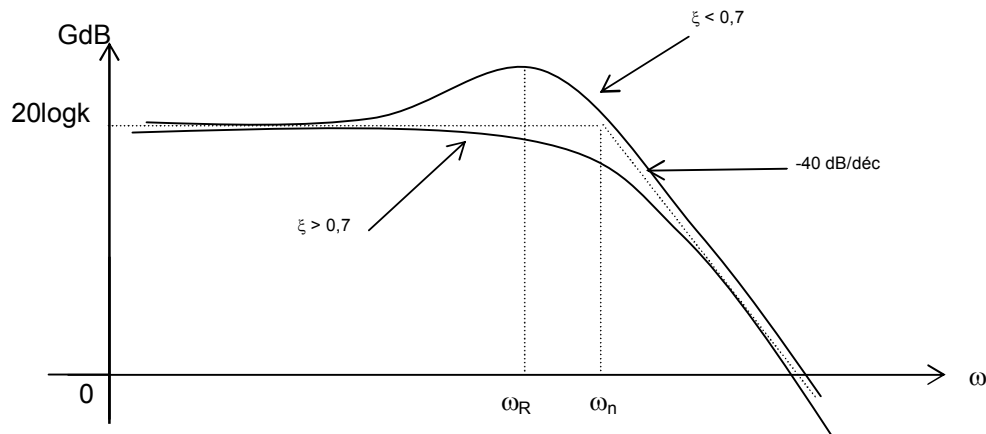


Figure 67- réponse harmonique d'un 2^e ordre

La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre non amortie , mais elle s'en approche de plus en plus lorsque ξ diminue. Pour la valeur limite $\omega_R = \omega_n$, c'est à dire si $\xi = 0$, le système est alors un oscillateur libre.

2.5.2.3 Facteur de résonance

Pour $\xi \leq 0,7$, l'amplitude de la résonance est donné par :

$$\left| \underline{F(j\omega)} \right|_{MAX} = \frac{k}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}. \text{ On appelle facteur de résonance le rapport } M = \frac{\left| \underline{F(j\omega)} \right|_{MAX}}{k},$$

soit :

$$M = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\text{ou en dB : } M_{dB} = 20 \log \left| \underline{F(j\omega)} \right|_{MAX} - 20 \log k$$

Attention : le facteur de résonance est différent du facteur de qualité des électroniciens défini pour

$$\omega = \omega_n \text{ et valant } Q = \frac{\left| \underline{F(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_n}}{k} = \frac{1}{2\xi}.$$

Pour que ces deux facteurs soient égaux, il faut $\xi < 0,1$. Dans ce cas, ω_R et ω_n sont quasiment confondues.

2.5.2.3.1 Pulsation de coupure

Pour la pulsation de coupure ω_c , le gain chute de 3 dB, ce qui correspond à une division par $\sqrt{2}$ du gain statique en valeur naturelle. On a donc :

$$\frac{k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{k}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 + 2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2(2\xi^2 - 1) - 1 = 0$$

Cette équation bicarrée admet deux solutions en $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$ dont on ne garde que la positive, soit :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = 1 - 2\xi^2 + \sqrt{(2\xi^2 - 1)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \omega_c = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{(2\xi^2 - 1)^2 + 1}}$$

2.5.2.3.2 Etude du déphasage

$$\text{On a } \phi = \arg[F(j\omega)] = -\arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = - \frac{2\xi \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)}{4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2}$$

La dérivée étant toujours négative, la variation de ϕ est donc monotone décroissante. Donc $\forall \xi$:

$$\phi \rightarrow 0 \text{ quand } \frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow 0$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2} \text{ quand } \frac{\omega}{\omega_n} = 1$$

$$\phi = -\pi \text{ quand } \frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow \infty$$

Plus ξ diminue, plus la variation de phase est brutale autour de $\omega = \omega_n$.

