CORRIGE CONTRÔLE CONTINU ALGEBRE 1

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr BELKAID-Tlemcen

30/11/2017
Contrôle Continu Algèbre1
Durée : 1h-30'

EXERCICE 1 : 7Pts

1) a) L'implication suivante est-elle vraie ? Justifier.

$$\exists \alpha \in IR, \quad \forall x \in IR, \quad \forall y \in IR, \quad |x^2 - y^2| \leq \alpha |x - y|$$
$$\rightarrow \exists \alpha \in IR_+^*, \quad \forall x \in IR, \quad x^2 \leq \alpha |x|$$

b) Donner la négation de cette assertion.

SOLUTION :

1) a) ---

Soit P : $\exists \alpha \in IR, \forall x \in IR, \quad \forall y \in IR, \quad |x^2 - y^2| \leq \alpha |x - y|$

et soit Q : $\exists \alpha \in IR_+^*, \forall x \in IR, \quad x^2 \leq \alpha |x|$.

P est supposée vraie pour tout $y \in IR$,

donc en particulier pour $y=0$. 2pts 2pts

D'où : $\exists \alpha \in IR, \quad \forall x \in IR, \quad |x^2 - 0| \leq \alpha |x - 0|$

soit $\exists \alpha \in IR, \quad \forall x \in IR, \quad x^2 \leq \alpha |x|$.

Si $x \neq 0$, alors $\frac{x^2}{|x|} \leq \alpha$, soit $\alpha \geq |x| > 0$. 0.5 pt

D'où : $\exists \alpha \in IR_+^*, \forall x \in IR, \quad x^2 \leq \alpha |x|$. 0.5 pt 1pt

SI ON MONTRE QUE P EST FAUSSE = 3pts

---

b) La négation est : P et non(Q) 1pt, soit :

$$\exists \alpha \in IR, \forall x \in IR, \quad \forall y \in IR, \quad |x^2 - y^2| \leq \alpha |x - y|$$ 1pt

et $\forall \alpha \in IR_+^*, \exists\, x \in IR, \quad x^2 > \alpha |x|$. 1pt 3 pts

++++++++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++++++++

2) Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0 \ |y-1| \leq \varepsilon) \rightarrow y = 1$

Raisonnons par contraposition et montrons que:

$y \neq 1 \rightarrow (\exists \varepsilon > 0 \ |y-1| > \varepsilon)$. 0.5 pt

Alors, peut-on trouver $\varepsilon > 0$ tel que

$$|y-1| > \varepsilon \ \ avec \ \ y \neq 1, \qquad soit \ \ y-1 \neq 0 \ ?$$

La réponse est OUI : choisissons par exemple: $\varepsilon = \frac{|y-1|}{2}$. 0.5 pt 1pt

---

EXERCICE 2 : 5Pts

Montrer par contraposition puis par l'absurde que si 3 divise $x^2 + y^2$ alors 3 divise x et 3 divise y.

SOLUTION :

Par contraposition : Montrons que si

(3 ne divise pas x) ou (3 ne divise pas y) alors 3 ne divise pas $x^2 + y^2$.

On sait (cours) que: Si p divise n^2 alors p divise n où p est premier.

3 ne divise pas x, donc 3 ne divise pas x^2,

soit $x^2 = 3k + r, \quad k \in IN, \ r \in]0,3[$ 1pt

Considérons le « ou » exclusif ET NON le « ou » inclusif :

3 divise y, donc 3 divise y^2, soit $y^2 = 3k', \quad k' \in IN$ 1pt

D'où $x^2 + y^2 = 3k'' + r, \quad k'' = k + k' \in IN, \ r \in]0,3[$ 1pt

soit 3 ne divise pas $x^2 + y^2$. 3pts

Par absurde: Supposons :

(3 divise $x^2 + y^2$) et [(3 ne divise pas x) ou (3 ne divise pas y)]. 1pt

Comme dans la contraposition on a :

[(3 ne divise pas x) ou (3 ne divise pas y)] nous donne ;

$x^2 + y^2 = 3k'' + r, \quad k'' \in IN, \ r \in]0,3[$. Ceci contredit le fait que :

3 divise $x^2 + y^2$. 1pt 2pts

EXERCICE3 : 5 Pts

Soient E, F et G trois parties d'un ensemble X.

