Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Année Universitaire 2017/2018
Liste 2 de TD d'Algèbre MI
Chapitre 1: Partie2: **Raisonnement**

Exercice1. 1- Montrer par contraposition que si le reste de la division de $x^2 + y^2 + z^2$ par 2^n est -1 alors x, y et z sont, soit tous les trois impairs, soit deux sont pairs.
2- Reprendre la démonstartion précédente en utilisant un raisonnement par l'absurde.

Solution: On veut montrer que :

SI pour tous x, y, z, et pour tout n, $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1$ $[2^n]$ **ALORS** x, y, z **sont tous imapirs** *ou* **deux sont pairs.**

La phrase après ALORS est la suivante: [(x impair) *ET* (y impair) *ET* (z impair)] *OU* [(x pair) ET (y pair)]. (On peut penser à prendre z impair dans la deuxième assertion aussi, c.à.d. dans [(x pair) ET (y pair)])

Remarque: Dans [(x pair) ET (y pair)], on peut remplacer (x et y) par (x et z) ou (y et z) et ceci du fait qu'il y a une symétrie par rapport à x, y et z dans l'expression: $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1$ $[2^n]$. Donc un choix suffit à cause de la symétrie.

Par contraposition: Montrons que **SI** [(x pair) *OU* (y pair) *OU* (z pair)] *ET* [(x impair) *OU* (y impair)] **ALORS** il existe au moins x, y, z, et n tel que $x^2 + y^2 + z^2$ est non congru à -1 $[2^n]$.

On part de: [(x pair) *OU* (y pair) *OU* (z pair)] **ET** [(x impair) *OU* (y impair)] **VRAI,** donc on part de : [(x pair) *OU* (y pair) *OU* (z pair)] **VRAI ET** [(x impair) *OU* (y impair)] **VRAI.**

Pensons au *OU* exclusif !
On remarque que "z **pair"** figure dans [(x pair) *OU* (y pair) *OU* (z pair)] et aussi dans [(x impair) *OU* (y impair)]. (Voir la phrase écrite entre parenthèses à la $5^{ième}$ et $6^{ième}$ lignes). Donc Prendre z pair (sans penser à la parité de x et y,d'ou le *OU* exclusif) nous donne [(x pair) *OU* (y pair) *OU* (z pair)] **VRAI ET** [(x impair) *OU* (y impair)] **VRAI.**
Maintenant cherchons au moins un x, un y et un n, avec un z pair, de telle manière que $x^2 + y^2 + z^2$ ne soit pas congru à -1 $[2^n]$.

On peut choisir:
x impair, y pair, z pair et $n = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4(k^2 + k + k'^2 + k''^2) + 1 \equiv 0$ [1] ou
x pair, y impair, z pair et $n = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4(k^2 + k'^2 + k' + k''^2) + 1 \equiv 0$ [1] ou
x impair, y impair, z pair et $n = 1$, $x^2+y^2+z^2 = 4(k^2+k+k'^2+k'+k''^2)+2 \equiv 0$ [2]. Les deux premiers choix sont triviaux donc pas vraiment importants. Le troisième est le bon choix. D'ou la contraposée.

AUTRE METHODE pour la contraposée:
Montrons que **SI** [(x pair) *OU* (y pair) *OU* (z pair)] *ET* [(x impair) *OU* (y impair)] **ALORS** il existe au moins x, y, z, et n tel que $x^2 + y^2 + z^2$ est non congru à -1 [2^n].

[(x pair) *OU* (y pair) *OU* (z pair)] *ET* [(x impair) *OU* (y impair)]
$\Longleftrightarrow$ [(x pair) *ET* (x impair)] *OU* [(y pair) *ET* (x impair)] *OU*
[(z pair) *ET* (x impair)] *OU* [(x pair) *ET* (y impair)] *OU*
[(y pair) *ET* (y impair)] *OU* [(z pair) *ET* (y impair)]

Or les assertions [(x pair) *ET* (x impair)] et [(y pair) *ET* (y impair)] sont FAUSSES, donc il reste :
[(y pair) *ET* (x impair)] *OU* [(z pair) *ET* (x impair)] *OU*
[(x pair) *ET* (y impair)] *OU* [(z pair) *ET* (y impair)].

Puisque [(x pair) *ET* (x impair)] et [(y pair) *ET* (y impair)] sont FAUSSES, alors supposons (x impair) et (y impair).
Dans ce cas il reste: [(z pair) *ET* (x impair)] *OU* [(z pair) *ET* (y impair)].
<u>En conclusion:</u> pour x impair, y impair, z pair et $n = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4(k^2 + k + k'^2 + k' + k''^2) + 2 \equiv 0$ [2]. D'ou la contraposée.

