Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Année Universitaire 2017/2018
Liste 1 de TD d'Algèbre MI
Chapitre 1: Partie1: **Logique propositonnelle**

Exercice 1. *On dit que "P ou exclusif Q" est vrai si P ou Q est vrai mais pas simultanément P et Q. Ecrire la table de vérité du "ou exclusif".*

Solution: C'est facile. **Remarque:** Ce "*ou* **exclusif est important"** dans certains cas d'assertions, comme par exemple si on veut montrer que $(A\ ou\ B) \Rightarrow C$. Comme on a à supposer que A *ou* B est vraie, alors on peut supposer A vraie et B fausse, ou A fausse et B vraie, puis on arrive à C vraie par un raisonnement mathématique correct. Autrement, si on suppose que A vraie et B vraie en même temps, d'ou le "*ou* **inclusif"**, alors il serait parfois impossible de trouver C.Voir exercice fait en cours.

Exercice 2. *Evaluer (donner la valeur de vérité) les formules suivantes en considérant uniquement les valeurs des variables données:*
$Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ $(Q\ fausse)$, P *et* $(P\ ou\ Q)$ $(Q\ vraie)$, P *ou* $(Q \Rightarrow R)$ $(Q\ fausse)$.

Solution: Si $Q\ fausse$, alors $Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ est vraie pour toute valeur de vérité de P et de R.
Si Q *vraie*, alors P *ou* Q vraie pour toute valeur de P. Mais si P est vraie alors P *et* $(P\ ou\ Q)$ est vraie et si P est fausse alors P *et* $(P\ ou\ Q)$ est fausse.
Si $Q\ fausse$, alors $Q \Rightarrow R$ est vraie et par suite P *ou* $(Q \Rightarrow R)$ est vraie pour toute valeur de P et de R.

Exercice 3. *Simplifier l'expression:* $(\overline{P}\ et\ Q)\ ou\ (\overline{P}\ et\ \overline{Q})\ ou\ (P\ et\ Q)$. *L'assertion* $\overline{A}$ *est la négation de l'assertion* A.

Solution: *On va discuter selon les valeurs de vérité de P et de Q.(Dresser une table de vérité)*
Si P et si Q sont vraies toutes les deux alors:
$\overline{P}$ *et* Q *est fausse,* $\overline{P}$ *et* $\overline{Q}$ *est fausse et* P *et* Q *est vraie, d'ou* $(\overline{P}\ et\ Q)\ ou\ (\overline{P}\ et\ \overline{Q})\ ou\ (P\ et\ Q)$ **vraie.**
Si P est vraie et si Q est fausse alors:
$\overline{P}$ *et* Q *est fausse,* $\overline{P}$ *et* $\overline{Q}$ *est fausse et* P *et* Q *est fausse, d'ou* $(\overline{P}\ et\ Q)\ ou\ (\overline{P}\ et\ \overline{Q})\ ou\ (P\ et\ Q)$ **fausse.**
Si P est fausse et si Q est vraie alors:
$\overline{P}$ *et* Q *est vraie,* $\overline{P}$ *et* $\overline{Q}$ *est fausse et* P *et* Q *est fausse, d'ou* $(\overline{P}\ et\ Q)\ ou\ (\overline{P}\ et\ \overline{Q})\ ou\ (P\ et\ Q)$ **vraie.**

Si P et si Q sont fausses toutes les deux alors:
$\overline{P}$ et Q est fausse, $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ est vraie et P et Q est fausse, d'ou ($\overline{P}$ et Q) ou ($\overline{P}$ et $\overline{Q}$) ou (P et Q) **vraie**.
On remarque bien que les valeurs de vérité obtenues **dans cet ordre**, *qui est celui de l'ordre habituel de la table de vérité, sont bien les mêmes de l'assertion $P \Rightarrow Q$.*

Exercice 4. *Soient n et m deux entiers naturels.*

1. *Donner un équivalent de $(n < m) \Rightarrow (n = m)$.*
2. *Donner la négation de $(n \leq m) \Rightarrow (n > m)$.*

Solution: *Il y a deux équivalents simples pour une implication: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P}$ ou $Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.*
Donc $[(n < m) \Rightarrow (n = m)] \Leftrightarrow [(n \geq m) ou (n = m)]$ *ou* $[(n < m) \Rightarrow (n = m)] \Leftrightarrow [(n \neq m) \Rightarrow (n \geq m)]$.
Pour la négation: $\left[\overline{(n \leq m) \Rightarrow (n > m)}\right] \Leftrightarrow [(n \leq m) \text{ et } (n \leq m)] \Leftrightarrow (n \leq m)$.

Exercice 5. *Dire si c'est vrai ou faux: $(x \in \mathbb{R})$*
1- $x > 5 \Rightarrow x > 3$.
2- $x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$.
3- $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$.
4- $x = 0 \Rightarrow x \leq 0$.
5- $z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| = 1$.

Solution: **1.** *Vrai, si $x > 5$ alors certainement $x > 3$,*
2. Vrai, $x^3 = -1$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$, $x = -1$ donc $x^3 = -1 \Rightarrow x = -1$ et si $x = -1$ alors $x^3 = -1$ d'ou équivalence.
3. Faux, $x^2 = 9$ a deux solutions $x = -3$ et $x = 3$ donc $x^2 = 9 \Rightarrow (x = 3$ ou $x = -3)$, mais $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ est vraie.
4. Vrai, $x = 0 \Rightarrow (x = 0$ ou $x < 0)$
5. Faux, si $z \in \mathbb{C}$ alors z est quelqconque dans $\mathbb{C}$ et par suite $|z|$ peut-être différent de 1, exemple: prendre $z = 2i$.

Exercice 6. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère les assertions suivantes:*
$P : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$, $Q : \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ et $R :$ $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0)$.
Parmi les implications suivantes lesquelles sont vraies?

1. $P \Rightarrow Q$
2. $Q \Rightarrow P$
3. $Q \Rightarrow R$

4. $\overline{R} \Rightarrow Q$

5. $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Solution: 1. V*rai: si pour tout* x *réel ona* $f(x) = 0$, *alors certainement il existe au moins* x *réel tel que* $f(x) = 0$.
2. Faux: s'il existe au moins x *réel tel que* $f(x) = 0$ *alors on ne peut pas confirmer qu'on a pour tout* x *réel,* $f(x) = 0$.
3. Faux: pensons à la contarposée c'est à dire: $\overline{R} \Rightarrow \overline{Q}$, *avec* $\overline{R}$: $(\exists x \in \mathbb{R}; f(x) \leq 0)$ *et* $(\exists x \in \mathbb{R}; f(x) \geq 0)$ *et* $\overline{Q} : \forall x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0$.
On part de $\overline{R}$ *vraie, c'est à dire* $\exists x \in \mathbb{R};\ f(x) \leq 0$ *vraie et* $\exists x \in \mathbb{R};\ f(x) \geq 0$ *vraie. Ces deux assertions sont vraies donc l'intersection nous donne* $\exists x \in \mathbb{R}; f(x) = 0$. *De ceci on ne peut pas déduire* $\overline{Q}$ *c'est à dire* $\forall \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0$.
4. Vrai: Les deux assertions qui constituent $\overline{R}$ *sont vraies donc l'intersection nous donne* $\exists x \in \mathbb{R};\ f(x) = 0$, *d'ou* Q.
5. Vrai: c'est la contraposée de 1. qui est vraie.