Université Abdelhamid Ibn Badis – Mostaganem   Année 2012-2013
Faculté des Sciences et de la Technologie $2^{ième}$ Année LMD-ST(S :B, C)

Examen de Rattrapage" maths 3 "

Exercice N °1 :[10pts]

I) Étudier les séries de termes généraux:

(a) $V_n = e^{-n}\dfrac{n!}{n^n}$ (b) $W_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$ (c) $T_n = \dfrac{\cos\left(n^2\right)}{n^{\frac{3}{2}}}$

II) Considérons la série de terme général **:** $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

1. On pose $S_n = U_2 + U_3 + ... + U_n$. Calculer S_n .
2. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2} U_n$.

Exercice N °2 :[05pts]

1) Soit la série de terme général : $U_n(x) = x^n$

Donner le rayon de convergence et la somme de série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n(x)$.

2) Étudier les séries dérivées $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)$ et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} U_n''(x)$.

3) Développer en série entière la fonction: $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$

Exercice N °3 :[05pts]

Développer en série de Fourier la fonction f de période 2π définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x \in \left]0,\pi\right[\\ \pi + \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x \in \left]-\pi,0\right[\end{cases}$$

Rappel : Les coefficients de Fourier de f :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad \text{pour } n \geq 1$$

$2^{ième}$ Année LMD-ST

Corrigé de l'Examen de Rattrapage

Module : Maths 3

Exercice N °1 :[10pts]

I)

(a) En utilisant la règle de d'Alembert

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = e^{-(n+1)} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{e^{-n} n!} = e^{-1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{e^2} < 1$

La série $\sum\limits_n V_n$ est donc convergente.

(b) On a: $W_n = \frac{1}{1+n} + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+n}$

- La série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{1+n}$ diverge (car $\frac{1}{1+n} \sim \frac{1}{n}$ diverge)
- La série $\sum\limits_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+n}$ coverge par le critère de Leibniz car :

$U_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+n} = (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+n}$

1) $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

3) $(a_n)_n$ est décroissante car ($f : x \to \frac{\sqrt{x}}{1+x}$, $f'(x) = \frac{-(x-1)}{2\sqrt{x}(1+x)^2} < 0$)

$\sum\limits_{n \geq 1} W_n$ est somme d'une série divergente et d'une série convergente.

Elle est donc divergente.

(c) $|T_n| = \frac{|\cos(n^2)|}{n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

La série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2}$)

Par comparaison La série $\sum\limits_{n \geq 1} T_n$ est absolument convergente. La série $\sum\limits_{n \geq 1} T_n$ est donc convergente

II)

1) On peut écrire:

$U_2 = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$

$U_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}$

$U_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$

....

$U_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{n-3}} - \frac{2}{\sqrt{n-2}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}}$

$U_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n-2}} - \frac{2}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$U_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

d'où en additionnant membre à membre $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La série $\sum\limits_{n\geq 2} U_n$ est donc convergente et a pour somme $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice N °2 :[05pts]

1) On a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in \left]-1,1\right[$ $(R=1)$

2)Soit $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ $\left(g(x) = \frac{1}{1-x} \right)$

• La série dérivée $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)$ a même rayon de convergence $(R=1)$ que

la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ et a pour somme $g'(x)$.

• La série dérivée $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} U_n''(x)$ a même rayon de convergence $(R=1)$ que

la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)$ et a pour somme $g''(x)$.

Alors, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n''(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

3) On peut écrire: $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3} = \dfrac{2-(1-x)}{(1-x)^3} = \dfrac{2}{(1-x)^3} - \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Par la question (2) $\quad \dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\ x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)\ x^n$

et $\quad \dfrac{2}{(1-x)^3} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\ x^{n-2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)\ x^n$

Alors, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1) - (n+1)]\ x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2\ x^n \quad (R=1)$

$\boxed{\boxed{\textbf{Exercice N }^\circ 3}\ \textbf{:}[05pts]}$

Calcul de a_0 :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \frac{x}{2}dx + \int_{-\pi}^{0}\left(\pi + \frac{x}{2}\right)dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2}dx\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\pi\,[x]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-\pi}^{\pi}\right] = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

- Calcul de a_n :$(n \geq 1)$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\cos(nx)\,dx + \int_{-\pi}^{0}\left(\pi + \frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi\cos(nx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2}\cos(nx)\,dx\right] = \int_{-\pi}^{0} \cos(nx)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\
&= \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2n\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0
\end{aligned}$$

- Calcul de b_n : $(n \geq 1)$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi}\frac{x}{2}\sin(nx)\,dx + \int_{-\pi}^{0}\left(\pi+\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\pi\sin(nx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\sin(nx)\,dx\right] = \int_{-\pi}^{0}\sin(nx)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(nx)\,dx \\
&= \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx\right] = -\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

- La série de Fourier associée à f est

$$S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right] = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(nx)$$