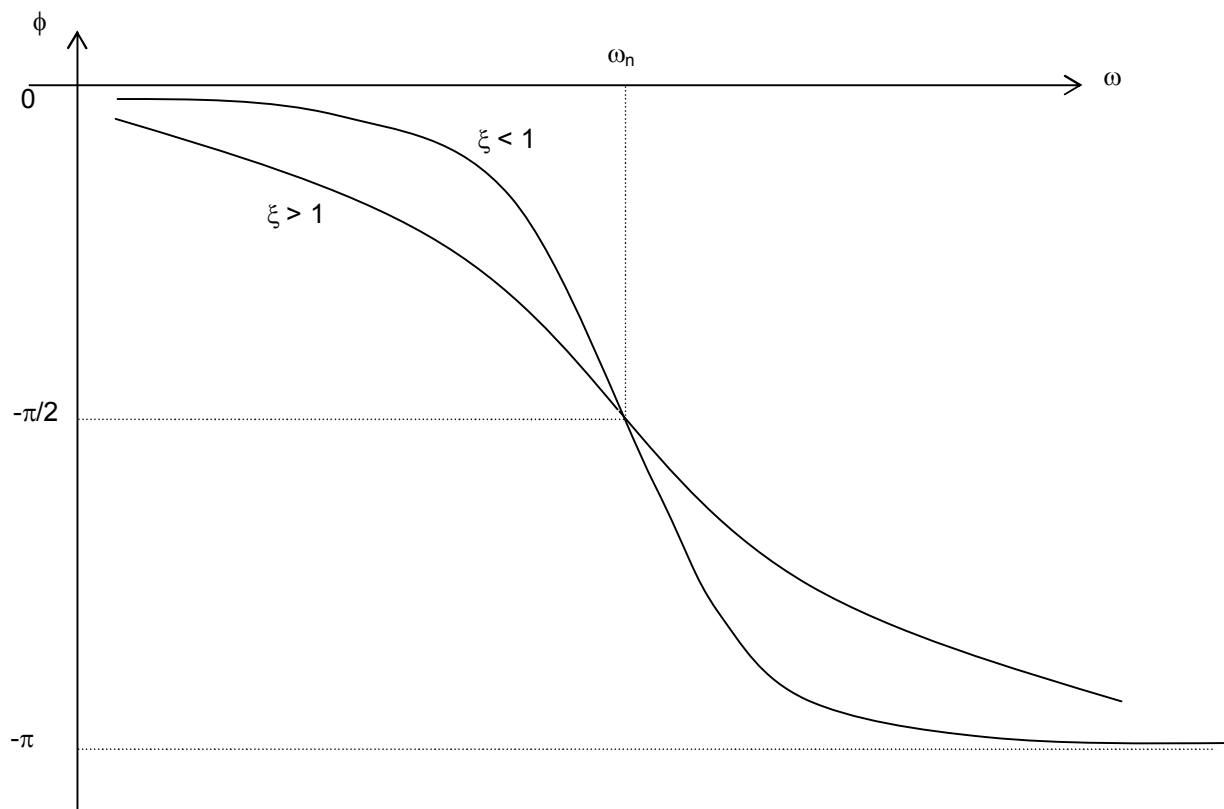


Figure 68- variation de l'argument

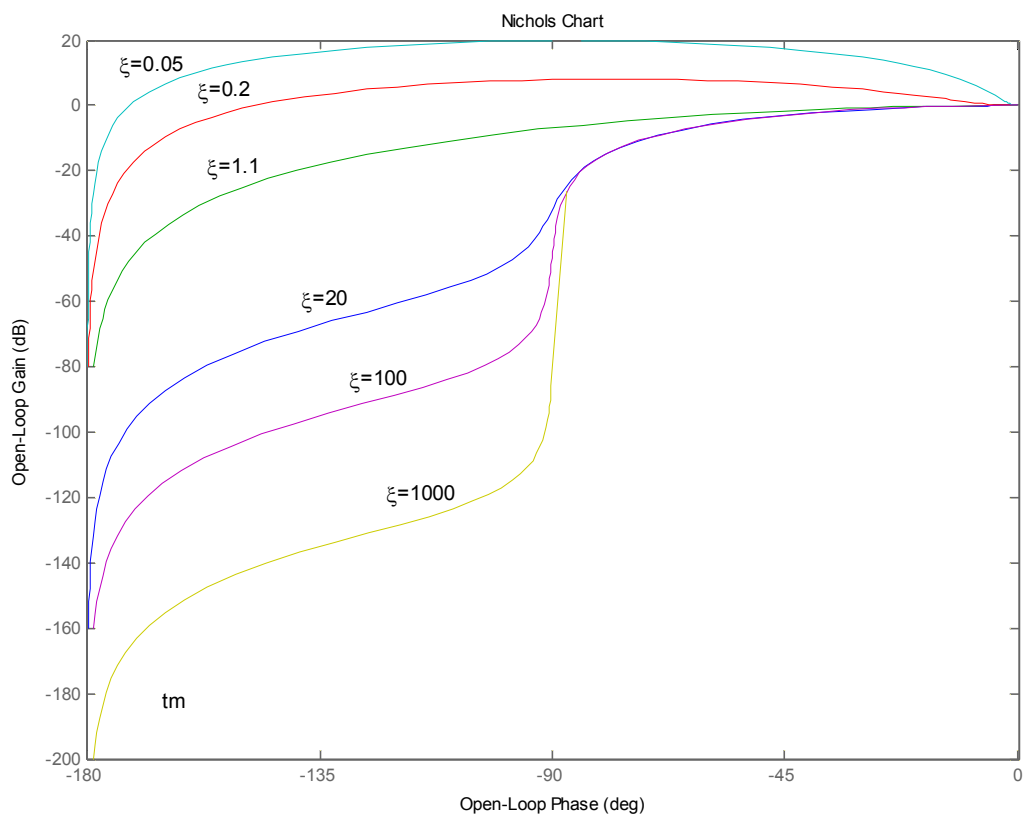


Figure 69- évolution du lieu de Black en fonction de ksi

2.5.2.3.3 Conclusion

Le tableau suivant permet la détermination des caractéristiques d'un système du second ordre à partir de la connaissance de la réponse indicielle ou de la réponse harmonique. Les valeurs ont été calculées à partir des formules élaborées dans les paragraphes précédents.

Inversement ce tableau autorise aussi des opérations de synthèse d'un système du second ordre lorsque, par exemple, se trouvent fixés le dépassement D et l'un des temps définissant la rapidité (t_{pic} , t_r , t_m) :

- la valeur de D fixe celle de ξ ,
- la valeur de t_{pic} , de t_r ou de t_m fixe ω_n .

ξ	$t_m \omega_n$	$t_r \omega_n$ (5%)	$t_{pic} \omega_n$	$T_p \omega_n$	D%	$\frac{\omega_R}{\omega_n}$	$\frac{\omega_C}{\omega_n}$	$\frac{\omega_C}{\omega_R}$	MdB	ξ
0,1	1,68	30	3,16	6,31	73	0,99	1,54	1,56	14	0,1
0,15	1,74	20	3,18	6,36	62	0,98	1,53	1,56	10,5	0,15
0,2	1,81	14	3,21	6,41	53	0,96	1,51	1,57	8,1	0,2
