Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Année Universitaire 2017/2018
Liste 4 de TD d'Algèbre MI
Chapitre 2: Partie2:**Images directe-réciproque-loi de composition**($\circ$)

Exercice 1: On considère la fonction sin de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelle est l'image directe, par sin, de $\mathbb{R}$?, de $[0, 2\pi]$?, de $[0, \frac{\pi}{2}]$?
Quelle est l'image réciproque, par sin, de $[0, 1]$?, de $[3, 4]$? et de $[1, 2]$?

Solution: L'image directe de $\mathbb{R}$ est $[-1, 1]$. L'image directe de $[0, 2\pi]$ est $[-1, 1]$. L'image directe de $[0, \frac{\pi}{2}]$ est $[0, 1]$. L'image réciproque de $[0, 1]$ est l'ensemble des réels x (de l'ensemble de départ $\mathbb{R}$) tel que $\sin(x)$ est une valeur appartenant à $[0, 1]$ (de ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$). Dans ce cas les valeurs de x sont dans $[0, \pi]$ à $2k\pi$ près avec k entier relatif (dans $\mathbb{Z}$). Comme $[3, 4]$ n'est pas dans $[-1, 1]$ alors l'image réciproque de $[3, 4]$ est l'ensempble vide, $\varnothing$. Comme seule la valeur 1 de $[1, 2]$ est dans $[-1, 1]$ alors l'image réciproque de $[1, 2]$ se réduit à celle du singleton $\{1\}$. Les valeurs de x tel que $\sin(x) = 1$ sont dans l'ensemble $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. **Rappel:** L'image direct d'un singleton est un singleton, mais l'image réciproque d'un singleton n'est pas nécessairement un singleton.

Exercice 2: Déterminer deux fonctions u et v telles que $h_i = u \circ v$, $i = 1, 2, 3$:
$h_1(x) = \sqrt{3x - 1}$, $h_2(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $h_3(x) = \frac{1}{x + 7}$

Solution: Il faut remarquer que: dans h_1 il y a la fonction $\sqrt{}$, dans h_2 il y a la fonction sin et dans h_3 il y a la fonction $fraction$. Donc on peut dire que: pour h_1 on peut prendre $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 3x - 1$, pour h_2 on peut prendre $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x + \frac{\pi}{2}$ et pour h_3 on peut prendre $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x + 7$. **Attention:** Le choix de u et de v n'est pas unique (la question de l'exercie le montre bien: déterminer **deux fonctions** u et v et **non les fonctions** u et v) .

Exercice 3: Soit $f(x) = \frac{x}{x + 1}$. Déterminer $f \circ f \circ \ldots \circ f(x)$ (où f apparaît n fois) en fonction de n et de x.

Solution: Avant tout, il faut se rappeller, qu'avant d'effectuer une opération de composition d'applications, $f \circ g$ par exemple, de s'assurer que l'ensemble de départ de f (son ensemble de définition) est l'ensemble d'arrivée de g, sinon

impossible de déterminer $f \circ g$. Donc pour le calcul de $f \circ f$ il faut se donner l'ensemble de départ de f et celui d'arrivée. La même chose doit-être faite pour le calcul de $f \circ f \circ f$. Il faut se donner l'ensemble de départ de $f \circ f$ qui sera (ou contenu dans) l'ensemble d'arrivée de f. Ainsi de suite...! C'est une queston supplémentaire qu'il faut y réfléchir.
Maintenant on va supposer que tout va bien et que $f \circ f \circ \ldots \circ f(x)$ existe. D'ou :

$$f \circ f(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1},$$

$$f \circ f \circ f(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{2\frac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{3x+1}.$$

Ceci nous conduit à supposer que:

$$f \circ f \circ \ldots \circ\ f(x) = \frac{x}{nx+1}\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Il reste donc à montrer cette égalité en utilisant le raisonnement par récurrence:
Pour $n = 1$ on a $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ qui est correct puisque c'est l'expression de $f(x)$.
On fixant n dans $\mathbb{N}^*$, supposons que $f \circ f \circ \ldots \circ\ f(x) = \dfrac{x}{nx+1}$ (f apparaît n fois) et montrons que
$f \circ f \circ \ldots \circ\ f(x) = \dfrac{x}{(n+1)x+1}$ (f apparaît $(n+1)$ fois). Un calcul simple conduit à ceci.

Exercice 4: Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$. Démontrer l'équivalence:
$f(A) \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \varnothing$.