1) Montrer que : $(\boldsymbol{E}\Delta\boldsymbol{F})\Delta\boldsymbol{G} =$
$(\boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{nF} \cap \boldsymbol{nG}) \cup (\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{nE} \cap \boldsymbol{nG}) \cup (\boldsymbol{G} \cap \boldsymbol{nE} \cap \boldsymbol{nF}) \cup (\boldsymbol{G} \cap \boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{F})$

2) Déduire que : $(\boldsymbol{E}\Delta\boldsymbol{F})\Delta\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{F})\Delta\boldsymbol{E}$

---

nA est le complémentaire de A dans X

SOLUTION :

1) $(\mathrm{E}\ \Delta\ \mathrm{F})\ \Delta\ \mathrm{G} = ((\mathrm{E} \cap \mathrm{nF}) \cup (\mathrm{F} \cap \mathrm{nE}))\ \Delta\ C$

$= (((\mathrm{E} \cap \mathrm{nF}) \cup (\mathrm{F} \cap \mathrm{nE})) \cap \mathrm{nG}) \cup (\mathrm{G} \cap \mathrm{n}[(\mathrm{E} \cap \mathrm{nF}) \cup (\mathrm{F} \cap \mathrm{nE})])$ 1pt

$= (\mathrm{E} \cap \mathrm{nF} \cap \mathrm{nG}) \cup (\mathrm{F} \cap \mathrm{nE} \cap \mathrm{nG}) \cup (\mathrm{G} \cap ((\mathrm{nE} \cap \mathrm{nF}) \cup (\mathrm{F} \cap \mathrm{E})))$ 1pt

$= (\mathrm{E} \cap \mathrm{nF} \cap \mathrm{nG}) \cup (\mathrm{F} \cap \mathrm{nE} \cap \mathrm{nG}) \cup (\mathrm{G} \cap \mathrm{nE} \cap \mathrm{nF}) \cup (\mathrm{G} \cap \mathrm{F} \cap \mathrm{E})$ 1pt

3 Pts

2) Dans l'égalité précédente on échange E et G. On remarquera très aisément que $(\boldsymbol{E}\Delta\boldsymbol{F})\Delta\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{F})\Delta\boldsymbol{E}$ 2 Pts

---

EXERCICE4 4 pts Soit $g : IN \rightarrow IN^2$ une application

$$n \rightarrow (n, (n+1)^2)$$

1) g est-elle injective ?

DEFINITION DE L'INJECTION = 1pt

La démonstration ci-dessous = 1pt.

Soient $n1$ et $n2$ deux entiers naturels.

$g(n1)=g(n2)$ implique $(n1, (n1+1)^2) = (n2, (n2+1)^2)$

d'où $n1 = n2$ et $(n1+1)^2 = (n2+1)^2$, soit

$n1 = n2$ et $[\ n1 + 1 = n2 + 1$ ou $n1 + 1 = -n2 - 1\ ]$

Soit $n1 = n2$ et $[\ n1 = n2$ ou $n1 = -n2 - 2\ ]$.

Or $n1 = -n2 - 2 < 0$ (impossible).

Donc $[\ n1 = n2$ ou $n1 = -n2 - 2\ ]$ équivaut $n1 = n2$,

d'où ($n1 = n2$ et $[\ n1 = n2$ ou $n1 = -n2 - 2\ ]$) équivaut

$n1 = n2$. g est donc injective. 2pts

2) Déterminer l'image réciproque de $\{(1,1)\}$.

L'image réciproque de l'ensemble $\{(1,1)\}$ est l'ensemble des entiers naturels n tel que $(n, (n+1)^2) = (1,1)$. 0.5 pt Soit :

$n = 1$ et $(n+1)^2 = 1$, d'où : $n = 1$ et $n^2 + 2n = 0$. Ce qui est faux. Donc l'image réciproque de l'ensemble $\{(1,1)\}$ est vide. 0.5 pt 1pt

3) A-t-on $g(IN) = IN^2$? Justifier

Le couple $(1,1) \in IN^2$ n'a pas d'antécédent dans IN. Ceci suffit pour dire qu'on a pas $g(IN) = IN^2$. 0.5pt

4) Que peut-on dire quand à la surjection de g ?

DEFINITION DE LA SURJECTION = 0.5 PT même si la réponse à la question est fausse

D'après 2) g n'est pas surjective. 0.5pt