0,25	1,88	11	3,24	6,49	44	0,94	1,48	1,59	6,3	0,25
0,3	1,97	10,1	3,29	6,59	37	0,91	1,45	1,61	4,8	0,3
0,35	2,06	7,9	3,35	6,71	31	0,87	1,42	1,63	3,6	0,35
0,4	2,16	7,7	3,43	6,86	25	0,82	1,37	1,67	2,7	0,4
0,45	2,28	5,4	3,52	7,04	21	0,77	1,33	1,72	1,9	0,45
0,5	2,42	5,3	3,63	7,26	16	0,71	1,27	1,80	1,2	0,5
0,55	2,58	5,3	3,76	7,52	12,6	0,63	1,21	1,93	0,7	0,55
0,6	2,77	5,2	3,93	7,85	9,5	0,53	1,15	2,17	0,3	0,6
0,65	3,00	5,0	4,13	8,27	6,8	0,39	1,08	2,74	0,1	0,65
0,7	3,29	3	4,40	8,80	4,6	0,14	1,01	7,14	0	0,7
0,75	3,66	3,1	4,75	9,50	2,84	-	0,94	-	-	0,75
0,8	4,16	3,4	5,24	10,5	1,52	-	0,87	-	-	0,8
0,85	4,91	3,7	5,96	11,93	0,63	-	0,81	-	-	0,85
0,9	6,17	4	7,21	14,41	0,15	-	0,75	-	-	0,9
0,95	9,09	4,1	10,06	20,12	0,01	-	0,69	-	-	0,95

Figure 70- caractérisation d'un système du second ordre

2.5.3 Exercices sur les systèmes du deuxième ordre :

1) Un système admet pour fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{2,5}{p^2 + 1,2p + 3}$$

Calculer les paramètres statiques et dynamiques de ce système ainsi que sa pulsation de coupure à 3 dB.

