

Corrigés des exercices 4.1 à 4.7

حلول التمارين من 1.4 الى 7.4

Exercice 4.1 :

1/ Pour calculer la vitesse il suffit de dériver l'équation horaire par rapport au temps :

$$v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 18t + 12$$

En dérivant la vitesse par rapport au temps on obtient l'accélération :

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 18$$

2/ L'étude du mouvement du mobile nécessite une étude mathématique de la fonction $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$. Le mouvement est accéléré ou retardé selon le signe du produit av . Quant au sens du mouvement il est indiqué par le signe de v .

Dressons le tableau de variation :

$$v = 6t^2 - 18t + 12 = 0 \Rightarrow t = 1 ; t = 2 \quad ; \quad a = 12t - 18 = 0 \Rightarrow t = 1,5$$

| | | | | | |
|---------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|----------|
| t | 0 | 1 | 1,5 | 2 | ∞ |
| v | + | 0 | - | 0 | + |
| a | - | - | 0 | + | + |
| $a.v$ | - | + | - | + | + |
| Mouvmt | Retardé sens + | Accéléré sens - | Retardé sens - | Accéléré sens + | |

Exercice 4.2 :

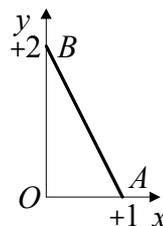
Commençons par la transformation trigonométrique : $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$,

Remplaçons dans l'expression de y qui devient : $y = 2 \cos^2 t$,

Une autre transformation trigonométrique nous mène à : $y = 2(\sin^2 t - 1)$,

Il ne nous reste plus qu'à remplacer $\sin^2 t$ par x pour obtenir l'équation de la trajectoire qui est : $y = 2(1 - x)$.

Pour dessiner la trajectoire il faut remarquer que $0 \leq x \leq +1$, car quelque soit t , $0 \leq \sin^2 t = x \leq +1$. Nous en déduisons que la trajectoire est un segment de droite joignant les points $A(+1,0)$ et $B(0,+2)$.



Exercice 4.3 :

Deux dérivations consécutives des équations horaires nous conduisent aux expressions des coordonnées des vecteurs vitesse et accélération du mobile à l'instant t :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = \dot{x} = 3(t^2 - 1) \\ v_y = \dot{y} = -6t \\ v_z = \dot{z} = 3(t^2 + 1) \end{cases} ; \quad \vec{a} = \begin{cases} a_x = \ddot{x} = 6t \\ a_y = \ddot{y} = -6 \\ a_z = \ddot{z} = 6t \end{cases}$$

2/ Le module du vecteur vitesse est égal à $v^2 = 18(1+t^2)^2 \Rightarrow v = 3\sqrt{2}(1+t^2)$

Calculons maintenant l'angle compris entre \vec{v} et Oz . Pour cela calculons le module du produit scalaire :

$$\vec{v} \cdot \vec{k} = v \cdot k \cdot \cos(\vec{v}, \vec{k}) = v \cdot \cos(\vec{v}, \vec{k}), \quad \cos(\vec{v}, \vec{k}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{v}$$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad \vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} \cdot \vec{k} = (\dot{x} \cdot 0) + (\dot{y} \cdot 0) + (\dot{z} \cdot 1) = 3(1+t^2)$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{k}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{v} = \frac{3(1+t^2)}{3\sqrt{2}(1+t^2)} \Rightarrow \cos(\vec{v}, \vec{k}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{v}, Oz) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Exercice 4.4 :

a/ Eliminons le temps entre les deux équations horaires pour obtenir l'équation de la trajectoire :

$$x = \ln t \Rightarrow t = e^x \\ y = e^x + \frac{1}{e^x} \Rightarrow y = e^x + e^{-x}$$