<u>**Par l'absurde:**</u>
On veut montrer par l'absurde que :

SI pour tous x, y, z, et pour tout n, $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1$ [2^n] **ALORS** x, y, z **sont tous imapirs** *ou* **deux sont pairs.**

Dans ce cas supposons que toute l'implication ci-dessus est fausse, c.à.d, on a:
[pour tous x, y, z et pour tout n, $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1$ [2^n]] ET
[[(*x pair*) *OU* (*y pair*) *OU* (*z pair*)] *ET* [(*x impair*) *OU* (*y impair*)]].

On part de:
$x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1$ [2^n] VRAI pour tous x, y, z et pour tout n
et [[(*x pair*) *OU* (*y pair*) *OU* (*z pair*)] *ET* [(*x impair*) *OU* (*y impair*)]] VRAI.
Maintenant il faut faire un raisonnement et trouver une contradiction.

Comme $[x^2+y^2+z^2 \equiv -1\ [2^n]\ ]$ est VRAI pour tous $x,\ y,\ z$ et pour tout n, alors ça sera vrai pour $x=1$, $y=1$ et $n=1$. Bien sûre, pour $x=1$ et $y=1$, $[[(x\ pair)\ OU\ (y\ pair)\ OU\ (z\ pair)]\ \ ET\ \ [(x\ impair)\ OU\ (y\ impair)]]$ est VRAI à condition que z soit pair. En remplaçant $x=1$, $y=1$ et $n=1$ dans $x^2+y^2+z^2 \equiv -1\ [2^n]$, on trouve $2+z^2 \equiv -1\ [2]$, soit $z^2 \equiv -1\ [2]$, soit z impair, donc contardiction car z est pair.

Exercice2. Soit n un entier naturel. On se donne $n+1$ réels, $x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n$ de $[0,1]$ vérifiant: $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq 1$. On veut démonter par l'absurde l'assertion P suivante:
P : Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $1/n$.

1- Ecrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à P.
2- Ecrire la négation de cette formule logique.
3- Rédiger une démonstartion par l'absurde de P.

Solution: 1) Selon l'énoncé on a, en supposant que $i<j$:

$$\exists\ i=1,...,n;\ \ \exists\ j=1,...,n \ \text{ tel que } \ |x_j-x_i| = x_j - x_i \leq \frac{1}{n}.$$

Puisqu'il existe deux nombres x_i et x_j qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$ alors certainement il existe deux nombres consécutifs x_i et x_{i-1} qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$. Donc on peut écrire la formule logique équivalente à P comme suit:

$$\exists\ i=1,...,n \ \text{ tel que } \ (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{1}{n}.$$

2) La négation est: $\forall\ i=1,...,n;\ \ (x_i - x_{i-1}) > \frac{1}{n}$.

3) Par l'absurde on suppose que: $\exists\ i=1,...,n$ tel que $(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{1}{n}$ est fause. Donc on suppose que $\forall\ i=1,...,n;\ \ (x_i - x_{i-1}) > \frac{1}{n}$ est vraie. Puisque $(x_i - x_{i-1}) > \frac{1}{n}$ est vraie pour toutes les valeurs de i dans l'ensemble $\{1,2,...,n\}$ alors on aura:
$(x_n - x_{n-1}) > \frac{1}{n}$, $(x_{n-1} - x_{n-2}) > \frac{1}{n}$, $(x_{n-2} - x_{n-3}) > \frac{1}{n}$, ...et $(x_1 - x_0) > \frac{1}{n}$, d'où :
$(x_n - x_0) = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ... + (x_1 - x_0) > n\ \frac{1}{n}$.

Donc $x_n - x_0 > 1$, ce qui est absurde.

Exercice3. Démontrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}$, $n^2 \leq 2^n$.

Solution: Pour $n = 4$ ona $4^2 \leq 2^4$ soit $16 \leq 16$ ce qui est vrai. Fixons maintenant n dans $\mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}$ et supposons que $n^2 \leq 2^n$. Montrons alors que pour ce n fixé on a $(n + 1)^2 \leq 2^{n+1}$.
$(n+1)^2 = n^2+2n+1 \leq 2^n+2n+1$. Montrons maintenant que $2n+1 \leq 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}-\{0, 1, 2, 3\}$. Pour $n = 4$ on a $9 \leq 2^4$ soit $9 \leq 16$ ce qui est vrai. Fixons n dans $\mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}$ et supposons que $2n + 1 \leq 2^n$ et montrons que pour ce n fixé on a $2(n+1)+1 \leq 2^{n+1}$. On a bien $2(n+1)+1 = 2n+1+2 \leq 2^n+2 \leq 2^n+2^n$. Donc $(n + 1)^2 \leq 2^n + 2^n$ soit $(n + 1)^2 \leq 2^{n+1}$.