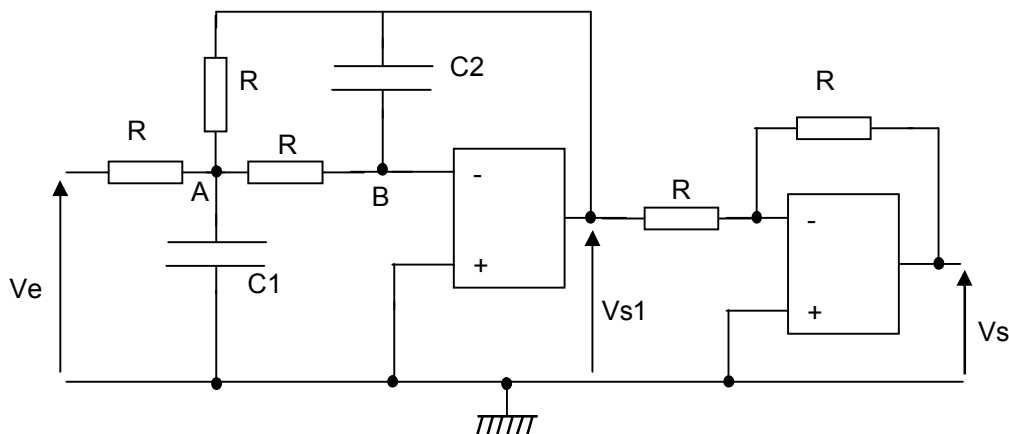
REPONSE : On écrit tout d'abord cette fonction de transfert sous sa forme canonique, soit :

$$F(p) = \frac{0,83}{1 + 0,3p + \frac{p^2}{3}}, \text{ on en déduit :}$$

- le gain statique $K = 0,83$,
- les paramètres dynamiques $\zeta = 0,26$ et $\omega_n = 1,73$ rd/s.

La pulsation de coupure est donnée par la formule du polycop page 70 § 2.5.4.3.2, on obtient $\omega_c = 2,56$ rd/s.

2. On considère le filtre actif ci-dessous dans lequel les amplificateurs opérationnels sont supposés parfaits :



- Calculer la fonction de transfert $\frac{Vs(p)}{Ve(p)}$ de ce filtre.
 - On prend $R = 200 \text{ k}\Omega$, $C1 = 2,5 \text{ }\mu\text{F}$, $C2 = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$. Calculer la pulsation propre du filtre ainsi que son coefficient d'amortissement.
 - En déduire les réponses harmoniques et indicielle de ce filtre.
- 2) On désire synthétiser un système du second ordre à partir du cahier des charges suivant :
- la sortie est égale à l'entrée en régime permanent, lorsque l'entrée est un échelon,

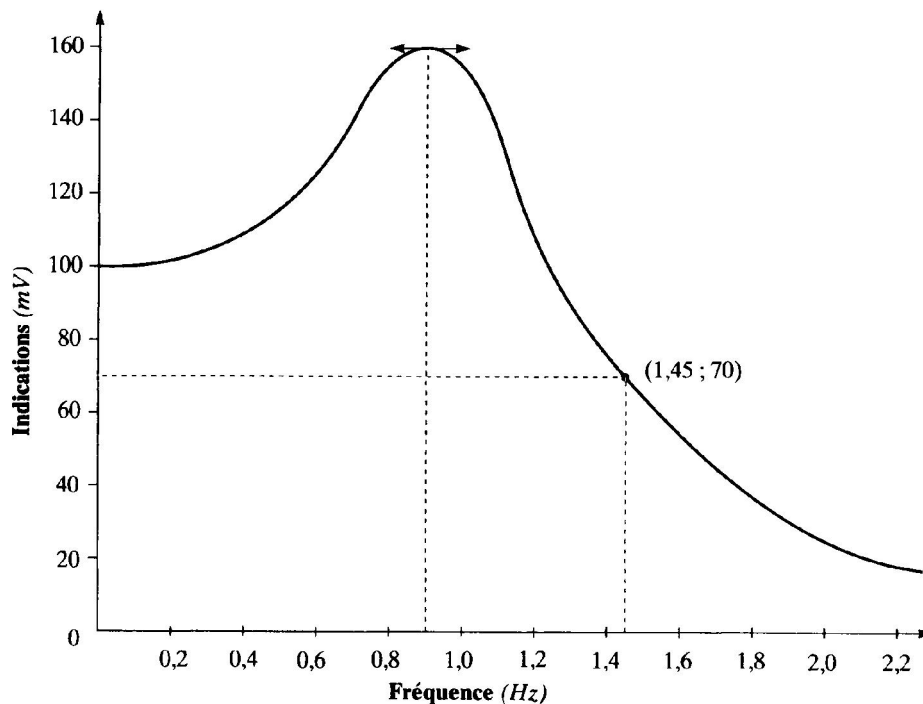
- pour une entrée en échelon, le dépassement doit être inférieur à 10%,
 - le temps de réponse doit être inférieur à 1 seconde et le temps de montée inférieur à 0,5 seconde,.
- a) Calculer les valeurs de K , ζ et ω_n qui valident ce cahier des charges.
 - b) On désire diviser le temps de montée par 5 sans changer les autres paramètres. Recalculer les valeurs précédentes.