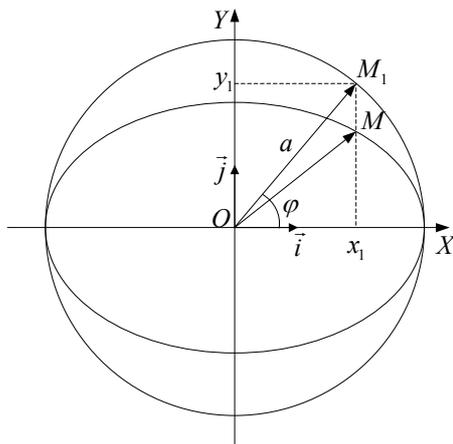
b/ calculons les modules de la vitesse et de l'accélération au temps t par dérivations successives des deux équations horaires par rapport au temps :

$$\left. \begin{array}{l} v_x = \frac{1}{t} \\ v_y = 1 - \frac{1}{t^2} \end{array} \right| \Rightarrow v = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2}; \quad v = \sqrt{\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} + 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_x = -\frac{1}{t^2} \\ a_y = \frac{2t}{t^4} = \frac{2}{t^3} \end{array} \right| \Rightarrow a = \sqrt{\left(\frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{t^3}\right)^2}; \quad a = \sqrt{\frac{4}{t^6} + \frac{1}{t^4}}$$

Exercice 4.5 :

Rappel mathématique concernant l'ellipse : suivons le raisonnement qui accompagne la figure ci-dessous :



$$\text{Equation du cercle } x^2 + y^2 - a^2 = 0 \rightarrow (1)$$

$$\text{Equation de l'ellipse } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \rightarrow (2)$$

$$\text{Coordonnées du point } M: \begin{cases} x_1 = a \cos \varphi \\ y_1 = a \sin \varphi \end{cases}$$

remplaçons x et y dans l'équation (1):

$$\forall M, a^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi - a^2 = 0 \Rightarrow \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - 1 = 0 \rightarrow (3)$$

Par identification des équations (2) et (3) nous obtenons deux résultats importants qui caractérisent l'ellipse:

$$(2) = (3): \cos \varphi = \frac{x}{a} \Rightarrow \boxed{x = a \cos \varphi}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{b} \Rightarrow \boxed{y = b \sin \varphi}$$

Maintenant que nous avons les coordonnées du point M , nous pouvons repérer ce point sur l'ellipse par l'angle φ tel que $\cos \varphi = \frac{x}{a}$; $\sin \varphi = \frac{y}{b}$

La vitesse du point M est égale à :

$$\vec{OM} = a \cos \varphi \vec{i} + b \sin \varphi \vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = -a\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{i} + b\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{j}}$$

$$\text{L'accélération du point } M \text{ est : } \boxed{\vec{a} = -a(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \vec{i} + b(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \vec{j}}$$

Exercice 4.6 :

1/ Pour obtenir l'équation de la trajectoire il suffit d'éliminer le temps entre les équations horaires :

$$\left. \begin{array}{l} \cos \frac{t}{2} = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ \sin \frac{t}{2} = \frac{y}{2\sqrt{2}} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1}$$

La trajectoire est donc une **ellipse**.

2/ En dérivant les équations horaires par rapport au temps, on obtient les deux composantes du vecteur vitesse :

$$\vec{v}_x = \dot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{t}{2}$$

$$\vec{v}_y = \dot{y} = \sqrt{2} \cos \frac{t}{2}$$

En dérivant les deux composantes du vecteur vitesse par rapport au temps, on obtient les deux composantes du vecteur accélération :

$$\vec{a}_x = \dot{v}_x = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{t}{2}$$

$$\vec{a}_y = \dot{v}_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{t}{2}$$

Ecrivons à présent l'expression vectorielle de l'accélération pour trouver sa relation avec le vecteur position :

$$\vec{a} = -\frac{1}{4} x \vec{i} - \frac{1}{4} y \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{1}{4} (x \vec{i} - y \vec{j}) ; \quad \boxed{\vec{a} = -\frac{1}{4} \vec{OM}}$$

Puisque la trajectoire est une ellipse, le mouvement va se répéter à l'infini pour une variation du temps de 0 à ∞ .

