

Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences  
Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Année Universitaire 2017/2018  
Liste 2 de TD d'Algèbre MI  
Chapitre 1: Partie2: Raisonement

**Exercice 1** 1- Montrer par contraposition que si le reste de la division de

$x^2 + y^2 + z^2$  par  $2^n$  est  $-1$  alors  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont, soit tous les trois impairs, soit deux sont pairs.

2- Reprendre la démonstration précédente en utilisant un raisonnement par l'absurde.

**Exercice 2** Soit  $n$  un entier naturel. On se donne  $n + 1$  réels,  $x_0, x_1, \dots, x_n$  de  $[0, 1]$  vérifiant:  $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$ . On veut démontrer par l'absurde l'assertion  $P$  suivante:

$P$  : Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de  $1/n$ .

1- Ecrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs  $x_i - x_{i-1}$  une formule logique équivalente à  $P$ .

2- Ecrire la négation de cette formule logique.

3- Rédiger une démonstration par l'absurde de  $P$ .

**Exercice 3** Démontrer par récurrence que:  $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}, n^2 \leq 2^n$ .