Identification d'un système du deuxième ordre

On souhaite déterminer, à partir d'un essai expérimental, la fonction de transfert d'un système mécanique dont on sait qu'il peut être modéliser par un second ordre. Un essai statique a fait correspondre à une variation de l'entrée (une force) de 5 N une variation de la sortie (un déplacement) de 10 cm. Ensuite, une variation en échelon de l'entrée de la forme $e(t) = a[1 - u(t)]$ a permis d'enregistrer le régime dynamique de la sortie; nous avons relevé dans la réponse, un premier dépassement de 25% et une pseudo-période des oscillations d'environ 7 s.

- a) Donner l'expression de la fonction de transfert du second ordre en unités SI.
- c) Quel est le temps du premier maximum, le temps de montée, le temps de réponse de la réponse indicielle?

La figure ci-dessous représente les amplitudes des déviations obtenues sur un enregistreur soumis à des entrées sinusoïdales d'amplitude 20 mV et de fréquence variable.



L'enregistreur peut être considéré comme un système du second ordre.

- Donner les valeurs de son gain statique k , de son facteur d'amortissement ξ et de sa pulsation propre non amortie ω_n . Ecrire la fonction de transfert du système.
- Quelle est sa fréquence de coupure à -3 dB ?
- Tracer, dans le plan de Black, la courbe de réponse en fréquence de ce système du second ordre.
- Déduire du a) les paramètres de la réponse indicielle.
- La fonction de transfert, sous sa forme normalisée, fait apparaître un numérateur égal à 5. Montrer que, si le numérateur était de la forme $A(p - z_0)$, on aurait un écart entre l'entrée et la sortie nul (en régime permanent) pour des valeurs particulières de A et z_0 que l'on déterminera, l'entrée étant une rampe de pente a .

REPONSE

a) On lit sur le graphique : Indication (pour $f = 0$ Hz) = 100 mV; $f_{\text{résonance}} = 0,9$ Hz; facteur de résonance $m = 1,6$ soit $M_{\text{dB}} = 4$. On en déduit : $k = 100/20 = 5$.

De l'annexe (page 72 du polycop : caractérisation d'un système du second ordre) on

tire : $\xi = 0,33$ et $\omega_n = \frac{0,9 \times 2\pi}{0,88} \approx 6,4$ rd/s, d'où la fonction de transfert :

$$\frac{5}{1 + 0,1p + 0,024p^2} = G(j\omega).$$

b) On cherche la fréquence f_c pour laquelle :

$$\text{indication (pour } f = f_c) = \frac{\text{indication (pour } f = 0 \text{ Hz)}}{\sqrt{2}} \approx 70.$$

On lit sur le graphique $f_c \approx 1,45$ Hz. Ce résultat est confirmé par le tableau page 72 du polycop où pour $\xi = 0,33$ on lit :