Soit T l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du mobile par la même position et dans le même sens.

$$\text{L'abscisse du mobile au temps } t \text{ est : } x = \sqrt{2} \cos \frac{t}{2}$$

$$\text{L'abscisse du mobile au temps } t + T \text{ est : } x' = \sqrt{2} \cos \frac{(t+T)}{2}$$

Puisque le mouvement est périodique il faut que $x = x'$:

$$\cos \alpha = \cos (\alpha + 2\pi) ; \quad \cos \frac{t}{2} = \cos \frac{(t+T)}{2} \Rightarrow \frac{T}{2} = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = 4\pi}$$

3/ Position du mobile et ses coordonnées pour une accélération de module $\frac{\sqrt{5}}{4}$:

$$a = \frac{\sqrt{5}}{4},$$

$$a^2 = \frac{2}{16} \cos^2 \frac{t}{2} + \frac{2}{4} \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{5}{16} \Rightarrow 2 \cos^2 \frac{t}{2} + 8 \sin^2 \frac{t}{2} = 5$$

$$2 \left(1 - \sin^2 \frac{t}{2} \right) + 8 \sin^2 \frac{t}{2} = 5 \Rightarrow 6 \sin^2 \frac{t}{2} = 3 \Rightarrow \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{t}{2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad t > 0 ; \quad \frac{t}{2} = \begin{cases} +\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ +\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

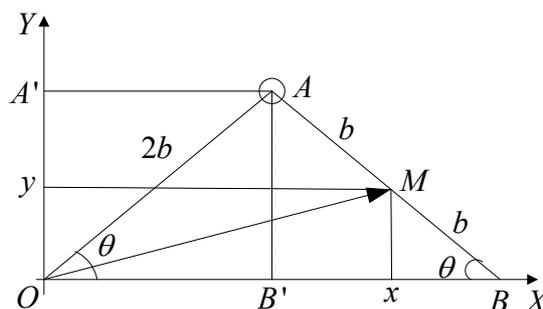
En prenant en considération la condition $0 \leq t \leq 4\pi$, nous résumons les résultats dans le tableau suivant :

| k | t | x | y | v_x | v_y |
|-----|------------------|-----|-----|----------------|-------|
| 0 | $\frac{\pi}{2}$ | +1 | +2 | $-\frac{1}{2}$ | +1 |
| 1 | $\frac{3\pi}{2}$ | -1 | +2 | $-\frac{1}{2}$ | -1 |

Exercice 4.7 :

1/ A l'aide de la figure ci-dessous on écrit l'expression du vecteur position :

$$\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$



Il reste à déterminer les deux équations horaires, c'est-à-dire les coordonnées en fonction du temps :

$$x = \overline{OA} + b \cos \varphi, \quad x = 2b \cos \varphi + b \cos \varphi \Rightarrow x = 3b \cos \varphi$$

$$y = \overline{AA'} - b \sin \varphi, \quad y = 2b \sin \varphi - b \sin \varphi \Rightarrow y = b \sin \varphi$$

$$\boxed{\overline{OM} = \vec{i} \cdot 3b \cos \varphi + \vec{j} \cdot b \sin \varphi}$$

On en déduit l'équation de la trajectoire par élimination du temps entre les équations horaires :

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = 9b^2 \cos^2 \varphi \\ y^2 = b^2 \sin^2 \varphi \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9b^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{C'est l'équation d'une ellipse.}$$

2/ La deuxième dérivée du vecteur position par rapport au temps nous conduit à l'expression du vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d^2 \overline{OM}}{dt^2} = \omega^2 (\vec{i} \cdot 3b \cdot \cos \omega t + \vec{j} \cdot b \cdot \sin \omega t) \Leftrightarrow \vec{a} = -\omega^2 \cdot \overline{OM}$$

D'où le module de cette accélération :

$$a = 9b^2 \cdot \cos^2 \omega t + b^2 \cdot \sin^2 \omega t \Rightarrow \boxed{a = b \sqrt{9 \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t}}$$