Solution: Utilisons le raisonnement par contraposition: c'est à dire montrons que: $A \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing \Leftrightarrow f(A) \cap B \neq \varnothing$. On a à montrer deux implications:
" $\Rightarrow$ " Montrons que si $A \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing$ alors $f(A) \cap B \neq \varnothing$. Le fait que $A \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing$ alors $\exists\ y \in A \cap f^{-1}(B)$, donc $y \in A$ (*c.à.d* $f(y) \in f(A)$) et $y \in f^{-1}(B)$ (*c.à.d* $f(y) \in B$) donc $f(A) \cap B \neq \varnothing$.
" $\Leftarrow$ " Montrons que si $f(A) \cap B \neq \varnothing$ alors $A \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing$. Le fait que $f(A) \cap B \neq \varnothing$ alors $\exists\ z \in f(A) \cap B$, donc $z \in f(A)$ (*c.à.d* $\exists\ y \in A$ tel que $z = f(y)$) et $z \in B$ (*c.à.d* $f(y) \in B$ *d'ou* $y \in f^{-1}(B)$). Soit $y \in A \cap f^{-1}(B)$, donc $A \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing$.

Exercice 5: Soit $f : E \to F$ une application. *Montrer:*
a) $\forall A, B$ *des parties de* E, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ *et* $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
b) (supp) $\forall A, B$ *des parties de* F, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ *et* $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Solution: f est une application. Donc à tout élément x de E correspond une seule image dans F.
$a)$ Montrons que $\forall A,\ B$ *des parties de* E, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
Dans ce cas montrons que $\forall A,\ B$ *des parties de* E, $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$, puis montrons que $\forall A,\ B$ *des parties de* E $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$. Commençons par monter que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe donc $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in A \cup B$ alors $x \in A$ *ou* $x \in B$. Si $x \in A$ alors $y \in f(A)$ donc $y \in f(A) \cup f(B)$. Et si $x \in B$ alors $y \in f(B)$ donc $y \in f(B) \cup f(A)$. Maintenant montrons que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$. Soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Donc $y \in f(A)$ *ou* $y \in f(B)$. Si $y \in f(A)$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Ce x qui est dans A, il est aussi dans $A \cup B$ donc $y \in f(A \cup B)$. Maintenant si $y \in f(B)$ alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$. Ce x qui est dans B, il est aussi dans $A \cup B$ donc $y \in f(A \cup B)$.
Montrons maintenant que $\forall A,\ B$ *des parties de* E, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe donc $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Ce x qui est dans $A \cap B$ il est à la fois dans A et aussi dans B. $x \in A$ veut dire que $y = f(x)$ est dans $f(A)$, et x dans B veut dire que y est dans $f(B)$ donc y est clairement dans $f(A) \cap f(B)$.
$b)$ Montrons que $\forall A,\ B$ *des parties de* F, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ *et* $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
Soit x un élément de $f^{-1}(A \cup B)$. Ceci est équivalent à $f(x) \in A \cup B$ donc $f(x) \in A$ *ou* $f(x) \in B$, donc équivaut à dire que $x \in f^{-1}(A)$ *ou* $x \in f^{-1}(B)$ *c.à.d.* $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
Montrons que $\forall A,\ B$ *des parties de* F, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Soit x un élément de $f^{-1}(A \cap B)$. Ceci est équivalent à $f(x) \in A \cap B$ donc $f(x) \in A$ *et* $f(x) \in B$, donc équivaut à dire que $x \in f^{-1}(A)$ *et* $x \in f^{-1}(B)$ *c.à.d.* $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Exercice 6: (supp) Soit $f : E \to F$ une application. Etablir:
$\forall A \in P(E);\ A \subset f^{-1}(f(A))$ *et* $\forall B \in P(F);\ f(f^{-1}(B)) \subset B$.
$P(E)$ et $P(F)$ sont les ensembles de parties de E et de F respectivement.

Solution: **Rappel:** $P(E)$ est l'ensemble de tous les sous ensembles de E. $\varnothing$ et E font partie de $P(E)$. Un élément de $P(E)$ est un sous ensemble de E ou une partie de E.
Etablissons que $\forall A \in P(E);\ A \subset f^{-1}(f(A))$. Soit $x \in A$. Le fait que f est une apllication alors $f(x)$ existe et $f(x) \in f(A)$. Donc $x \in f^{-1}(f(A))$.
Etablissons que $\forall B \in P(F);\ f(f^{-1}(B)) \subset B$. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Il existe donc x dans $f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. x étant dans $f^{-1}(B)$, ceci nous donne $f(x) \in B$. Or $y = f(x)$ d'ou $y \in B$.