Université Ibn Tofail **Année Universitaire 2005-2006**
Faculté des Sciences de Kénitra
Département de Physique
DESA- SCTI

Travaux Dirigés No. 4 (avec correction)
(Traitement du Signal)

Exercice 1 :

a- Calculer la TL de $x(t)=\exp(-a|t|)$, $t\in IR$ et donner sa bande de convergence B_c
b- Peut-on calculer X(f) à partir de X(p) ?

Correction :

a- $X(p)=TL[x(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-p.t)dt=\int_{-\infty}^{0}\exp[(a-p).t]dt+\int_{0}^{+\infty}\exp[-(a+p).t]dt$ (avec $p=\sigma+jw$)

$\int_{-\infty}^{0}\exp[(a-p).t]dt= 1/(a-p)$ si $\sigma <a$ et $\int_{0}^{+\infty}\exp[-(a+p).t]dt= 1/(a+p)$ si $\sigma >-a$

Donc $X(p)=a/(a^2+p^2)$ avec $B_c=\{p=\sigma +jw/ -a<\sigma <a, \forall w \in IR\}$

b- $X(f)=X(p)$ avec $p=jw=2j\pi f$ ($\sigma=0$), or X(p) existe pour $\sigma=0$, d'où on peut tirer X(f) à partir de X(p)=> $X(f)= a/(a^2-4\pi^2f^2)$

Exercice 2 :

En utilisant la transformation de Laplace, déterminer, la fonction de transfert H(p) et la réponse y(t) du système continu linéaire invariant régi par l'équation différentielle suivante:

$$y^{(3)}(t) -6y^{(2)}(t) + 11y^{(1)}(t) -6y(t) =u(t),\ t \geq 0$$

où $u(t)=\exp(-t)$ avec les conditions initiales : $y(0) = 1$; $y^{(1)}(0) = 0$; $y^{(2)}(0) = -4$

Correction :

On calcule les TL des 2 membres de l'équation. On utilisera les propriétés de la TL de la dérivée et la linéarité :

$TL[y^{(1)}(t)]=p.Y(p)-y(0)$; $TL[y^{(2)}(t)]=p^2Y(p)-p.y(0)-y^{(1)}(0)$; $TL[y^{(3)}(t)]=p^3Y(p)-p^2y(0)-p.y^{(1)}(0)-y^{(2)}(0)$; $TL[u(t)]=1/(p+1)$

Donc : $p^3Y(p)-p^2y(0)-p.y^{(1)}(0)-y^{(2)}(0) -6[p^2Y(p)-p.y(0)-y^{(1)}(0)]+11[p.Y(p)-y(0)]-6Y(p)=U(p)$

D'où : $Y(p)=U(p)/(p^3-6p^2+11p-6) + (p^2y(0)+p.y^{(1)}(0)+y^{(2)}(0) -6p.y(0)-6y^{(1)}(0)+11y(0))/(p^3-6p^2+11p-6)$

A.N : $Y(p)= U(p)/(p^3-6p^2+11p-6) + (p^2-6p+7)/(p^3-6p^2+11p-6)$

$Y(p)=Y_F(p)$ (TL de la réponse forcée) + $Y_L(p)$ (TL de la réponse libre)

On en déduit que $H(p)=1/(p^3-6p^2+11p-6)$ car $Y(p)=H(p)U(p)$ quand les conditions initiales sont nulles

Puisque $U(p)=1/(p+1)$=> $Y(p)=(p^3-5p^2+p+8)/[(p^3-6p^2+11p-6)(p+1)]$

La réponse y(t)=TLI[Y(p)] :

Décomposition en éléments simples $Y(p)=-(1/24)/(p+1)+(5/4)/(p-1)+(2/3)/(p-2)-(7/8)/(p-3)$

En utilisant la table des TL et la propriété de linéarité, on trouve :

$y(t)=-(1/24)\exp(-t)+(5/4)\exp(t)+(2/3)\exp(2.t)-(7/8)\exp(3.t)$

Exercice 3 :

Calculer les TZ des signaux suivants en précisant leurs domaines de convergence D_c:

a- $x(k)= \delta(k)$ → $X(z)= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(k)z^{-k} =1$ => D_c =C (ensemble complexe C)

b- $x(k)= \delta(k-k_0)$ → $X(z)= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(k-k_0)z^{-k} =z^{-k0}$ => D_c =C* (pour $k_0 >0$)

c- $x(k)=\Gamma(k)$→ $X(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}z^{-k} =z/(z-1)$ si $|z|>1$ => $D_c =\{z\in C/ |z|>1\}$

d- $x(k)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\leq k\leq N-1\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$ $\Rightarrow X(z)=\sum_{k=0}^{N-1} z^{-k}=(1-z^{-N})/(1-z^{-1})$ si $|z|>0$ (X(z) est finie pour z=1 => $D_c = C^*$