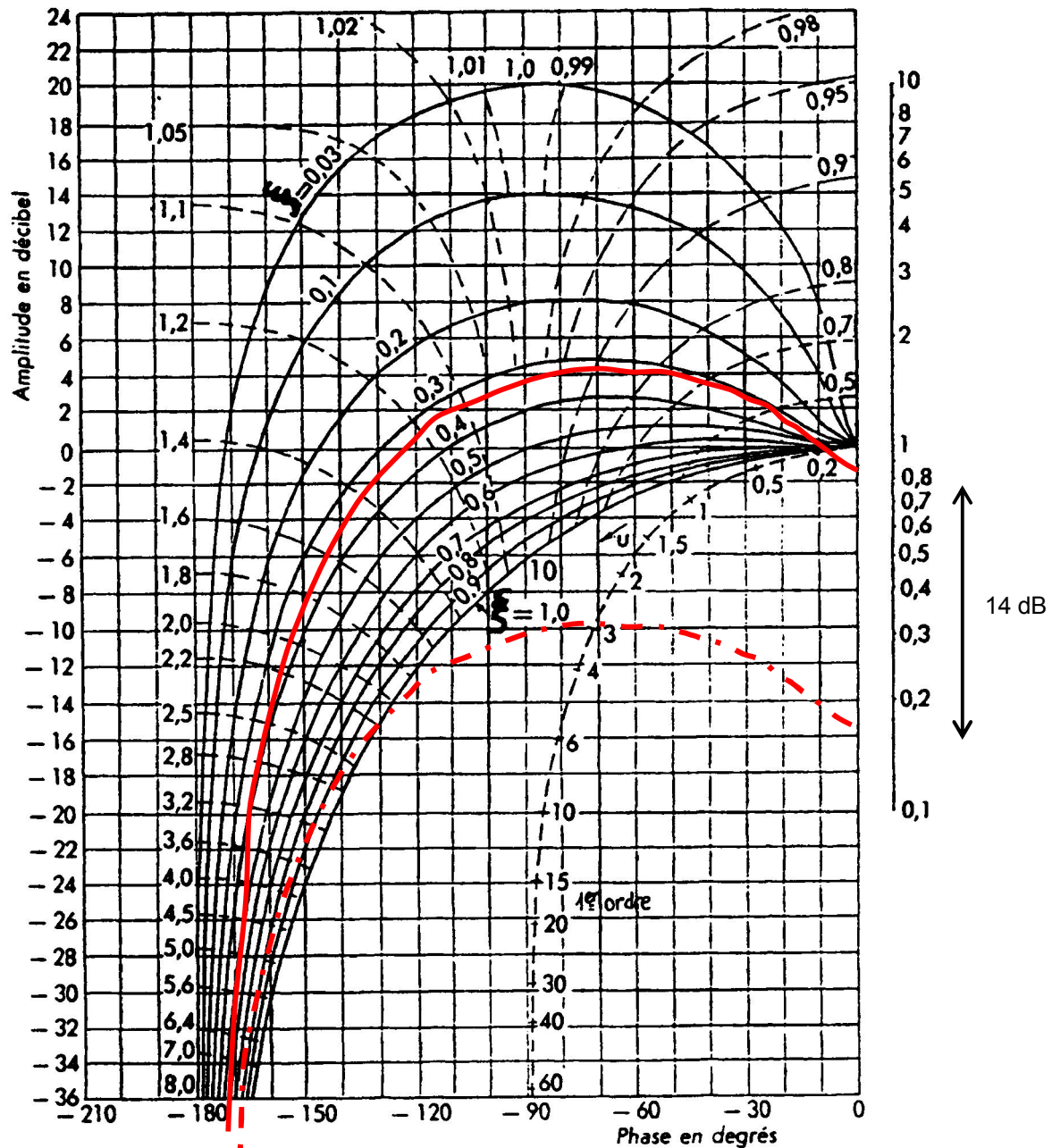
$$\frac{\omega_c}{\omega_n} = \frac{f_c}{f_n} \approx 1,43 \text{ et } \frac{\omega_c}{\omega_r} = \frac{f_c}{f_r} \approx 1,62 .$$

d) Le tracé de $G(j\omega)$ dans le plan de Black est celui donné ci-dessous pour $\xi = 0,33$ ($0,3 < \xi < 0,4$), après une translation verticale de $20 \log(k) \approx 14$ dB (due au gain statique).

LIEUX DE TRANSFERT DANS BLACK

Lieux de $\frac{1}{1 + 2\xi ju + (ju)^2}$ gradués en u ($\xi \leq 1$)

u : pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_n}$



en pointillés : le premier ordre

e) $D\% = 33$; $t_r = 1,4 \text{ s}$; $t_m = 0,31 \text{ s}$; $T_p = 1,04 \text{ s}$.

$$f) \quad \varepsilon(t)_{t \rightarrow \infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left[\underbrace{\frac{a}{p^2}}_{\text{entrée}} - \underbrace{\frac{a}{p^2} \cdot \frac{A(p - z_0)}{1 + 0,1p + 0,024p^2}}_{\text{sortie}} \right]$$

$$\varepsilon(t)_{t \rightarrow \infty} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p} \cdot \left[\frac{(1 + Az_0) + (0,1 - A)p + 0,024p^2}{1 + 0,1p + 0,024p^2} \right],$$

cette limite tend vers 0 (pour $p \rightarrow 0$) si

$$\left. \begin{array}{l} 1 + A \cdot z_0 = 0 \\ 0,1 - A = 0 \end{array} \right\} \text{ soit } A = 0,1 \text{ ET } z_0 = -10$$

d'où la fonction de transfert : $\frac{1 + 0,1p}{1 + 0,1p + 0,024p^2}$