e- $x(k)=a^k$ avec $k\geq 0 \Rightarrow X(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{+\infty}(a.z^{-1})^k = z/(z-a)$ si $|z|>|a| \Rightarrow D_c=\{z\in C/\ |z|>|a|\}$

f- $x(k)=a^k$ avec $k\in Z \Rightarrow X(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{-1}(a.z^{-1})^k+\sum_{k=0}^{+\infty}(a.z^{-1})^k$ n'existe pas car pour que le 1er terme converge, il faut $|z|<|a|$, par contre le 2ème converge si $|z|>|a| \Rightarrow D_c=\varnothing$

g- $x(k)=a^k\cos(w.k)$ avec $k\geq 0$
posons $y(k)==a^k\exp(jw.k)$, donc $x(k)=Re[y(k)]$
$\Rightarrow\ Y(z)=X(z)+jV(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a^k\exp(jwk)z^{-k}=\sum_{k=0}^{+\infty}[a.\exp(jw)z^{-1}]^k = z/[z-a.\exp(jw)]$ si $|z|>|a|$
En écrivant Y(z) sous forme X(z)+jV(z), on trouve $X(z)=[z^2-a.z.\cos(w)]/[z^2-2a.z.\cos(w)+a^2]$
Et que $TZ[a^k\sin(w.k)]=V(z)= a.z.\sin(w)]/[z^2-2a.z\cos(w)+a^2]$ avec aussi $D_c=\{z\in C/\ |z|>|a|\}$

Exercice 4 :
Soit un système numérique LIT régi par l'équation aux différences finies suivante:

$$y(k)-3.y(k-1)+2.y(k-2)=2.u(k-1),\ \ k\geq 0$$

où $u(t)=2^k$ avec les conditions initiales : $y(-2)=y(-1)=u(-1)=1$
a- En utilisant la TZ, trouver l'expression de Y(z)
b- En déduire la fonction de transfert de ce système. Est –il stable. Donner la condition de causalité dans le domaine Z.
c- Donner l'expression de la réponse fréquentielle
d- Calculer la réponse impulsionnelle et vérifier les théorèmes des valeurs finale et initiale
e- Dans le cas causal : Trouver les réponses libre, forcée et globale du système.
f- Ce système est-il à réponse impulsionnelle finie ou infini. Donner le schéma de sa réalisation directe et canonique.

Correction :
a- On calcule les TZ des 2 membres de l'équation. On utilisera les propriétés de la TZ du signal retardé et la linéarité :
$TZ[y(k-1)]=z^{-1}Y(z)+y(-1)$; $TZ[y(k-2)]=z^{-2}Y(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)$; $TZ[u(k-1)]=z^{-1}U(z)+u(-1)$; et $TZ[u(k)]=z/(z-2)=U(z)$
Donc : $Y(z)-3[z^{-1}Y(z)+y(-1)]+2[z^{-2}Y(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)]=2[z^{-1}U(z)+u(-1)]$
D'où : $Y(z)=2.z^{-1}U(z)/(1-3z^{-1}+2z^{-2})\ +\ (3-2z^{-1})/(1-3z^{-1}+2z^{-2})$
$Y(z)=Y_F(z)$ (TZ de la réponse forcée) + $Y_L(z)$ (TZ de la réponse libre)

b- Fonction de transfert :
Y(z)=H(z)U(z) quand les conditions initiales sont nulles => $H(z)=2z^{-1}/(1-3z^{-1}+2z^{-2})=2.z/(z^2-3z+2)$
-Stabilité :
$(z^2-3z+2)=(z-1)(z-2)$ => 2 pôles $p_1=1$ et $p_2=2$ et puisque $|p_i|<1$ (i=1,2) non satisfaite => système instable
-Causalité :
Vu que les pôles ne doivent pas être inclus dans le domaine de convergence, on a alors 3 domaines possibles pour la même fonction H(z)
Cas causal : $|z|>\sup(|p_1|,|p_2|)=2$
Cas anticausal : $|z|<\inf(|p_1|,|p_2|)=1$
Cas non causal : $1<|z|<2$

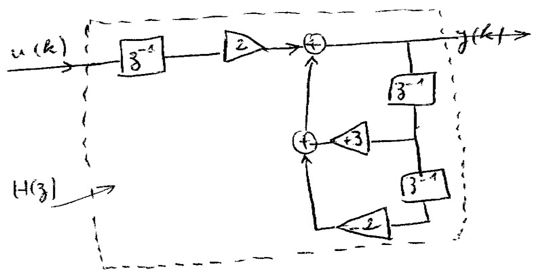
c- Réponse fréquentielle $H(f)=H(z)/z=\exp(2j\pi f)$
$\Rightarrow H(f)=2\exp(2j\pi f)/[\exp(4j\pi f)-3\exp(2j\pi f)+2]=2/[2\cos(2\pi f)-3]$
le gain: $|H(f)|=2/|2\cos(2\pi f)-3|$, la phase $\varphi(f)=\pi$ (car $2\cos(2\pi f)-3<0$), gain statique $H(0)=-2$

d- Réponse impulsionnelle h(k) : on décompose H(z) en éléments simples
$H(z)= 2.z/(z^2-3z+2) =a/(z-1) + b/(z-2)$ => $a= -2$ et $b= 4$
Donc $H(z)=-2/(z-1) + 4/(z-2) = -2z^{-1}[z/(z-1)] + 4z^{-1}[z/(z-2)]$
D'après la table des TZ et propriétés (linéarité et TZ signal retardé), on trouve :
$h(k)= -2\Gamma(k-1)+4.2^{k-1}\Gamma(k-1)=2(-1+2^k)\Gamma(k-1)$
-$h(0)=0$ et $\lim_{z\to+\infty}[H(z)]=0$ (donc le théorème de la valeur initiale est vérifié car même valeur)
-$h(+\infty)=+\infty$ et $\lim_{z\to 1} [(z-1)H(z)]=-2$ (ici le théorème de la valeur finale n'est pas vérifié car les pôles doivent être tous à l'intérieur du cercle unité)

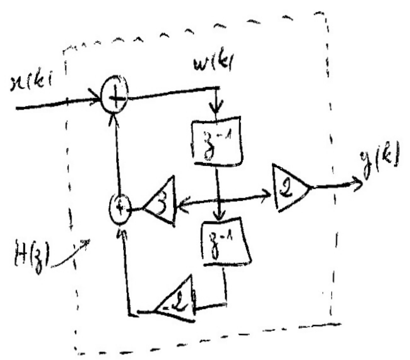
e- Réponses libre : $y_L(k)=TZI[Y_L(z)]$
on a : $Y_L(z)=(3 -2z^{-1})/(1-3z^{-1}+2z^{-2})=(3z^2-2z)/(z^2-3z+2)=z.[A/(z-1) + B/(z-2)]$, on trouve A=-1 et B=4
donc $Y_L(z)=-z/(z-1) + 4z/(z-2)]$ => $y_L(k)= -\Gamma(k)+2^k\Gamma(k)=(-1+2^{k+2})\Gamma(k)$
-Réponses forcée : $y_F(k)=TZI[Y_F(z)]$
On a : $Y_F(z)= 2.z.U(z)/(z^2-3z+2)=2z^2/ [(z^2-3z+2)(z-2)] = a/(z-1) + b/(z-2)+ c/(z-2)^2$
a=2, b=0 et c=8 => $Y_F(z)= 2/(z-1) + 8/(z-2)^2= 2z^{-1}[z/(z-1)] + 8z^{-1}[z/(z-2)^2]$
=> $y_F(k)= 2\Gamma(k-1)+8(k-1)2^{k-1}\Gamma(k-1)=2[1+(k-1).2^{k+1}]\Gamma(k-1)$

La réponse globale est $y(k)= y_F(k)+ y_L(k)= 2[1+(k-1).2^{k+1}]\Gamma(k-1)+ (-1+2^{k+2})\Gamma(k)$
Donc $y(k)= 2[1+(k-1).2^{k+1}]\Gamma(k-1)+ (-1+2^{k+2})\Gamma(k-1)=(1+k.2^{k+2})\Gamma(k-1)$
et $y(0)=3$

f- Le système est à RII car si l'on pose $u(k)=\delta(k)$ dans l'équation aux différences finies , on constatera que la sortie $y(k)=h(k)$ (réponse impulsionnelle) va se calculer d'une manière indéfini.
* Schémas de réalisation :
L'équation aux différences finies peut être réécrite de la façon suivante :
$$y(k)=3.y(k-1) -2.y(k-2) + 2.u(k-1)$$
-Schéma de réalisation directe :



-Schéma de réalisation canonique D-N (dénominateur-Numérateur)
$H(z)=Y(z)/X(z)=[Y(z)/W(z)][W(z)/U(z)]=2z^{-1}/(1-3z^{-1}+2z^{-2})$
On pose $W(z)/U(z)=1/(1-3z^{-1}+2z^{-2})$ => $w(k)=u(k)+3w(k-1)-2u(k-2)$
et $Y(z)/W(z)=2z^{-1}$ => $y(k)=2w(k-1)$
on déduit alors le schéma de réalisation suivante :



On constate qu'on a moins de mémoires (2 au lieu de 3 dans le cas direct)